Stirling 数和 Pascal 矩阵函数

献给徐利治教授 95 华诞

何天晓^①, 廖信傑^②, 薛昭雄^{③*}

① Department of Mathematics, Illinois Wesleyan University, Bloomington, IL 61702, USA;

② 台湾师范大学数学研究所, 台北 11677;

③ Department of Mathematical Sciences, University of Nevada, Las Vegas, NV 89154, USA

E-mail: the@iwu.edu, jeffliao1@gmail.com, shiue@unlv.nevada.edu

收稿日期: 2015-01-20; 接受日期: 2015-05-11; * 通信作者

何天晓由 Earl and Marian A. Beling Endowed Professorship, Illinois Wesleyan University, USA 资助

摘要 Call 和 Velleman (1993) 引入了 Pascal 矩阵函数. Cheon 和 Kim (2001) 应用 Pascal 矩阵函数分解第一类和第二类 Stirling 数. 本文引入移位 Stirling 矩阵, 并用 Pascal 矩阵对其分解. 最后讨论引入广义 Stirling 数及其矩阵. He (2013) 以及 Hsu 和 Shiue (1998) 对后者有一系列的讨论. 本文中的矩阵等式反映了第一类、第二类和广义 Stirling 数以及二项式数之间的关系, 而且形式简洁, 有助于发现更多的性质.

关键词 广义 Pascal 矩阵 Pascal 矩阵函数 移位 Pascal 矩阵函数 第一类 Stirling 数 第二类 Stirling 数 Stirling (数) 矩阵 移位 Stirling (数) 矩阵

MSC (2010) 主题分类 05A15, 65B10, 33C45, 39A70, 41A80

1 引言

首先介绍本文中用到的记号. Call 和 Velleman^[1] 介绍了如下 Pascal 矩阵:

定义 1.1 假设 x 为非零实数, 则 $n \times n$ 广义 Pascal 矩阵定义为

$$(P_n[x])_{i,j} := \begin{cases} \binom{i}{j} x^{i-j}, & 0 \leq j \leq i \leq n-1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 n 为正整数, 且 $P_n[0] := I$, 这里 I 为单位阵. $P_n[x]$ 称为 Pascal 矩阵函数.

显然, $P_n[1]$ 是经典 Pascal 矩阵. 许多关于 Bernoulli 数、Bernoulli 多项式、Euler 数和 Euler 多项式的重要性质都可藉 Pascal 矩阵得到, 如文献 [1] 及后续的文献 [2-9] 中所述. 我们将定义 1.1 扩充得到移位广义 Pascal 矩阵.

定义 1.2 假设 x 为非零实数, 则 $n \times n$ 移位广义 Pascal 矩阵 $P_{n,r}[x]$ 可定义为

$$(P_{n,r}[x])_{i,j} := \begin{cases} \binom{i+r}{j+r} x^{i-j}, & 0 \leq j \leq i \leq n-r-1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 n 为正整数, 并且 $n \geq r+1$. 特别地, $P_{n,0}[x] = P_n[x]$, 这里 $P_{n,r}[x]$ 称为移位 Pascal 矩阵函数. 因
 为非负整数 r 没有特别指明, 我们的定义适用于任何非负整数 r .

我们还需要下列的第一类和第二类移位 Stirling 矩阵.

定义 1.3 记第一类和第二类 Stirling 数分别为 $s(n, k)$ 和 $S(n, k)$ ($n, k \geq 0$), 则 $n \times n$ 第一类和
 第二类移位 Stirling 矩阵分别定义为

$$[s_{n,r}]_{i,j} := s(r+i+1, r+j+1) \quad \text{和} \quad [S_{n,r}]_{i,j} := S(r+i+1, r+j+1). \quad (1.3)$$

另外, 记

$$[\hat{S}_{n,r}]_{i,j} := S(r+i+1, j+1).$$

若 $r=0$, 则 $s_{n,0} = s_n$ 为第一类 Stirling 矩阵, 且 $S_{n,0} = \hat{S}_{n,0} = S_n$ 为第二类 Stirling 矩阵.

