单位球面中子流形一类抽象 Willmore 型泛函的变分问题

刘进

国防科技大学信息系统与管理学院, 长沙 410073
E-mail: liujin229234@163.com

收稿日期: 2014-04-30; 接受日期: 2014-11-04

摘要 对于单位球面中的 n 维子流形, 本文构造一类抽象的 $W_{(n,F)}$ -Willmore 型泛函, 此泛函推广经典的 Willmore 泛函到相当一般的情形, 它的临界点称为 $W_{(n,F)}$ -Willmore 型子流形. 本文计算泛函的变分公式, 推导泛函临界点的 Simons 型不等式, 针对特殊的函数 F , 构造 $W_{(n,F)}$ -Willmore 型子流形的例子, 最后给出泛函临界点间隙现象的刻画.

关键词 $W_{(n,F)}$ -Willmore 型子流形 Simons 型不等式 间隙现象

MSC (2010) 主题分类 53C42, 53A10

1 引言

假设 $\varphi: M^n \rightarrow S^{n+p}(1)$ 是单位球面中的 n 维紧致无边子流形, 沿着子流形 M 选定一个局部的单位正交标架 $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+p}\}$ 使得 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是子流形 M 的切丛标架而 $\{e_{n+1}, \dots, e_{n+p}\}$ 是 M 的法丛标架. 它们的对偶标架分别记为 $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ 和 $\{\theta^{n+1}, \dots, \theta^{n+p}\}$, 子流形的一个基本事实是 $\theta^{n+1} = \dots = \theta^{n+p} = 0$. 为了描述方便, 我们采用如下的指标约定:

$$1 \leq A, B, C, D, \dots \leq n+p, \quad 1 \leq i, j, k, l, \dots \leq n, \quad n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots \leq n+p.$$

令 II 表示子流形 $\varphi: M \rightarrow S^{n+p}(1)$ 的第二基本型, 用分量的形式可以表示为

$$II = \sum_{ij\alpha} h_{ij}^\alpha \theta^i \otimes \theta^j \otimes e_\alpha,$$

定义张量和函数,

$$H^\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_{ii}^\alpha, \quad \vec{H} = H^\alpha e_\alpha, \quad H^2 = \sum_{\alpha} (H^\alpha)^2, \quad S = \sum_{ij\alpha} (h_{ij}^\alpha)^2, \quad \rho = S - nH^2.$$

我们称 $\vec{H}$ 为平均曲率向量场, S 为第二基本型模长的平方. 在子流形几何中, 一些定义是众所周知的, 例如, 子流形 $\varphi: M^n \rightarrow S^{n+p}(1)$ 是极小的当且仅当 $\vec{H} \equiv 0$, 是全测地的当且仅当 $S \equiv 0$. 对于另一个不变量 ρ , 显然, 任取子流形上的点 $Q \in M$ 都有 $\rho(Q) \geq 0$, $\rho(Q) = 0$ 当且仅当 Q 是 M 的一个脐点. 因为子流形 M 是紧致的, 所以必定存在某个正常数 C 使得有界性 $0 \leq \rho(Q) \leq C, \forall Q \in M$ 成立.

英文引用格式: Liu J. Variational problem of an abstract Willmore type functional of sub-manifold in unit sphere (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 255–272, doi: 10.1360/012014-67

在微分几何中, 关于子流形有著名的经典 Willmore 泛函, 其定义为

$$W_{(n, \frac{n}{2})}(\varphi) = \int_M \rho^{\frac{n}{2}} dv,$$

关于此泛函的更精细的描述可以参见文献 [1–4]. 经典 Willmore 泛函最显著的特点是在共形变换之下保持不变, 它的临界点称为经典 Willmore 子流形或者 $W_{(n, \frac{n}{2})}$ -Willmore 型子流形. 著名的 Willmore 猜想是说对于任意的 2 维浸入环面 $\varphi: M^2 \rightarrow S^3$, 泛函有最优下界估计

$$W_{(2,1)}(\varphi) \geq 4\pi^2.$$

最近, Marques 和 Neves [5] 运用 Min-Max 理论完全解决了 2 维情形的 Willmore 猜想, 但是高维情形的猜想仍然是一个公开问题. 当子流形的维数 $n \geq 3$ 时, 很多学者对泛函 $W_{(n, \frac{n}{2})}(\varphi)$ 进行了广泛的研究, 如在文献 [6–11] 中得到了比较系统的结果.

鉴于 Willmore 猜想的重要性, 较多学者对经典 Willmore 泛函进行了推广并且得到了较多有意义的结果.

Cai [12] 研究了 3 维单位球面 $S^3(1)$ 中的 2 维曲面的 $W_{(2,p)}$ -Willmore 型泛函

$$W_{(2,p)}(\varphi) = \int_M (k_1 - k_2)^p dv,$$

此处 k_1, k_2 代表 M 的主曲率并且要求 $k_1 \geq k_2$. 在一些条件下, Cai 得到了一些全局的积分不等式.

Guo 和 Li [13] 针对单位球面 $S^{n+p}(1)$ 中的 n 维子流形 M , 考虑了 $W_{(n,1)}$ -Willmore 型泛函

$$W_{(n,1)}(\varphi) = \int_M \rho dv,$$

计算了泛函的第一变分公式, 推导了 Simons 型不等式, 最后讨论了点态的间隙现象. 针对同样的泛函, Xu 和 Yang [14] 推导了全局间隙现象.

Wu [15] 针对单位球面 $S^{n+p}(1)$ 中的 n 维子流形, 定义了一种幂函数形式的 $W_{(n,r)}$ -Willmore 型泛函

$$W_{(n,r)}(\varphi) = \int_M \rho^r dv, \quad r \in \left[1, \frac{n}{2}\right],$$

并得到了泛函 $W_{(n,r)}(\varphi)$ 临界点的第一变分公式, Simons 型不等式和间隙现象.

受上述工作的启发, 本文对单位球面中的子流形 $\varphi: M^n \rightarrow S^{n+p}(1)$ 定义了一类抽象的 $W_{(n,F)}$ -Willmore 型泛函并展开了研究,

$$W_{(n,F)}(\varphi) = \int_M F(\rho) dv,$$

此处我们假设抽象函数 F 满足

$$F: u \rightarrow F(u), \quad F \in C^3, \quad [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

泛函 $W_{(n,F)}(\varphi)$ 的临界点称为 $W_{(n,F)}$ -Willmore 型子流形. 显见, 上文所涉及的泛函 $W_{(n, \frac{n}{2})}$, $W_{(2,p)}$, $W_{(n,1)}$ 和 $W_{(n,r)}$ 都是抽象泛函 $W_{(n,F)}$ 的特殊情形, 不仅如此, 当 $F(u) = e^u$ 时, 我们可以定义一个完全不同于上文幂函数形式泛函的全新泛函 $W_{(n,\exp)}(\varphi) = \int_M e^\rho dv$, 所以抽象泛函 $W_{(n,F)}$ 的构造与研究都是有意义的.

为了陈述我们的结果, 我们需要利用第二基本型来构造一些符号. 首先, 当子流形 $\varphi: M^n \rightarrow S^{n+p}(1)$ 的余维数为 1 时, 也就是当 M 是超曲面时, 我们定义

$$\begin{aligned} h_{ij}^{n+1} &=: h_{ij}, \quad A = (h_{ij})_{n \times n}, \quad H = \frac{1}{n} \sum_i h_{ii}, \quad S = \sum_{ij} (h_{ij})^2, \quad P_k = \text{tr}(A^k), \quad k \in \mathbb{N}, \\ \hat{h}_{ij} &= h_{ij} - H\delta_{ij}, \quad \hat{A} = (\hat{h}_{ij})_{n \times n}, \quad \rho = \sum_{ij} (\hat{h}_{ij})^2 = S - nH^2, \quad \hat{P}_k = \text{tr}(\hat{A}^k), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

其次, 当子流形 $\varphi: M^n \rightarrow S^{n+p}(1)$ 的余维数大于 1 时, 我们定义

$$\begin{aligned} \hat{h}_{ij}^\alpha &=: h_{ij}^\alpha - H^\alpha \delta_{ij}, \quad A_\alpha = (h_{ij}^\alpha)_{n \times n}, \quad \hat{A}_\alpha = (\hat{h}_{ij}^\alpha)_{n \times n}, \quad \hat{I} = \sum_{ij\alpha} \hat{h}_{ij}^\alpha \theta^i \otimes \theta^j \otimes e_\alpha, \\ N(A_\alpha) &= \text{tr}(A_\alpha A_\alpha^T), \quad S_{\alpha\beta} = \text{tr}(A_\alpha A_\beta), \quad S_{\alpha\beta\gamma} = \text{tr}(A_\alpha A_\beta A_\gamma), \quad S_{\alpha\beta\gamma\delta} = \text{tr}(A_\alpha A_\beta A_\gamma A_\delta), \\ N(\hat{A}_\alpha) &= \text{tr}(\hat{A}_\alpha \hat{A}_\alpha^T), \quad \hat{S}_{\alpha\beta} = \text{tr}(\hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta), \quad \hat{S}_{\alpha\beta\gamma} = \text{tr}(\hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta \hat{A}_\gamma), \quad \hat{S}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \text{tr}(\hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta \hat{A}_\gamma \hat{A}_\delta). \end{aligned}$$