当 $n=4$ 和 $r=2$ 时, 我们可将上述矩阵写为

$$P_{4,2}[x] = \begin{bmatrix} \binom{2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \binom{3}{2}x & \binom{3}{3} & 0 & 0 \\ \binom{4}{2}x^2 & \binom{4}{3}x & \binom{4}{4} & 0 \\ \binom{5}{2}x^3 & \binom{5}{3}x^2 & \binom{5}{4}x & \binom{5}{5} \end{bmatrix}, \quad s_{4,2} = \begin{bmatrix} s(3,3) & 0 & 0 & 0 \\ s(4,3) & s(4,4) & 0 & 0 \\ s(5,3) & s(5,4) & s(5,5) & 0 \\ s(6,3) & s(6,4) & s(6,5) & s(6,6) \end{bmatrix},$$

$$S_{4,2} = \begin{bmatrix} S(3,3) & 0 & 0 & 0 \\ S(4,3) & S(4,4) & 0 & 0 \\ S(5,3) & S(5,4) & S(5,5) & 0 \\ S(6,3) & S(6,4) & S(6,5) & S(6,6) \end{bmatrix}, \quad \hat{S}_{4,2} = \begin{bmatrix} \hat{S}(3,3) & 0 & 0 & 0 \\ \hat{S}(4,3) & \hat{S}(4,4) & 0 & 0 \\ \hat{S}(5,3) & \hat{S}(5,4) & \hat{S}(5,5) & 0 \\ \hat{S}(6,3) & \hat{S}(6,4) & \hat{S}(6,5) & \hat{S}(6,6) \end{bmatrix}.$$

定义 1.4 记 $V_r(x)$ 为如下的特殊 Vandermonde 矩阵:

$$V_r(x) := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & x+1 & \cdots & x+r-1 \\ x^2 & (x+1)^2 & \cdots & (x+r-1)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{r-1} & (x+1)^{r-1} & \cdots & (x+r-1)^{r-1} \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

设 A 和 B 分别为任何 m 和 n 阶方阵, 则 A 和 B 的直和定义为 (参见文献 [10])

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}_{(m+n) \times (m+n)}. \quad (1.5)$$

下述两引理取自文献 [10].

引理 1.5 ^[10, 引理 2.1] 若 $n \geq 1$, 则下述成立:

- (a) $P_n([1] \oplus S_{n-1}) = S_n$;
- (b) $([1] \oplus s_{n-1})P_n^{-1} = s_n$.

引理 1.6 [10, 定理 2.4] 若 x 为实数且 $r \geq 1$ 为整数, 则

$$V_r(x) = (P_r[x-1]S_r)D_rP_r^T,$$

其中 $D_r := \text{diag}(0!, 1!, \dots, (r-1)!)$ 为对角阵.

第 2 节将文献 [10] 中的结果扩充至移位 Pascal 阵、移位 Stirling 阵和上面定义的特殊 Vandermonde 阵. 第 3 节将结果进一步扩充至文献 [11, 12] 中所定义的一类广义 Stirling 数及其矩阵. Hsu 和 Shiue [12] 定义了一类广义的 Stirling 数并涵盖了众多广义 Stirling 数为其特例. He [11] 给出了广义 Stirling 数的进一步扩充以及它们的表达式和算法.

2 移位 Pascal 矩阵和移位 Stirling 矩阵及特殊 Vandermonde 阵的关系

我们从下述定理开始.

定理 2.1 设 $P_{n,r}[x]$ 定义于 (1.2), 则

$$(P_{n,r}[x])^{-1} = P_{n,r}[-x]. \quad (2.1)$$

证明 从文献 [6] 知, $P_n[x]P_n[-x] = I_n$, 其中 I_n 为 n 阶单位阵. 另外, 我们可将 $P_n[x]$ 写为

$$P_n[x] = \begin{bmatrix} P_r[x] & O \\ A & P_{n,r}[x] \end{bmatrix},$$

其中 A 为 $(n-r) \times r$ 阵, O 为零矩阵. 因此,

$$P_n[x]P_n[-x] = \begin{bmatrix} P_r[x] & O \\ A & P_{n,r}[x] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_r[-x] & O \\ B & P_{n,r}[-x] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & I_{n-r} \end{bmatrix} = I_n.$$

从上所述,

$$P_{n,r}[x]P_{n,r}[-x] = AO + P_{n,r}[x]P_{n,r}[-x] = I_{n-r}.$$

定理得证. □

类似地, 从反转关系 $S_n^{-1} = s_n$ 并依定理 2.1 的证明方法, 我们有下面的定理.

定理 2.2 设 $S_{n,r}$ 定义于 (1.3), 则对于任何正整数 n 和 r 有

$$S_{n,r}^{-1} = s_{n,r}. \quad (2.2)$$

定理 2.3 假设 $0 \leq r \leq n-1$, 则

(a) $P_{n,r}S_{n-1,r-1} = S_{n,r}$;

(b) $s_{n-1,r-1}(P_{n,r})^{-1} = s_{n-1,r-1}P_{n,r}[-1] = s_{n,r}$,

其中 $P_{n,r} = P_{n,r}[1]$.

证明 依引理 1.5, 我们有

$$S_n = P_n([1] \oplus S_{n-1}) = \begin{bmatrix} P_r & O \\ A & P_{n,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [1] \oplus S_{r-1} & O \\ B & S_{n-1,r-1} \end{bmatrix}.$$

注意到

$$S_n = \begin{bmatrix} S_r & O \\ C & S_{n,r} \end{bmatrix},$$

并比较前一式的两端可得

$$S_{n,r} = AO + P_{n,r}S_{n-1,r-1} = P_{n,r}S_{n-1,r-1}.$$

(b) 可用 (a) 及定理 2.1 和 2.2 证得. □

从引理 1.5(a) 和 1.5(b), 我们还有

$$(I_r \oplus P_{n-r})(I_r \oplus ([1] \oplus S_{n-r-1})) = (I_r \oplus S_{n-r})$$

和

$$(I_r \oplus ([1] \oplus s_{n-r-1}))(I_r \oplus P_{n-r}[-1]) = (I_r \oplus s_{n-r}).$$

从向前差分的定义, 我们还有下列互反关系式:

$$\Delta^r f(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} f(x+k) \Leftrightarrow f(x+r) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \Delta^k f(x). \quad (2.3)$$

因此, 利用 (1.1) 中定义的 $P_r[x]$, 我们可将上左式写成其矩阵形式

$$[f(x), \Delta f(x), \dots, \Delta^{r-1} f(x)]^T = P_r[-1][f(x), f(x+1), \dots, f(x+r-1)]^T.$$

注意到 $P_r[n]P_r[-n] = I$, 我们立得下面的定理.

定理 2.4 设 $P_r[x]$ 定义如 (1.1), 则恒有

$$\begin{aligned} [f(x), \Delta f(x), \dots, \Delta^{r-1} f(x)]^T &= P_r[-n][f(x), f(x+1), \dots, f(x+r-1)]^T \\ &\Leftrightarrow [f(x), f(x+1), \dots, f(x+r-1)]^T = P_r[n][f(x), \Delta f(x), \dots, \Delta^{r-1} f(x)]^T, \end{aligned} \quad (2.4)$$

或其等价形式

$$\Delta^r f(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} n^{r-k} f(x+k) \Leftrightarrow f(x+r) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} n^{r-k} \Delta^k f(x).$$

证明 由反演原理, (2.4) 成立. 是故, 它的矩阵形式也成立. □

若 $f(n) = n^m$, $0 \leq m \leq r-1$, 则 (2.3) 给出

$$\begin{bmatrix} n^0 & n & \cdots & n^{r-1} \\ \Delta n^0 & \Delta n & \cdots & \Delta n^{r-1} \\ \Delta^2 n^0 & \Delta^2 n & \cdots & \Delta^2 n^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^{r-1} n^0 & \Delta^{r-1} n & \cdots & \Delta^{r-1} n^{r-1} \end{bmatrix} = P_r[-1]V_r[n]^T, \quad (2.5)$$

其中 $V_r[n]$ 由 (1.4) 定义.

因为 $x^m = \sum_{r=0}^m S(m, r)(x)_r$, 从 Newton 公式^[13] 又可导出

$$x^m = \sum_{r=0}^m \frac{\Delta^r x^m}{r!} \Big|_{x=0} (x)_r,$$

因而,

$$\frac{\Delta^r x^m}{r!} \Big|_{x=0} = S(m, r). \quad (2.6)$$

另一方面,

$$\frac{\Delta^r n^m}{r!} = \frac{\Delta^r (x+n)^m}{r!} \Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} n^{m-k} \frac{\Delta^r x^k}{r!} \Big|_{x=0}.$$

从上面的等式立得

$$\frac{\Delta^r n^m}{r!} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} n^{m-k} S(k, r). \quad (2.7)$$

(2.7) 有如下的矩阵形式.