显然, 我们有

$$\begin{aligned} S_{\alpha\alpha} &= N(A_\alpha) \geq 0, \quad \hat{S}_{\alpha\alpha} = N(\hat{A}_\alpha) \geq 0, \quad S = \sum_\alpha S_{\alpha\alpha}, \quad \rho = \sum_\alpha \hat{S}_{\alpha\alpha}, \\ N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) &= \text{tr}((A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^T) = 2(S_{\alpha\alpha\beta\beta} - S_{\alpha\beta\alpha\beta}), \\ N(\hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta - \hat{A}_\beta \hat{A}_\alpha) &= \text{tr}((\hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta - \hat{A}_\beta \hat{A}_\alpha)(\hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta - \hat{A}_\beta \hat{A}_\alpha)^T) = 2(\hat{S}_{\alpha\alpha\beta\beta} - \hat{S}_{\alpha\beta\alpha\beta}). \end{aligned}$$

本文的第 3 节计算泛函 $W_{(n,F)}(\varphi)$ 的第一变分公式, 得到 Euler-Lagrangian 方程.

定理 1.1 假设 $\varphi: M^n \rightarrow S^{n+p}(1)$ 是 $n+p$ 维单位球面 $S^{n+p}(1)$ 中的 n 维子流形, 那么 M 是一个 $W_{(n,F)}$ -Willmore 型子流形当且仅当对任意的指标 $\alpha \in [n+1, n+p]$ 都有

$$\sum_{ij} (F'(\rho) h_{ij}^\alpha)_{,ij} - \Delta(F'(\rho) H^\alpha) + \sum_\beta (S_{\alpha\beta\beta} - S_{\alpha\beta} H^\beta) F'(\rho) - \frac{n}{2} F(\rho) H^\alpha = 0. \quad (1.1)$$

特别地, 如果 M 是等参 (全部主曲率是常数) 超曲面, 那么 M 是 $W_{(n,F)}$ -Willmore 型超曲面当且仅当

$$(P_3 - SH)F'(\rho) - \frac{n}{2} F(\rho) H = 0. \quad (1.2)$$

注 1.1 当 $F(\rho) = \rho^{\frac{n}{2}}, \rho, \rho^r$ 时, 定理 1.1 与文献 [6–8, 13, 15] 中的结果完全一致, 当函数 $F(\rho)$ 不是上述几种函数时, 可以得到全新的泛函的临界点的 Euler-Lagrangian 方程.

在极小子流形的研究中, Simons 积分不等式发挥了重要作用, 其具体内容表述为: 如果 M 是 $n+p$ 维单位球面 $S^{n+p}(1)$ 中的 n 维紧致无边的极小子流形, 那么成立

$$\int_M S \left(\frac{n}{2 - \frac{1}{p}} - S \right) dv \leq 0.$$

进一步, 如果 $0 \leq S \leq \frac{n}{2 - \frac{1}{p}}$, 则必有 $S \equiv 0$ 或者 $S \equiv \frac{n}{2 - \frac{1}{p}}$.

对于经典 Willmore 子流形或者 $W_{(n, \frac{n}{2})}$ -Willmore 型子流形, Li [6–8] 证明了 Simons 类型积分不等式, 其具体内容表述为: 如果 M 是 $n+p$ 维单位球面 $S^{n+p}(1)$ 中的 n 维紧致无边的 $W_{(n, \frac{n}{2})}$ -Willmore 型子流形, 那么成立

$$\int_M \rho^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2 - \frac{1}{p}} - \rho \right) dv \leq 0.$$

进一步, 如果 $0 \leq \rho \leq \frac{n}{2-\frac{1}{p}}$, 则必有 $\rho \equiv 0$ 或者 $\rho \equiv \frac{n}{2-\frac{1}{p}}$.

类似地, 对于泛函 $W_{(n,1)}$ 和 $W_{(n,r)}$, 文献 [13–15] 得到了 Simons 型积分不等式, 由此可见, Simons 型积分不等式并不是一个特定的现象, 而是较多泛函临界点都具有的一类较为普遍的现象. 所以一个自然的问题是: 对于 $W_{(n,F)}$ -Willmore 型子流形, 是否可以建立 Simons 型积分不等式呢? 本文给出肯定的答案.

定理 1.2 假设 M 是 $n+p$ 维单位球面 $S^{n+p}(1)$ 中的 n 维紧致无边的 $W_{(n,F)}$ -Willmore 型子流形, 那么我们有积分等式

$$0 = \int_M \left[F''(\rho)|\nabla\rho|^2 + F'(\rho)(|\nabla h|^2 - n|\nabla\vec{H}|^2) + n^2 H^2 F(\rho) + 2n\rho F'(\rho) \right. \\ \left. - 2F'(\rho) \left(n \sum_{\alpha\beta} \hat{S}_{\alpha\beta} H^\alpha H^\beta + \sum_{\alpha\beta} (\hat{S}_{\alpha\beta})^2 + \sum_{\alpha\neq\beta} N(\hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta - \hat{A}_\beta \hat{A}_\alpha) \right) \right] dv.$$

当 $p=1$ 时, 我们有

$$0 = \int_M [F''(\rho)|\nabla\rho|^2 + F'(\rho)(|\nabla h|^2 - n|\nabla\vec{H}|^2) + nH^2(nF(\rho) - 2\rho F'(\rho)) - 2\rho(\rho - n)F'(\rho)] dv. \quad (1.3)$$

当 $p \geq 2$, $F'(\rho) \geq 0$ 时, 我们有 Simons 型积分不等式

$$\int_M 2\left(2 - \frac{1}{p}\right)\rho\left(\rho - \frac{n}{2-\frac{1}{p}}\right)F'(\rho)dv \\ \geq \int_M [F''(\rho)|\nabla\rho|^2 + F'(\rho)(|\nabla h|^2 - n|\nabla\vec{H}|^2) + nH^2(nF(\rho) - 2\rho F'(\rho))] dv. \quad (1.4)$$

此处 $|\nabla h|^2 = \sum_{ijk\alpha} (h_{ij,k}^\alpha)^2$, $|\nabla\vec{H}|^2 = \sum_{i\alpha} (H_{,i}^\alpha)^2$ 在第 2 节中定义.

注 1.2 当 $F(\rho) = \rho^{\frac{n}{2}}$, ρ, ρ^r 时, 定理 1.2 与文献 [6–8, 13, 15] 中的结果一致. 当抽象函数 $F(\rho)$ 不同于上述函数时, 我们可以建立一些全新的 Simons 型不等式.

利用定理 1.2, 结合 Chern 等人 [16] 的 2 个著名的结果, 我们可以根据函数 F, F', F'' 的符号讨论一些间隙现象.

定理 1.3 假设 M 是 $n+p$ 维单位球面 $S^{n+p}(1)$ 中的 n 维紧致无边的 $W_{(n,F)}$ -Willmore 型子流形, 我们有

(1) 当 $p=1$ 且在区间 $(0, n]$ 上满足 $F'' \geq 0$, $F' > 0$, $nF - 2uF' \geq 0$ 时, 如果 $0 \leq \rho \leq n$, 那么 $\rho = 0$ 或者 $\rho = n$. (i) 对于 $\rho = 0$, (a) 如果 $F(0) = 0$, 那么 M 是全脐的; (b) 如果 $F(0) \neq 0$, 那么 $H = S = \rho = 0$ 并且 M 是全测地的. (ii) 对于 $\rho = n$, (a) 如果 $F(n) - 2F'(n) = 0$, 那么 M 是经典的 Willmore 环面 $W_{m,n-m}$; (b) 如果 $F(n) - 2F'(n) \neq 0$, 那么 $n \equiv 0 \pmod{2}$ 并且 $M = C_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.

(2) 当 $p=1$, 在区间 $(0, n]$ 上满足 $F'' \geq 0$, $F' > 0$, $nF - 2uF' \leq 0$ 并且 $H = 0$ 时, 如果 $0 \leq \rho \leq n$, 那么 $\rho = 0$ 或者 $\rho = n$. (i) 对于 $\rho = 0$, 那么 $H = S = \rho = 0$ 并且 M 是全测地的. (ii) 对于 $\rho = n$, 那么 $n \equiv 0 \pmod{2}$ 并且 $M = C_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.

(3) 当 $p \geq 2$ 并且在区间 $(0, \frac{n}{2-\frac{1}{p}}]$ 满足 $F'' \geq 0$, $F' > 0$, $nF - 2uF' \geq 0$ 时, 如果 $0 \leq \rho \leq \frac{n}{2-\frac{1}{p}}$, 那么 $\rho = 0$ 或者 $\rho = \frac{n}{2-\frac{1}{p}}$. (i) 对于 $\rho = 0$, (a) 如果 $F(0) = 0$, 那么 M 是全脐的; (b) 如果 $F(0) \neq 0$, 那么 $H = S = \rho = 0$ 并且 M 是全测地的. (ii) 对于 $\rho = \frac{n}{2-\frac{1}{p}}$, 那么 $n = p = 2$, $H = 0$, $S = \rho = \frac{4}{3}$ 并且 M 是 Veronese 曲面.

(4) 当 $p \geq 2$, 在区间 $(0, \frac{n}{2-\frac{1}{p}}]$ 满足 $F'' \geq 0$, $F' > 0$, $nF - 2uF' \leq 0$, 并且 $H = 0$ 时, 如果 $0 \leq \rho \leq \frac{n}{2-\frac{1}{p}}$, 那么 $\rho = 0$ 或者 $\rho = \frac{n}{2-\frac{1}{p}}$. (i) 对于 $\rho = 0$, 那么 $H = S = \rho = 0$ 并且 M 是全测地的. (ii) 对于 $\rho = \frac{n}{2-\frac{1}{p}}$, 那么 $n = p = 2$, $H = 0$, $S = \rho = \frac{4}{3}$ 并且 M 是 Veronese 曲面.

注 1.3 当 $F(\rho) = \rho^{\frac{n}{2}}$, ρ, ρ^r 时, 定理 1.3 和文献 [6–8, 13–15] 中的结果一致, 当抽象函数 $F(\rho)$ 不是上述函数时, 可以得到新的结果. 类似地, 可以针对函数 F, F', F'' 的其他符号类型进行讨论. 定理 1.3 中出现的例子将在第 3 节构造.

2 预备知识

假设 $\varphi: M^n \rightarrow S^{n+p}(1)$ 是 $n+p$ 维单位球面中的 n 维紧致无边子流形, 进一步假设 $\Phi(\cdot, \cdot): M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S^{n+p}(1)$ 是 φ 的变分, 即

$$\varphi_t := \Phi(\cdot, t): M \times \{t\} \rightarrow S^{n+p}(1), \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$$

是浸入映射并且要求 $\varphi_0 \equiv \varphi$.

令 $s = (s_1, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots, s_{n+p})$ 和 $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^n, \sigma^{n+1}, \dots, \sigma^{n+p})$ 分别是 $TS^{n+p}(1)$ 和 $T^*S^{n+p}(1)$ 的局部单位正交标架, 那么 $e = (e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+p}) = \varphi_t^{-1}s$ 就是 $M \times \{t\}$ 上拉回丛 $\varphi_t^{-1}TS^{n+p}(1)$ 的局部单位正交标架, 使得 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 M 的切丛标架, 并且 $\{e_{n+1}, \dots, e_{n+p}\}$ 是 M 的法丛标架, 因此对于拉回丛有如下分解:

$$\varphi_t^{-1}TS^{n+p}(1) = TM_t \oplus T^\perp M_t.$$

用 ω 表示 $TS^{n+p}(1)$ 上的联络形式, 通过拉回映射, 我们可以假设下面的分解:

$$\begin{aligned} \Phi^*\sigma &= \theta + V dt, & \Phi^*\sigma^i &= \theta^i + V^i dt, & \Phi^*\sigma^\alpha &= V^\alpha dt, & \Phi^*\omega &= \phi + L dt, \\ \Phi^*\omega_i^j &= \phi_i^j + L_i^j dt, & \Phi^*\omega_i^\alpha &= \phi_i^\alpha + L_i^\alpha dt, & \Phi^*\omega_\alpha^i &= \phi_\alpha^i + L_\alpha^i dt, & \Phi^*\omega_\alpha^\beta &= \phi_\alpha^\beta + L_\alpha^\beta dt. \end{aligned}$$

因此我们可以推导出 $\{\theta^i\}$ 是 T^*M 的局部单位正交标架, $\theta^{n+1} \equiv \dots \equiv \theta^{n+p} \equiv 0$, $\{V^i, V^\alpha\}$ 是 Φ 的变分向量场, 即

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t \right|_{t=0} = \sum_i V^i e_i + \sum_\alpha V^\alpha e_\alpha.$$

进一步, 我们可以推导出 $\{\phi_i^j\}$ 是子流形切丛 TM 的联络形式, $\{\phi_\alpha^\beta\}$ 是子流形法丛 $T^\perp M$ 的联络形式, $\{\phi_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \theta^j\}$ 是子流形的第二基本型.

用 $\Omega, \Omega^\top$ 和 $\Omega^\perp$ 分别表示 $TS^{n+p}(1), TM$ 和 $T^\perp M$ 上的曲率形式, 它们的分量分别记为

$$\Omega_{AB} = \sum_{CD} \frac{1}{2} \bar{R}_{ABCD} \sigma^C \wedge \sigma^D, \quad \Omega_{ij}^\top = \sum_{kl} \frac{1}{2} R_{ijkl} \theta^k \wedge \theta^l, \quad \Omega_{\alpha\beta}^\perp = \sum_{ij} \frac{1}{2} R_{\alpha\beta ij}^\perp \theta^i \wedge \theta^j.$$

从任何一本标准的微分几何教科书, 我们知道单位球面的曲率分量是

$$\bar{R}_{ABCD} = -(\delta_{AC} \delta_{BD} - \delta_{AD} \delta_{BC}).$$

利用联络形式 $\{\phi_i^j\}$ 和 $\{\phi_\alpha^\beta\}$, 张量与函数 $h_{ij}^\alpha, H^\alpha, S, \rho, V^i, V^\alpha$ 的协变导数定义为

$$h_{ij,k}^\alpha \theta^k = d_M h_{ij}^\alpha - \sum_p h_{pj}^\alpha \phi_i^p - \sum_p h_{ip}^\alpha \phi_j^p + \sum_\beta h_{ij}^\beta \phi_\beta^\alpha,$$

$$\begin{aligned}
 h_{ij,kl}^\alpha &= d_M h_{ij,k}^\alpha - \sum_p h_{pj,k}^\alpha \phi_i^p - \sum_p h_{ip,k}^\alpha \phi_j^p - \sum_p h_{ij,p}^\alpha \phi_k^p + \sum_\beta h_{ij,k}^\beta \phi_\beta^\alpha, \\
 H_{,i}^\alpha \theta^i &= d_M H^\alpha + \sum_\beta H^\beta \phi_\beta^\alpha, \quad H_{,ij}^\alpha \theta^j = d_M H_{,i}^\alpha - \sum_p H_{,p}^\alpha \phi_i^p + \sum_\beta H_{,i}^\beta \phi_\beta^\alpha, \quad \Delta H^\alpha = \sum_i H_{,ii}^\alpha, \\
 S_{,i} \theta^i &= d_M S, \quad S_{,ij} \theta^j = d_M S_{,i} - \sum_p S_{,p} \phi_i^p, \quad \Delta S = \sum_i S_{,ii}, \\
 \rho_{,i} \theta^i &= d_M \rho, \quad \rho_{,ij} \theta^j = d_M \rho_{,i} - \sum_p \rho_{,p} \phi_i^p, \quad \Delta \rho = \sum_i \rho_{,ii}, \\
 V_{,j}^i \theta^j &= d_M V^i + \sum_p V^p \phi_p^i, \quad V_{,jk}^i \theta^k = d_M V_{,j}^i - \sum_p V_{,p}^i \phi_j^p + \sum_p V_{,j}^p \phi_p^i, \\
 V_{,i}^\alpha \theta^i &= d_M V^\alpha + \sum_\beta V^\beta \phi_\beta^\alpha, \quad V_{,ij}^\alpha \theta^j = d_M V_{,i}^\alpha - \sum_p V_{,p}^\alpha \phi_i^p + \sum_\beta V_{,i}^\beta \phi_\beta^\alpha, \quad \Delta V^\alpha = \sum_i V_{,ii}^\alpha.
 \end{aligned}$$

我们用 d_M , $d_{M \times (-\epsilon, \epsilon)} = d_M + dt \frac{\partial}{\partial t}$ 和 d 分别表示流形 M , $M \times (-\epsilon, \epsilon)$ 和 $S^{n+1}(1)$ 上的微分算子. 众所周知, Riemann 流形的结构方程为

$$\omega + \omega^\top = 0, \quad d\sigma - \sigma \wedge \omega = 0, \quad \Omega + \Omega^\top = 0, \quad \Omega = d\omega - \omega \wedge \omega.$$

通过直接计算和比较结构方程的左右两边,

$$\Phi^*(\Omega) = d_{M \times (-\epsilon, \epsilon)} \Phi^*(\omega) - \Phi^*(\omega) \wedge \Phi^*(\omega), \quad (2.1)$$

$$0 = d_{M \times (-\epsilon, \epsilon)} \Phi^*(\sigma) - \Phi^*(\sigma) \wedge \Phi^*(\omega), \quad (2.2)$$