定理 2.5 设 $P_r[x]$ 和 S_r 分别为 Pascal 矩阵函数和第二类 Stirling 数矩阵, 则我们有如下矩阵恒等式:

$$D_r^{-1} \begin{bmatrix} n^0 & n & \cdots & n^{r-1} \\ \Delta n^0 & \Delta n & \cdots & \Delta n^{r-1} \\ \Delta^2 n^0 & \Delta^2 n & \cdots & \Delta^2 n^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^{r-1} n^0 & \Delta^{r-1} n & \cdots & \Delta^{r-1} n^{r-1} \end{bmatrix} = (P_r[n-1]S_r)^T = (P_r[n]([1] \oplus S_{r-1}))^T, \quad (2.8)$$

其中 $D_r := \text{diag}(0!, 1!, \dots, (r-1)!)$.

证明 注意到 $P_r[n] = P_r[n-1]P_r[1] = P_r[n-1]P_r$ 、引理 1.5 和 1.6, 由 (2.5) 可知,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} n^0 & n & \cdots & n^{r-1} \\ \Delta n^0 & \Delta n & \cdots & \Delta n^{r-1} \\ \Delta^2 n^0 & \Delta^2 n & \cdots & \Delta^2 n^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^{r-1} n^0 & \Delta^{r-1} n & \cdots & \Delta^{r-1} n^{r-1} \end{bmatrix} \\ &= P_r[-1]V_r[n]^T \\ &= P_r[-1]((P_r[n-1]S_r)D_rP_r^T)^T = P_r[-1]P_rD_r(P_r[n-1]S_r)^T \\ &= D_r(P_r[n-1]S_r)^T = D_r(P_r[n-1]P_r([1] \oplus S_{r-1}))^T \\ &= D_r(P_r[n]([1] \oplus S_{r-1}))^T. \end{aligned}$$

因此, (2.8) 成立. □

下面给出 (2.7) 的一些组合解释. 当 $n = 2$ 时, (2.7) 可写为

$$\Delta^r 2^m = r! \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 2^{m-k} S(k, r). \quad (2.9)$$

上式可用来计算 m -集中的偏序子集 B_m 中长为 r 的链的个数. 首先, 我们构造一个一一对应使得从 $\{a_1, \dots, a_k\}$ 到 $\{1, \dots, r\}$ 的映成函数被映到长为 $r-1$ 且最大元素 $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq [m]$ 的链. 设 $f: \{a_1, \dots, a_k\} \mapsto \{1, \dots, r\}$ 为一映成函数. 我们可从 f 得到如下一长为 $r-1$ 的链:

$$f^{-1}\{1\} \subset f^{-1}\{1\} \cup f^{-1}\{2\} \subset \dots \subset f^{-1}\{1\} \cup f^{-1}\{2\} \cup \dots \cup f^{-1}\{r\}.$$

对每一映成函数, 我们作如是构造. 显然, 由映成函数到长为 $r-1$ 的对应是双射对应. 因此, 这样链的个数等于从 $\{a_1, \dots, a_k\}$ 映到 $\{1, \dots, r\}$ 的映成函数的个数, 亦即 $r!S(k, r)$. 于是, 对于给出的 $\{a_1, \dots, a_k\}$, 我们已有 $r!S(k, r)$ 个长为 $r-1$ 的链, 但仍需加入一子集以形成长为 r 的链. 从 $[m] - \{a_1, \dots, a_k\}$ 中选取元素加入 $\{a_1, \dots, a_k\}$ 以形成新子集共有 2^{m-k} 种方法. 特别地, 如果我们不从 $[m] - \{a_1, \dots, a_k\}$ 中取任何元素, 则我们在链中加入空集作为其最小元素. 因为我们有 $\binom{m}{k}$ 种方法从 $[m]$ 中选取 $\{a_1, \dots, a_k\}$, 则偏序集 B_m 中长为 r 的链的个数为

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} r!S(k, r) 2^{m-k} = \Delta^r 2^m.$$