我们可以推导出本节下文中的几个引理, 这种方法的基本思想是由 Hu 和 Li ^[10] 首先提出的. 事实上, 方程 (2.1) 的左边是

$$\begin{aligned}
 \Phi^*(\Omega_A^B) &= \sum_{CD} \Phi^* \left(\frac{1}{2} \bar{R}_{ABCD} \sigma^C \wedge \sigma^D \right) \\
 &= \sum_{CD} \frac{1}{2} \bar{R}_{ABCD} \Phi^*(\sigma^C) \wedge \Phi^*(\sigma^D) \\
 &= \sum_{CD} \frac{1}{2} \bar{R}_{ABCD} (\theta^C + V^C dt) \wedge (\theta^D + V^D dt) \\
 &= \sum_{CD} \frac{1}{2} \bar{R}_{ABCD} \theta^C \wedge \theta^D + \sum_{CD} dt \wedge (\bar{R}_{ABCD} V^C \theta^D),
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

而方程 (2.1) 的右边是

$$\begin{aligned}
 &d_{M \times (-\epsilon, \epsilon)} \Phi^*(\omega_A^B) - \sum_C \Phi^*(\omega_A^C) \wedge \Phi^*(\omega_C^B) \\
 &= \left(d_M + dt \frac{\partial}{\partial t} \right) (\phi_A^B + dt L_A^B) - \sum_C (\phi_A^C + dt L_A^C) (\phi_C^B + dt L_C^B) \\
 &= \left(d_M \phi_A^B - \sum_C \phi_A^C \wedge \phi_C^B \right) + dt \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_A^B - \left(d_M L_A^B + \sum_C L_A^C \phi_C^B - \phi_A^C L_C^B \right) \right),
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

比较方程 (2.3) 和 (2.4), 我们得到

$$\left(d_M \phi_A^B - \sum_C \phi_A^C \wedge \phi_C^B \right) = \sum_{CD} \frac{1}{2} \bar{R}_{ABCD} \theta^C \wedge \theta^D, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_A^B - \left(d_M L_A^B + \sum_C L_A^C \phi_C^B - \phi_A^C L_C^B \right) = \sum_{CD} \bar{R}_{ABCD} V^C \theta^D. \quad (2.6)$$

计算方程 (2.2) 得

$$\begin{aligned} 0 &= d_{M \times (-\epsilon, \epsilon)} \Phi^*(\sigma^A) - \sum_B \Phi^*(\sigma^B) \wedge \Phi^*(\omega_B^A) \\ &= \left(d_M + dt \frac{\partial}{\partial t} \right) (\theta^A + dt V^A) - \sum_B (\theta^B + dt V^B) \wedge (\phi_B^A + dt L_B^A) \\ &= d_M \theta^A - \sum_B \theta^B \wedge \phi_B^A + dt \left(\frac{\partial \theta^A}{\partial t} - d_M V^A - \sum_B V^B \phi_B^A + \sum_B \theta^B L_B^A \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

比较方程 (2.7) 两边, 可得

$$d_M \theta^A - \sum_B \theta^B \wedge \phi_B^A = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \theta^A}{\partial t} - d_M V^A - \sum_B V^B \phi_B^A + \sum_B \theta^B L_B^A = 0. \quad (2.9)$$

因此, 根据方程 (2.5)、(2.6)、(2.8) 和 (2.9), 我们可以得到如下的几个引理, 这些引理在变分计算和 Simons 型积分不等式的建立过程中将发挥重要作用.

引理 2.1 假设 $\varphi: M^n \rightarrow S^{n+p}(1)$ 是子流形, 我们有结构方程

$$\begin{aligned} h_{ij,k}^\alpha &= h_{ik,j}^\alpha, \quad R_{\alpha\beta ij}^\perp = - \sum_p (h_{ip}^\alpha h_{pj}^\beta - h_{jp}^\alpha h_{pi}^\beta), \\ R_{ijkl} &= -(\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) - \sum_\alpha (h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha - h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha). \end{aligned}$$

引理 2.2 假设 $\varphi: M^n \rightarrow S^{n+p}(1)$ 是子流形, 我们有 Ricci 恒等式

$$\begin{aligned} h_{ij,kl}^\alpha - h_{ij,lk}^\alpha &= -(\delta_{ik} h_{jl}^\alpha - \delta_{il} h_{jk}^\alpha) - (\delta_{jk} h_{il}^\alpha - \delta_{jl} h_{ik}^\alpha) - \sum_{p\beta} (h_{ik}^\beta h_{pl}^\beta h_{pj}^\alpha - h_{il}^\beta h_{pk}^\beta h_{pj}^\alpha) \\ &\quad - \sum_{p\beta} (h_{jk}^\beta h_{pl}^\beta h_{ip}^\alpha - h_{jl}^\beta h_{pk}^\beta h_{ip}^\alpha) - \sum_{p\beta} (h_{kp}^\beta h_{pl}^\beta h_{ij}^\alpha - h_{pl}^\beta h_{pk}^\beta h_{ij}^\alpha). \end{aligned}$$

引理 2.3 假设 $\varphi: M^n \rightarrow S^{n+p}(1)$ 是子流形, $V = V^\top + V^\perp = V^i e_i + V^\alpha e_\alpha$ 是变分向量场, 我们有变分公式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta^i}{\partial t} &= \sum_j \left(V_{,j}^i - L_j^i - \sum_\alpha h_{ij}^\alpha V^\alpha \right) \theta^j, \\ \frac{\partial h_{ij}^\alpha}{\partial t} &= V_{,ij}^\alpha + \sum_p h_{ij,p}^\alpha V^p + \sum_p h_{pj}^\alpha L_i^p + \sum_p h_{ip}^\alpha L_j^p - \sum_\beta h_{ij}^\beta L_\beta^\alpha + \sum_{p\beta} h_{ip}^\alpha h_{pj}^\beta V^\beta + \delta_{ij} V^\alpha. \end{aligned}$$

引理 2.4 符号同上, 我们有代数等式

$$\sum_{ijk} h_{ik}^\alpha h_{kj}^\alpha L_j^i = 0, \quad \sum_{\alpha\beta} h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta L_\alpha^\beta = 0, \quad \sum_{ij} h_{ij}^\alpha L_j^i = 0.$$

3 变分计算与例子

为了计算泛函 $W_{(n,F)}(\varphi)$ 的第一变分, 我们需要 2 个引理, 第 1 个引理是计算体积微元的变分公式, 第 2 个引理是计算几何量 ρ 的变分公式.

引理 3.1 假设 $\varphi: M^n \rightarrow S^{n+p}(1)$ 是一个子流形, 并且 $V = V^\top + V^\perp = V^i e_i + V^\alpha e_\alpha$ 是一个变分向量场. 我们用 $dv = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n$ 代表体积微元, 我们有

$$\frac{\partial dv}{\partial t} = \left(\sum_i V_{,i}^i - \sum_\alpha n H^\alpha V^\alpha \right) dv.$$

证明 利用引理 2.3, 我们有 $\frac{\partial}{\partial t}(\theta^i) = \sum_j (V_{,j}^i - L_j^i - \sum_\alpha h_{ij}^\alpha V^\alpha) \theta^j$. 因此,

$$\frac{\partial dv}{\partial t} = \sum_i \theta^1 \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial t}(\theta^i) \wedge \cdots \wedge \theta^n = \left(\sum_i V_{,i}^i - \sum_\alpha n H^\alpha V^\alpha \right) dv.$$

这样, 我们完成了引理 3.1 的证明. $\square$

引理 3.2 假设 $\varphi: M^n \rightarrow S^{n+p}(1)$ 是一个子流形, 并且 $V = V^\top + V^\perp = V^i e_i + V^\alpha e_\alpha$ 是一个变分向量场, 我们有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{ij\alpha} 2h_{ij}^\alpha V_{,ij}^\alpha - \sum_\alpha 2H^\alpha \Delta V^\alpha + \sum_{\alpha\beta} 2S_{\alpha\beta} V^\alpha - \sum_{\alpha\beta} 2S_{\alpha\beta} H^\beta V^\alpha + \sum_i \rho_{,i} V^i.$$

证明 根据函数 ρ, S 和 H 的定义, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) = \frac{\partial}{\partial t}(S) - \frac{\partial}{\partial t}(nH^2).$$

根据引理 2.3 和 2.4, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(S) &= 2 \sum_{ij\alpha} h_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial t}(h_{ij}^\alpha) \\ &= 2 \sum_{ij\alpha} h_{ij}^\alpha \left[V_{,ij}^\alpha + \sum_p h_{ij,p}^\alpha V^p + \sum_p h_{pj}^\alpha L_i^p + \sum_p h_{pi}^\alpha L_j^p - \sum_\beta h_{ij}^\beta L_\beta^\alpha \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p\beta} h_{ip}^\alpha h_{pj}^\beta V^\beta + \delta_{ij} V^\alpha \right] \\ &= 2 \sum_{ij\alpha} h_{ij}^\alpha V_{,ij}^\alpha + \sum_i S_{,i} V^i + \sum_{\alpha\beta} 2S_{\alpha\beta} V^\alpha + \sum_\alpha 2nH^\alpha V^\alpha. \end{aligned}$$

再次利用引理 2.3 和 2.4, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(nH^2) &= \sum_\alpha 2nH^\alpha \frac{\partial}{\partial t}H^\alpha \\ &= 2H^\alpha \sum_{i\alpha} \left[V_{,ii}^\alpha + \sum_p h_{ii,p}^\alpha V^p + \sum_p h_{pi}^\alpha L_i^p + \sum_p h_{pi}^\alpha L_i^p - \sum_\beta h_{ii}^\beta L_\beta^\alpha \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p\beta} h_{ip}^\alpha h_{pi}^\beta V^\beta + \delta_{ii} V^\alpha \right] \\ &= \sum_\alpha 2H^\alpha \Delta V^\alpha + \sum_i (nH^2)_{,i} V^i + \sum_{\alpha\beta} 2H^\alpha S_{\alpha\beta} V^\beta + \sum_\alpha 2nH^\alpha V^\alpha. \end{aligned}$$

因此,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{ij\alpha} 2h_{ij}^{\alpha} V_{,ij}^{\alpha} - \sum_{\alpha} 2H^{\alpha} \Delta V^{\alpha} + \sum_{\alpha\beta} 2S_{\alpha\beta\beta} V^{\alpha} - \sum_{\alpha\beta} 2S_{\alpha\beta} H^{\beta} V^{\alpha} + \sum_i \rho_{,i} V^i.$$

这样, 我们完成了引理 3.2 的证明. $\square$

利用引理 3.1 和 3.2, 我们可以证明定理 1.1.

定理 1.1 的证明 利用引理 3.1 和 3.2 以及 Stokes 分部积分定理, 我们计算得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W_{(n,F)}(\varphi_t) &= \int_{M_t} \left[F'(\rho) \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + F(\rho) \left(\sum_i V_{,i}^i - \sum_{\alpha} n H^{\alpha} V^{\alpha} \right) \right] dv \\ &= \int_{M_t} \left\{ F'(\rho) \left[\sum_{ij\alpha} 2h_{ij}^{\alpha} V_{,ij}^{\alpha} - \sum_{\alpha} 2H^{\alpha} \Delta V^{\alpha} + \sum_{\alpha\beta} 2S_{\alpha\beta\beta} V^{\alpha} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{\alpha\beta} 2S_{\alpha\beta} H^{\beta} V^{\alpha} + \sum_i \rho_{,i} V^i \right] + F(\rho) \left(\sum_i V_{,i}^i - \sum_{\alpha} n H^{\alpha} V^{\alpha} \right) \right\} dv \\ &= \int_{M_t} 2 \sum_{\alpha} \left[\sum_{ij} (F'(\rho) h_{ij}^{\alpha})_{,ji} - \Delta(F'(\rho) H^{\alpha}) + \sum_{\beta} S_{\alpha\beta\beta} F'(\rho) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} H^{\beta} F'(\rho) - \frac{n}{2} H^{\alpha} F(\rho) \right] V^{\alpha} dv, \end{aligned}$$

这样, 我们证明了定理 1.1. $\square$

例 3.1 对于任何的抽象函数 F , 全测地超曲面都是 $W_{(n,F)}$ -Willmore 型子流形; 全脐非全测地超曲面为 $W_{(n,F)}$ -Willmore 型子流形当且仅当抽象函数 F 满足 $F(0) = 0$.

例 3.2 维数为偶数 $n \equiv 0 \pmod{2}$ 的特殊超曲面

$$C_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} = S^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \times S^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \rightarrow S^{n+1}(1).$$

所有的主曲率为

$$k_1 = \cdots = k_{\frac{n}{2}} = 1, \quad k_{\frac{n}{2}+1} = \cdots = k_n = -1.$$

计算得到 $H = 0$, $S = n$, $P_3 = 0$, $\rho = n$, 代入方程 (1.2), 可得 $C_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ 对于所有的抽象函数 F 都是 $S^{n+1}(1)$ 的 $W_{(n,F)}$ -Willmore 型子流形.

例 3.3 对于含有参数 λ, μ , $0 < \lambda, \mu < 1$, $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ 的一族超曲面

$$S^m(\lambda) \times S^{n-m}(\mu) \rightarrow S^{n+1}(1), \quad 1 \leq m \leq n-1.$$

所有的主曲率为

$$k_1 = \cdots = k_m = \frac{\mu}{\lambda}, \quad k_{m+1} = \cdots = k_n = -\frac{\lambda}{\mu}.$$

那么 H, S, P_3, ρ 可以分别计算为

$$\begin{aligned} H &= \frac{m}{n} \frac{\mu}{\lambda} - \frac{(n-m)}{n} \frac{\lambda}{\mu}, \quad S = m \frac{\mu^2}{\lambda^2} + (n-m) \frac{\lambda^2}{\mu^2}, \\ P_3 &= m \frac{\mu^3}{\lambda^3} - (n-m) \frac{\lambda^3}{\mu^3}, \quad \rho = \frac{m(n-m)}{n} \left[\frac{\mu^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + 2 \right]. \end{aligned}$$

假设 $\frac{\mu}{\lambda} = x > 0$, 代入方程 (1.2), 那么 $W_{(n,F)}$ -Willmore 型子流形方程变为

$$2m(n-m)F'(\rho)x^6 - m[nF(\rho) - 2(n-m)F'(\rho)]x^4 \\ + (n-m)[nF(\rho) - 2mF'(\rho)]x^2 - 2m(n-m)F'(\rho) = 0.$$

通过对此方程的研究, 针对不同的函数 F , 可以得到特殊的 $W_{(n,F)}$ -Willmore 型子流形.

例 3.4 Clifford 环面^[16], $F(\rho) \equiv 1$,

$$C_{m,n-m} = S^m \left(\sqrt{\frac{m}{n}} \right) \times S^{n-m} \left(\sqrt{\frac{n-m}{n}} \right), \quad 1 \leq m \leq n-1$$

是极小子流形, 可以计算得 $H \equiv 0$, $S \equiv n$, $\rho \equiv n$. 假设 F_1 是另外一个不同于 F 的抽象函数, 如果某个环面 $C_{m,n-m}$ 是 $W_{(n,F_1)}$ -Willmore 型子流形, 由方程 (1.2), 我们知道 $F'_1(n) \left(\sqrt{\frac{(n-m)^3}{m}} - \sqrt{\frac{m^3}{n-m}} \right) = 0$. 因此, 我们可以断言: 如果 $F'_1(n) = 0$, 那么所有的 $C_{m,n-m}$ 都是 $W_{(n,F_1)}$ -Willmore 型子流形, 如果 $F'_1(n) \neq 0$, 那么某个 $C_{m,n-m}$ 是 $W_{(n,F_1)}$ -Willmore 型子流形当且仅当 $n \equiv 0 \pmod{2}$, $m = \frac{n}{2}$, $C_{m,n-m} = C_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.

例 3.5 经典 Willmore 环面^[6], $F(\rho) = \rho^{\frac{n}{2}}$,

$$W_{m,n-m} = S^m \left(\sqrt{\frac{n-m}{n}} \right) \times S^{n-m} \left(\sqrt{\frac{m}{n}} \right), \quad 1 \leq m \leq n-1$$

都是 $W_{(n, \frac{n}{2})}$ -Willmore 型子流形并且满足 $\rho = n$. 当某个 $W_{m,n-m}$ 极小时, 则必有 $n \equiv 0 \pmod{2}$, $m = \frac{n}{2}$ 且 $W_{m,n-m} = C_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$. 对于另一个不同于 F 的抽象函数 F_1 , 如果某个 $W_{m,n-m}$ 是 $W_{(n,F_1)}$ -Willmore 型子流形, 由方程 (1.2), 我们知道

$$F'_1(n)(2m-n) \left(\sqrt{\frac{m}{n-m}} + \sqrt{\frac{(n-m)}{m}} \right) - \frac{1}{2}F_1(n) \left(m\sqrt{\frac{m}{n-m}} - (n-m)\sqrt{\frac{(n-m)}{m}} \right) = 0.$$

特别地, 如果满足 $F'_1(n) \neq 0$ 和 $F'_1(n) - \frac{1}{2}F_1(n) = 0$, 那么所有的 $W_{m,n-m}$ 都是 $W_{(n,F_1)}$ -Willmore 型子流形.