设 a, b 和 x 为实数, n 为非负整数, 则由 Newton 公式^[13] 可得

$$(x-a)^m = \sum_{r=0}^m \frac{1}{r!} [\Delta^r (x-a)^m]_{x=b} (x-b)_r.$$

记 $(x-b)_r$ 的系数为 $S(m, r, b-a)$. 它被称为具有参数 a 和 b 的第二类 Riordan-Stirling 数. $S(m, r, b-a)$ 在文献 [14] 中被引入, 并在文献 [15] 中以 $b=0$ 的形式被再次定义. 在文献 [15] 中, $S(m, r, -a)$ 称为非中心 Stirling 数. 于是, 我们有

$$(x-a)^m = \sum_{r=0}^m S(m, r, -a) (x)_r, \quad S(m, r, b-a) = \frac{\Delta^r (x-a)^m}{r!} \Big|_{x=b}. \quad (2.10)$$

特别地,

$$S(m, r, -a) = \frac{\Delta^r (x-a)^m}{r!} \Big|_{x=0}.$$

从 (2.10) 可得

$$S(0, 0, -a) = 1, \quad S(m, 0, -a) = (-a)^m, \quad S(0, r, -a) = 0,$$

其中 m 和 r 不为零, 并且

$$S(m+1, r, -a) = S(m, r-1, -a) + (r-a)S(m, r, -a).$$

因为

$$[\Delta^r (x-a)^m]_{x=0} = [\Delta^r x^m]_{x=-a},$$

我们有

$$S(m, r, a) = \frac{1}{r!} \Delta^r x^m \Big|_{x=a},$$

因此, $S(m, r, -a)$ 即为文献 [16] 中定义的数 $A_{m,r}(a)$. 并且, $S(m, r, b-a)$ 是 (2.6) 的扩充, 也是 (2.7) 在 $n=0$ 时的特殊情形.

最后用本文的方法给出一著名恒等式的矩阵形式.

定理 2.6 恒等式^[13]

$$\sum_{i=1}^n s(n, i) S(i+m, k) = \frac{\Delta^{k-n} n^m}{(k-n)!}$$

有如下矩阵形式:

$$s_n \hat{S}_{n,m} = \begin{bmatrix} 1^m & \frac{\Delta 2^m}{1!} & \cdots & \frac{\Delta^{n-1} n^m}{(n-1)!} \\ 0 & 2^m & \cdots & \frac{\Delta^{n-2} n^m}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n^m \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

上述矩阵等式反映了第一类和第二类 Stirling 数以及二项式数之间的关系, 而且形式简洁, 有助于发现更多的性质.

3 广义 Pascal 矩阵与广义 Stirling 数的关系

记 $\langle x \rangle_{n,\alpha} := x(x+\alpha) \cdots (x+(n-1)\alpha)$, $n=1, 2, \dots$, 并称为带有增量 α 的 x 的广义阶乘. 特别地, $\langle x \rangle_{n,-1} = (x)_n$ 为经典递降阶乘. $\langle x \rangle_{0,\alpha} = (x)_0 = 1$, 且 $\langle x \rangle_{n,0} = x^n$. 文献 [11] 给出了 $\langle x \rangle_{n,\alpha}$ 的一些性质. 为读者便利起见, 本文中用到的性质综述如下.

Hsu 和 Shiue^[12] 定义了广义 Stirling 数. He^[11] 用广义均差给出了广义 Stirling 数的表达式. 文献 [11, 12] 还研究了广义 Stirling 数的一系列性质. 广义 Stirling 数的四种算法可在文献 [11] 中寻得.

定义 3.1^[11, 12] 设 n 为正整数, α, β 和 γ 为实数. 广义 Stirling 数 $S(n, k, \alpha, \beta, \gamma)$ 定义为

$$\langle x \rangle_{n,-\alpha} = \sum_{k=0}^n S(n, k, \alpha, \beta, \gamma) \langle x - \gamma \rangle_{k,-\beta}. \quad (3.1)$$

特别地, 若 (α, β, γ) 为 $(1, 0, 0)$ 和 $(0, 1, 0)$, 则 $S(n, k, 1, 0, 0)$ 和 $S(n, k, 0, 1, 0)$ 分别为经典第一类和第二类 Stirling 数.