例 3.6 满足 $\rho = n$ 的环面. 带有 2 个参数的环面 λ, μ , $0 < \lambda, \mu < 1$, $\lambda^2 + \mu^2 = 1$,

$$S^m(\lambda) \times S^{n-m}(\mu) \rightarrow S^{n+1}(1), \quad 1 \leq m \leq n-1.$$

所有的主曲率计算得

$$k_1 = \cdots = k_m = \frac{\mu}{\lambda}, \quad k_{m+1} = \cdots = k_n = -\frac{\lambda}{\mu}.$$

那么函数 ρ 为

$$\rho = \frac{m(n-m)}{n} \left[\frac{\mu^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + 2 \right].$$

假设 $\frac{\mu}{\lambda} = x > 0$, 那么

$$\rho = \frac{m(n-m)}{n} \left[x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \right].$$

如果 $\rho = n$, 那么

$$n = \frac{m(n-m)}{n} \left[x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \right].$$

求解方程得到

$$x_1 = \sqrt{\frac{n-m}{m}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{m}{n-m}}, \quad 1 \leq m \leq n-1.$$

因此

$$C_{m,n-m} : S^m\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right) \times S^{n-m}\left(\sqrt{\frac{n-m}{n}}\right) \rightarrow S^{n+1}(1), \quad 1 \leq m \leq n-1$$

和

$$W_{m,n-m} : S^m\left(\sqrt{\frac{n-m}{n}}\right) \times S^{n-m}\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right) \rightarrow S^{n+1}(1), \quad 1 \leq m \leq n-1$$

是满足 $\rho = n$ 的环面.

例 3.7 假设 (x, y, z) 是 R^3 的自然标架, $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ 是 R^5 的自然标架, 我们考虑如下的映射:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}yz, & u_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}xz, & u_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}xy, \\ u_4 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 - y^2), & u_5 &= \frac{1}{6}(x^2 + y^2 - 2z^2), \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3. \end{aligned}$$

此映射定义了一个等距嵌入 $x : RP^2 = S^2(\sqrt{3})/Z_2 \rightarrow S^4(1)$, 我们称为 Veronese 曲面. 从文献 [16] 中, 我们知道

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

计算得

$$\begin{aligned} H^3 = H^4 = 0, \quad S_{33} = S_{44} = \frac{2}{3}, \quad S = \rho = \frac{4}{3}, \\ S_{34} = S_{43} = 0, \quad S_{333} = S_{344} = S_{433} = S_{444} = 0. \end{aligned}$$

代入方程 (1.1), 我们断言: 对于任何的抽象函数 F , Veronese 曲面都是 $W_{(n,F)}$ -Willmore 型子流形.

4 Simons 型不等式与间隙现象

Simons 型积分不等式的建立和间隙现象的讨论需要一些引理. 我们从矩阵的一些基本事实开始. 对于一个 $n \times n$ 矩阵 A , 我们定义模长平方为

$$N(A) = \text{tr}(AA^T) = \text{tr}(A^T A) = \sum_{ij} a_{ij}^2.$$

下面的性质是显然的: 对于任何矩阵 A 都有 $N(A) \geq 0$, $N(A) = 0$ 当且仅当 $A \equiv 0$; 对于任意的矩阵 A 和正交矩阵 T 有 $N(A) = N(TAT^T) = N(TA)$; 对于任意的对称矩阵 A, B 有 $N(AB - BA) = 2\text{tr}(AABB - ABAB)$. 特别地, 对于第 1 节定义的矩阵, 我们有

$$\begin{aligned} N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) &= N((\hat{A}_\alpha + H^\alpha)A_\beta - A_\beta(\hat{A}_\alpha + H^\alpha)) = N(\hat{A}_\alpha A_\beta - A_\beta \hat{A}_\alpha) \\ &= N(\hat{A}_\alpha(\hat{A}_\beta + H^\beta) - (\hat{A}_\beta + H^\beta)\hat{A}_\alpha) = N(\hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta - \hat{A}_\beta \hat{A}_\alpha). \end{aligned}$$

引理 4.1 ^[16, 引理 1] 如果 A 和 B 都是对称矩阵, 那么

$$N(AB - BA) \leq 2N(A)N(B),$$

等号成立要么 A, B 其中之一为零矩阵, 要么 A 和 B 能同时用正交矩阵变换为下列矩阵的常数倍,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

进一步, 如果 B_1, B_2, B_3 是 $n \times n$ 对称矩阵, 并且满足

$$N(B_i B_j - B_j B_i) = 2N(B_i) \cdot N(B_j), \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

那么至少有一个矩阵 B_i 必须为零矩阵.

引理 4.2 对于函数 ρ , 我们有

$$\begin{aligned} \Delta \rho = & 2 \left(|\nabla h|^2 - n|\nabla \vec{H}|^2 + \sum_{ij\alpha} n h_{ij}^\alpha H_{,ij}^\alpha - \sum_{\alpha} n H^\alpha \Delta H^\alpha \right. \\ & \left. + n\rho + \sum_{\alpha\beta} n H^\alpha S_{\alpha\beta\beta} - \sum_{\alpha\beta} (S_{\alpha\beta})^2 - \sum_{\alpha \neq \beta} N(\hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta - \hat{A}_\beta \hat{A}_\alpha) \right), \end{aligned}$$

此处 $|\nabla h|^2 = \sum_{ijk\alpha} (h_{ij,k}^\alpha)^2$ 和 $|\nabla \vec{H}|^2 = \sum_{i\alpha} (H_{,i}^\alpha)^2$.

证明 由函数 ρ 和 Laplace 算子的定义, 我们有

$$\begin{aligned} \Delta \rho = & \sum_k \left(\sum_{ij\alpha} (h_{ij}^\alpha)^2 - \sum_{\alpha} n (H^\alpha)^2 \right)_{,kk} \\ = & \sum_k \left(\sum_{ij\alpha} 2h_{ij}^\alpha h_{ij,k}^\alpha - \sum_{\alpha} 2n H^\alpha H_{,k}^\alpha \right)_{,k} \\ = & \sum_k \left[\sum_{ij\alpha} 2(h_{ij,k}^\alpha)^2 + \sum_{ij\alpha} 2h_{ij}^\alpha h_{ij,kk}^\alpha - \sum_{\alpha} 2n (H_{,k}^\alpha)^2 - \sum_{\alpha} 2n H^\alpha H_{,kk}^\alpha \right] \\ = & 2 \left[|\nabla h|^2 - n|\nabla \vec{H}|^2 - \sum_{\alpha} n H^\alpha \Delta H^\alpha + (T_1) \sum_{ijk\alpha} h_{ij}^\alpha h_{ij,kk}^\alpha \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

对于项 $T_1 = \sum_{ijk\alpha} h_{ij}^\alpha h_{ij,kk}^\alpha$, 利用引理 2.1, 得到

$$\begin{aligned} T_1 = & \sum_{ijk\alpha} h_{ij}^\alpha h_{ij,kk}^\alpha = \sum_{ijk\alpha} h_{ij}^\alpha h_{ik,jk}^\alpha = \sum_{ijk\alpha} h_{ij}^\alpha (h_{ik,jk}^\alpha - h_{ik,kj}^\alpha + h_{ik,kj}^\alpha) \\ = & \sum_{ijk\alpha} h_{ij}^\alpha h_{kk,ij}^\alpha + \sum_{ijk\alpha} h_{ij}^\alpha (h_{ik,jk}^\alpha - h_{ik,kj}^\alpha) = \sum_{ij\alpha} n h_{ij}^\alpha H_{,ij}^\alpha + (T_2) \sum_{ijk\alpha} h_{ij}^\alpha (h_{ik,jk}^\alpha - h_{ik,kj}^\alpha). \end{aligned} \quad (4.2)$$

进一步, 对于项 $T_2 = \sum_{ijk\alpha} h_{ij}^\alpha (h_{ik,jk}^\alpha - h_{ik,kj}^\alpha)$, 利用引理 2.2, 我们有

$$T_2 = \sum_{ijk\alpha} h_{ij}^\alpha (h_{ik,jk}^\alpha - h_{ik,kj}^\alpha)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{ijk\alpha} h_{ij}^\alpha \left[-(\delta_{ij} h_{kk}^\alpha - \delta_{ik} h_{jk}^\alpha) - (\delta_{jk} h_{ik}^\alpha - \delta_{kk} h_{ij}^\alpha) - \sum_{p\beta} (h_{ij}^\beta h_{pk}^\beta h_{pk}^\alpha - h_{ik}^\beta h_{pj}^\beta h_{pk}^\alpha) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{p\beta} (h_{jk}^\beta h_{pk}^\beta h_{ip}^\alpha - h_{kk}^\beta h_{pj}^\beta h_{ip}^\alpha) - \sum_{p\beta} (h_{jp}^\alpha h_{pk}^\beta h_{ik}^\beta - h_{pk}^\alpha h_{pj}^\beta h_{ik}^\beta) \right] \\
&= n\rho + \sum_{\alpha\beta} nH^\alpha S_{\alpha\beta\beta} - \sum_{\alpha\beta} (S_{\alpha\beta})^2 + 2 \sum_{\alpha \neq \beta} [\text{tr}(A_\alpha A_\beta A_\alpha A_\beta) - \text{tr}(A_\alpha A_\alpha A_\beta A_\beta)] \\
&= n\rho + \sum_{\alpha\beta} nH^\alpha S_{\alpha\beta\beta} - \sum_{\alpha\beta} (S_{\alpha\beta})^2 - \sum_{\alpha \neq \beta} N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) \\
&= n\rho + \sum_{\alpha\beta} nH^\alpha S_{\alpha\beta\beta} - \sum_{\alpha\beta} (S_{\alpha\beta})^2 - \sum_{\alpha \neq \beta} N(\hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta - \hat{A}_\beta \hat{A}_\alpha). \tag{4.3}
\end{aligned}$$

将 (4.3) 代入 (4.2), 得

$$T_1 = \sum_{ij\alpha} nh_{ij}^\alpha H_{,ij}^\alpha + n\rho + \sum_{\alpha\beta} nH^\alpha S_{\alpha\beta\beta} - \sum_{\alpha\beta} (S_{\alpha\beta})^2 - \sum_{\alpha \neq \beta} N(\hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta - \hat{A}_\beta \hat{A}_\alpha). \tag{4.4}$$

将 (4.4) 代入 (4.1), 最终得到

$$\begin{aligned}
\Delta\rho = 2 \bigg(&|\nabla h|^2 - n|\nabla \vec{H}|^2 + \sum_{ij\alpha} nh_{ij}^\alpha H_{,ij}^\alpha - \sum_{\alpha} nH^\alpha \Delta H^\alpha \\
&+ n\rho + \sum_{\alpha\beta} nH^\alpha S_{\alpha\beta\beta} - \sum_{\alpha\beta} (S_{\alpha\beta})^2 - \sum_{\alpha \neq \beta} N(\hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta - \hat{A}_\beta \hat{A}_\alpha) \bigg).
\end{aligned}$$

这样, 我们完成了引理 4.2 的证明. $\square$

引理 4.3 Huisken 的估计^[17]

$$|\nabla h|^2 \geq \frac{3n^2}{n+2} |\nabla \vec{H}|^2 \geq n |\nabla \vec{H}|^2,$$

并且 $|\nabla h|^2 = n |\nabla \vec{H}|^2$ 当且仅当 $\nabla h = 0$.

证明 我们分解 ∇h 为

$$h_{ij,k}^\alpha = E_{ijk}^\alpha + F_{ijk}^\alpha,$$

此处

$$E_{ijk}^\alpha = \frac{n}{n+2} (H_{,i}^\alpha \delta_{jk} + H_{,j}^\alpha \delta_{ik} + H_{,k}^\alpha \delta_{ij}), \quad F_{ijk}^\alpha = h_{ij,k}^\alpha - E_{ijk}^\alpha.$$

通过直接的计算, 得到

$$|E|^2 = \frac{3n^2}{n+2} |\nabla \vec{H}|^2, \quad \langle E, F \rangle = 0.$$

利用三角不等式, 得

$$|\nabla h|^2 \geq |E|^2 = \frac{3n^2}{n+2} |\nabla \vec{H}|^2 \geq n |\nabla \vec{H}|^2.$$

如果 $|\nabla h|^2 = n |\nabla \vec{H}|^2$, 那么所有的不等式都变为等式, $F_{ijk}^\alpha = 0$, $\nabla \vec{H} = 0$ 和 $E_{ijk}^\alpha = 0$, 因此 $\nabla h = 0$. 这样, 我们完成了引理 4.3 的证明. $\square$

引理 4.4 对于函数 $F(\rho)$, 我们有

$$\Delta F(\rho) = F''(\rho) |\nabla \rho|^2 + F'(\rho) (|\nabla h|^2 - n |\nabla \vec{H}|^2) + n^2 H^2 F(\rho) + 2n\rho F'(\rho)$$

$$\begin{aligned}
 & -2F'(\rho) \left[n \sum_{\alpha\beta} \hat{S}_{\alpha\beta} H^\alpha H^\beta + \sum_{\alpha\beta} (\hat{S}_{\alpha\beta})^2 + \sum_{\alpha \neq \beta} N(\hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta - \hat{A}_\beta \hat{A}_\alpha) \right] \\
 & + 2n \left[\sum_{ij\alpha} F'(\rho) h_{ij}^\alpha H_{,ij}^\alpha - \sum_{\alpha} F'(\rho) H^\alpha \Delta H^\alpha \right. \\
 & \left. + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (S_{\alpha\beta\beta} - S_{\alpha\beta} H^\beta) F'(\rho) H^\alpha - \sum_{\alpha} \frac{n}{2} (H^\alpha)^2 F(\rho) \right].
 \end{aligned}$$

证明 我们知道

$$\Delta F(\rho) = F''(\rho) |\nabla \rho|^2 + F'(\rho) \Delta \rho.$$

利用引理 4.2, 很容易得到等式. □

引理 4.5 对于满足 $F'(\rho) \geq 0$ 的函数 $F(\rho)$, 我们有

$$\begin{aligned}
 \Delta F(\rho) & \geq [F''(\rho) |\nabla \rho|^2 + F'(\rho) (|\nabla h|^2 - n |\nabla \vec{H}|^2)] \\
 & + \left[n H^2 (n F(\rho) - 2 \rho F'(\rho)) - 2 \left(2 - \frac{1}{p} \right) \rho \left(\rho - \frac{n}{2 - \frac{1}{p}} \right) F'(\rho) \right] \\
 & + 2n \left[\sum_{ij\alpha} F'(\rho) h_{ij}^\alpha H_{,ij}^\alpha - \sum_{\alpha} F'(\rho) H^\alpha \Delta H^\alpha \right. \\
 & \left. + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (S_{\alpha\beta\beta} - S_{\alpha\beta} H^\beta) F'(\rho) H^\alpha - \sum_{\alpha} \frac{n}{2} (H^\alpha)^2 F(\rho) \right].
 \end{aligned}$$

当 $p \geq 2$, $\rho \equiv \rho_0 = \text{constant} > 0$, $F'(\rho_0) > 0$ 时, 如果 “ $\geq$ ” 变为 “ $=$ ”, 我们有 $p = 2$, $\nabla h \equiv 0$, $H \equiv 0$, $\rho \equiv S \equiv \rho_0$ 并且

$$A_{n+1} = \hat{A}_{n+1} = \pm \frac{\sqrt{\rho_0}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad A_{n+2} = \hat{A}_{n+2} = \pm \frac{\sqrt{\rho_0}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

证明 因为 $F'(\rho) \geq 0$, 利用引理 4.1 和 4.4, 我们有

$$\begin{aligned}
 \Delta F(\rho) & \geq F''(\rho) |\nabla \rho|^2 + F'(\rho) (|\nabla h|^2 - n |\nabla \vec{H}|^2) + n^2 H^2 F(\rho) + 2n \rho F'(\rho) \\
 & - 2F'(\rho) (T_1) \left[\sum_{\alpha\beta} n \hat{S}_{\alpha\beta} H^\alpha H^\beta + \sum_{\alpha\beta} (\hat{S}_{\alpha\beta})^2 + \sum_{\alpha \neq \beta} 2 \hat{S}_{\alpha\alpha} \hat{S}_{\beta\beta} \right] \\
 & + 2n \left[\sum_{ij\alpha} F'(\rho) h_{ij}^\alpha H_{,ij}^\alpha - \sum_{\alpha} F'(\rho) H^\alpha \Delta H^\alpha \right. \\
 & \left. + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (S_{\alpha\beta\beta} - S_{\alpha\beta} H^\beta) F'(\rho) H^\alpha - \sum_{\alpha} \frac{n}{2} (H^\alpha)^2 F(\rho) \right]. \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

对于项 T_1 , 对角化 $(\hat{S}_{\alpha\beta})$ 使得 $\hat{S}_{\alpha\beta} = 0$, $\alpha \neq \beta$, 我们有

$$T_1 = (T_2) \left[\sum_{\alpha} n (\hat{S}_{\alpha\alpha}) (H^\alpha)^2 \right] + (T_3) \left[\sum_{\alpha} (\hat{S}_{\alpha\alpha})^2 + \sum_{\alpha \neq \beta} 2 \hat{S}_{\alpha\alpha} \hat{S}_{\beta\beta} \right]. \tag{4.6}$$

对于项 T_2 , 我们有

$$T_2 = \sum_{\alpha} n(\hat{S}_{\alpha\alpha})(H^{\alpha})^2 \leq \sum_{\alpha} n(\hat{S}_{\alpha\alpha}) \sum_{\beta} (H^{\beta})^2 \leq n\rho H^2, \quad (4.7)$$