定理 3.2^[11] 设 n 和 k 为非负整数, 并设实参数 α, β 和 γ 不全为零, 则定义于 (3.1) 的广义 Stirling 数可表示为

$$\begin{aligned} S(n, k, \alpha, \beta, \gamma) &= \underline{\Delta}_{\beta}^k \langle x \rangle_{n,-\alpha} \Big|_{x=\gamma} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\beta^k k!} \Delta_{\beta}^k \langle x \rangle_{n,-\alpha} \Big|_{x=\gamma} = [\gamma, \gamma + \beta, \dots, \gamma + k\beta] \langle x \rangle_{n,-\alpha}, & \text{当 } \beta \neq 0, \\ \frac{1}{k!} D^k \langle x \rangle_{n,-\alpha} \Big|_{x=\gamma}, & \text{当 } \beta = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中 $\underline{\Delta}_{\beta}^k$ 是具有参数 β 的广义均差算子, 并且

$$\Delta_{\beta}^k f(t) := \Delta_{\beta}(\Delta_{\beta}^{k-1} f(t)) \quad (k \geq 2), \quad \Delta_{\beta} f(t) := f(t + \beta) - f(t),$$

而 $[t, t + \beta, \dots, t + k\beta]f$ 是 f 在 $\{t, t + \beta, \dots, t + k\beta\}$ 的 k 阶均差, $D^k f$ 则是 f 的 k 次导数. 当 $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$ 和 $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 0)$, 则分别有

$$S(n, k, 1, 0, 0) = s(n, k) = \frac{1}{k!} D^k(x)_n \Big|_{x=0}$$

和

$$S(n, k, 0, 1, 0) = S(n, k) = [0, 1, 2, \dots, k]x^n \Big|_{x=0}. \quad (3.3)$$

定理 3.3 ^[11] 设 n 和 k 为非负整数, 并设参数 α, β 和 γ 非全为零. 假如 $\beta \neq 0$, 则定义于 (3.1) 的广义 Stirling 数有如下展开式:

$$S(n, k) \equiv S(n, k, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\beta^k k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \langle \gamma + (k-j)\beta \rangle_{n, -\alpha}, \quad (3.4)$$

其中 $n \neq 0$, 而 $S(0, k) = \delta_{0k}$ 为 Kronecker 记号.

应用定理 3.2 和 3.3, 我们可将文献 [4] 中的结果扩充到广义 Stirling 数上.

定理 3.4 设 n 和 k 为非负整数, 并设参数 α, β 和 γ 非全为零. 假如 $\alpha = \gamma = 0$, 则 $\beta \neq 0$, 且定义于 (3.1) 的广义 Stirling 数 $S(n, k, 0, \beta, 0)$ 满足下面的竖递推式:

$$S(n, k, 0, \beta, 0) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \beta^{n-1-\ell} S(\ell, k-1, 0, \beta, 0). \quad (3.5)$$

证明 因 α, β 和 γ 非全为零, 当 $\alpha = \gamma = 0$ 时, $\beta \neq 0$. 依 (3.2) 和 (3.4), 我们可将 $S(n, k, 0, \beta, 0)$ 写为

$$\begin{aligned} S(n, k, 0, \beta, 0) &= \frac{1}{\beta^k k!} \Delta_{\beta}^k \langle x \rangle_{n, 0} \Big|_{x=0} \\ &= \frac{1}{\beta^k k!} \Delta_{\beta}^k x^n \Big|_{x=0} = \frac{1}{\beta^{k-1} (k-1)!} \Delta_{\beta}^{k-1} x^{n-1} \Big|_{x=\beta} \\ &= \frac{1}{\beta^{k-1} (k-1)!} \Delta_{\beta}^{k-1} (x + \beta)^{n-1} \Big|_{x=0} \\ &= \frac{1}{\beta^{k-1} (k-1)!} \Delta_{\beta}^{k-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \beta^{n-1-\ell} x^{\ell} \Big|_{x=0} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \beta^{n-1-\ell} \frac{\Delta_{\beta}^{k-1} x^{\ell}}{\beta^{k-1} (k-1)!} \Big|_{x=0} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \beta^{n-1-\ell} S(\ell, k-1, 0, \beta, 0). \end{aligned}$$

定理得证. □

借助广义 Pascal 矩阵, 我们可将定理 3.4 的结果写成矩阵形式.

推论 3.5 设 $P_n[\beta]$ ($\beta \neq 0$) 为定义于 (1.1) 的广义 Pascal 矩阵, 并记 n 阶方阵 $[S(i+1, j+1, 0, \beta, 0)]_{i,j}$ 为 S_n , 称为广义 Stirling 矩阵, 则我们有

$$S_n = P_n[\beta]([1] \oplus S_{n-1}). \quad (3.6)$$

证明 对任意的 i 和 j , $i \geq j \geq 0$, 因为 $([1] \oplus S_{n-1})$ 中 (i, j) - 表值为 $S(i-1, j-1, 0, \beta, 0)$, 从 (3.5) 可有

$$\begin{aligned} (P_n[\beta]([1] \oplus S_{n-1}))_{i,j} &= \sum_{\ell=0}^{i-1} p_{i-1,\ell}[\beta] S(\ell, j-1, 0, \beta, 0) \\ &= \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} \beta^{n-1-\ell} S(\ell, j-1, 0, \beta, 0) \\ &= S(i, j, 0, \beta, 0) = (S_n)_{ij}. \end{aligned}$$

证毕. □

矩阵等式 (3.6) 反映了广义 Stirling 数与二项式数之间的关系, 而且形式简洁, 有助于发现更多的性质. 例如, 应用推论 3.5, 我们可对广义 Stirling 矩阵建立起所有在第 2 节中表述的关于移位 Stirling 矩阵的结果. 限于篇幅, 我们不在此赘述.

致谢 衷心感谢审阅人提出的建议和评价.

参考文献

- 1 Call G S, Velleman D J. Pascal's matrices. Amer Math Monthly, 1993, 100: 372–376
- 2 Aceto L, Trigiante D. The matrices of Pascal and other greats. Amer Math Monthly, 2001, 108: 232–245
- 3 Apostol T M. A primer on Bernoulli numbers and polynomials. Math Mag, 2008, 81: 178–190
- 4 Cheon G S. A note on the Bernoulli and Euler polynomials. Appl Math Lett, 2003, 16: 365–368
- 5 Edelman A, Strang G. Pascal matrices. Amer Math Monthly, 2004, 111: 189–197
- 6 He T X, Liao J H C, Shiue P J S. The pascal matrix function and its applications to Bernoulli numbers and Bernoulli polynomials and Euler numbers and Euler polynomials. J Combin Number Theory, 2015, 6: 189–207
- 7 Pan H, Sun Z W. New identities involving Bernoulli and Euler polynomials. J Combin Theory Ser A, 2006, 113: 156–175
- 8 Srivastava H M, Pintér Á. Remarks on some relationships between the Bernoulli and Euler polynomials. Appl Math Lett, 2004, 17: 375–380
- 9 Sun Z W, Pan H. Identities concerning Bernoulli and Euler polynomials. Acta Arith, 2006, 125: 21–39
- 10 Cheon G S, Kim J S. Stirling matrix via Pascal matrix. Linear Algebra Appl, 2001, 329: 49–59
- 11 He T X. Expression and computation of generalized Stirling numbers. J Combin Math Combin Comput, 2013, 86: 239–268
- 12 Hsu L C, Shiue P J S. A unified approach to generalized Stirling numbers. Adv Appl Math, 1998, 20: 366–384
- 13 Jordan C. Calculus of Finite Differences. New York: Chelsea, 1965
- 14 Riordan J. Moment recurrence relations for binomial Poisson and hypergeometric frequency distribution. Ann Math Statist, 1937, 8: 103–111
- 15 Koutras M. Noncentral Stirling numbers and some applications. Discrete Math, 1982, 42: 73–89
- 16 Riordan J. Combinatorial Identities. New York/London/Sydney: John Wiley & Sons Inc, 1968

Stirling numbers and the Pascal matrix function

HE TianXiao, LIAO Jeff HsinChieh & SHIUE Peter JauShyong

Abstract A Pascal matrix function is introduced by Call and Velleman (1993). A decomposition of Stirling matrices of the first kind and the second kind by using the Pascal matrix function is given by Cheon and Kim (2001). In this paper, we introduce shift Stirling matrices and their decompositions by using the Pascal matrix.

Finally, we extend our discussion to generalized Stirling numbers and their matrices, which were studied by He (2013), and Hsu and Shiue (1998). Matrix equations presented in this article reflect the relationships between the first kind, the second kind, and generalized Stirling numbers and the binomial numbers. The expressions are succinct and helpful to find more properties of Stirling numbers.

Keywords generalized Pascal matrix, Pascal matrix function, shift Pascal matrix function, Stirling numbers of the first kind, Stirling numbers of the second kind, Stirling matrix, shift Stirling matrix

MSC(2010) 05A15, 65B10, 33C45, 39A70, 41A80

doi: 10.1360/N012015-00030