对于项 T_3 , 我们有

$$\begin{aligned} T_3 &= \sum_{\alpha} (\hat{S}_{\alpha\alpha})^2 + \sum_{\alpha \neq \beta} 2\hat{S}_{\alpha\alpha}\hat{S}_{\beta\beta} = \sum_{\alpha} (\hat{S}_{\alpha\alpha})^2 + \sum_{\alpha \neq \beta} \hat{S}_{\alpha\alpha}\hat{S}_{\beta\beta} + \sum_{\alpha \neq \beta} \hat{S}_{\alpha\alpha}\hat{S}_{\beta\beta} \\ &= \left(\sum_{\alpha} \hat{S}_{\alpha\alpha} \right)^2 + \sum_{\alpha=1}^p \hat{S}_{\alpha\alpha} \left(\sum_{\beta} \hat{S}_{\beta\beta} - \hat{S}_{\alpha\alpha} \right) = \rho^2 + \rho^2 - \frac{1}{p} \cdot p \cdot \sum_{\alpha=1}^p \hat{S}_{\alpha\alpha}^2 \\ &\leq 2\rho^2 - \frac{1}{p} \left(\left(\sum_{\alpha} \hat{S}_{\alpha\alpha} \right)^2 \right) = \left(2 - \frac{1}{p} \right) \rho^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

将 (4.7) 和 (4.8) 代入 (4.6), 我们有

$$T_1 \leq n\rho H^2 + \left(2 - \frac{1}{p} \right) \rho^2. \quad (4.9)$$

将 (4.9) 代入 (4.5), 得到

$$\begin{aligned} \Delta F(\rho) &\geq [F''(\rho)|\nabla\rho|^2 + F'(\rho)(|\nabla h|^2 - n|\nabla\vec{H}|^2)] \\ &\quad + \left[nH^2(nF(\rho) - 2\rho F'(\rho)) - 2\left(2 - \frac{1}{p} \right) \rho \left(\rho - \frac{n}{2 - \frac{1}{p}} \right) F'(\rho) \right] \\ &\quad + 2n \left[\sum_{ij\alpha} F'(\rho) h_{ij}^{\alpha} H_{,ij}^{\alpha} - \sum_{\alpha} F'(\rho) H^{\alpha} \Delta H^{\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (S_{\alpha\beta\beta} - S_{\alpha\beta} H^{\beta}) F'(\rho) H^{\alpha} - \sum_{\alpha} \frac{n}{2} (H^{\alpha})^2 F(\rho) \right]. \end{aligned}$$

当 $p \geq 2$, $\rho \equiv \rho_0 = \text{constant} > 0$, $F'(\rho_0) > 0$, 如果 “ $\geq$ ” 变成 “ $=$ ”, 根据证明过程可得

$$|\nabla h|^2 = n|\nabla\vec{H}|^2, \quad \hat{S}_{\alpha\alpha} = \frac{\rho_0}{p}, \quad N(\hat{A}_{\alpha}\hat{A}_{\beta} - \hat{A}_{\beta}\hat{A}_{\alpha}) = 2N(\hat{A}_{\alpha})N(\hat{A}_{\beta}), \quad \forall \alpha, \beta \in [n+1, n+p].$$

利用引理 4.1, 我们有

$$\nabla h = 0, \quad p = 2, \quad H \equiv 0, \quad \rho = S \equiv \rho_0 > 0, \quad A_{\alpha} = \hat{A}_{\alpha} \neq 0, \quad \alpha \in [n+1, n+2].$$

再次利用引理 4.1, 我们可以决定出 A_{n+1}, A_{n+2} . 这样, 我们完成了引理 4.5 的证明. $\square$

现在我们可以证明定理 1.2.

定理 1.2 的证明 在流形 M 上积分引理 4.4 中的表达式, 可得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M F''(\rho)|\nabla\rho|^2 + F'(\rho)(|\nabla h|^2 - n|\nabla\vec{H}|^2) + n^2 H^2 F(\rho) + 2n\rho F'(\rho) \\ &\quad - 2F'(\rho) \left[n \sum_{\alpha\beta} \hat{S}_{\alpha\beta} H^{\alpha} H^{\beta} + \sum_{\alpha\beta} (\hat{S}_{\alpha\beta})^2 + \sum_{\alpha \neq \beta} N(\hat{A}_{\alpha}\hat{A}_{\beta} - \hat{A}_{\beta}\hat{A}_{\alpha}) \right] \\ &\quad + 2n \left[\sum_{ij\alpha} F'(\rho) h_{ij}^{\alpha} H_{,ij}^{\alpha} - \sum_{\alpha} F'(\rho) H^{\alpha} \Delta H^{\alpha} \right] \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (S_{\alpha\beta\beta} - S_{\alpha\beta} H^{\beta}) F'(\rho) H^{\alpha} - \sum_{\alpha} \frac{n}{2} (H^{\alpha})^2 F(\rho) \Big].$$

利用定理 1.1, 可知

$$\sum_{ij} (F'(\rho) h_{ij}^{\alpha})_{,ij} - \Delta(F'(\rho) H^{\alpha}) + \sum_{\beta} (S_{\alpha\beta\beta} - S_{\alpha\beta} H^{\beta}) F'(\rho) - \frac{n}{2} F(\rho) H^{\alpha} = 0.$$

利用 Stokes 分部积分定理, 可得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M F''(\rho) |\nabla \rho|^2 + F'(\rho) (|\nabla h|^2 - n |\nabla \vec{H}|^2) + n^2 H^2 F(\rho) + 2n\rho F'(\rho) \\ &\quad - 2F'(\rho) \left[n \sum_{\alpha\beta} \hat{S}_{\alpha\beta} H^{\alpha} H^{\beta} + \sum_{\alpha\beta} (\hat{S}_{\alpha\beta})^2 + \sum_{\alpha \neq \beta} N(\hat{A}_{\alpha} \hat{A}_{\beta} - \hat{A}_{\beta} \hat{A}_{\alpha}) \right]. \end{aligned}$$

进一步, 如果 $F'(\rho) \geq 0$, 利用引理 4.5, 可得

$$\begin{aligned} &\int_M 2 \left(2 - \frac{1}{p} \right) \rho \left(\rho - \frac{n}{2 - \frac{1}{p}} \right) F'(\rho) \\ &\geq \int_M F''(\rho) |\nabla \rho|^2 + F'(\rho) (|\nabla h|^2 - n |\nabla \vec{H}|^2) + n H^2 (n F(\rho) - 2\rho F'(\rho)). \end{aligned}$$

这样, 我们完成了定理 1.2 的证明. $\square$

为了证明定理 1.3, 我们需要引用 Chern 等人^[16]的 2 个重要结论. 对于超曲面, 我们选择一个特殊的标架场使得 $h_{ij} = 0, \forall i \neq j, h_i = h_{ii}$.

引理 4.6^[16, 引理 3] 令 $x: M^n \rightarrow S^{n+1}(1)$ 是满足 $\nabla h \equiv 0$ 的紧致无边超曲面, 那么存在 2 种情形.

情形 1 $h_1 = \cdots = h_n = \lambda = \text{constant}$, 并且 M 是全脐 ($\lambda > 0$) 或者全测地 ($\lambda = 0$) 的;

情形 2 $h_1 = \cdots = h_m = \lambda = \text{constant} > 0, h_{m+1} = \cdots = h_n = -\frac{1}{\lambda}, 1 \leq m \leq n-1$, 并且 M 是 2 个流形的 Riemann 乘积 $M_1 \times M_2$, 此处 $M_1 = S^m(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}})$, $M_2 = S^{n-m}(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}})$.

引理 4.7^{[文献[16]中的主定理]} S^4 中的 Veronese 曲面和 S^{n+1} 中的 Clifford 环面 $C_{m,n-m}, 1 \leq m \leq n-1$ 是 $n+p$ 维单位球面 $S^{n+p}(1)$ 中唯一满足 $S = \frac{n}{2-\frac{1}{p}}$ 的 n 维紧致无边的极小子流形 ($\vec{H} \equiv 0$).

现在我们证明定理 1.3.

定理 1.3 的证明 我们关注定理 1.3 的情形 (1) 和 (3), 剩余的情形可以通过类似的讨论得到.

(1) 当 $p = 1$ 并且函数在区间 $(0, n]$ 满足 $F'' \geq 0, F' > 0, nF - 2uF' \geq 0$ 时, 由等式 (1.3), 我们有

$$\begin{aligned} &\int_M 2\rho(\rho - n)F'(\rho)dv \\ &= \int_M [F''(\rho)|\nabla \rho|^2 + F'(\rho)(|\nabla h|^2 - n|\nabla H|^2) \\ &\quad + nH^2(nF(\rho) - 2\rho F'(\rho))]dv \geq 0. \end{aligned}$$

如果 $0 \leq \rho \leq n$, 我们有估计

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_M 2\rho(\rho - n)F'(\rho)dv \\ &= \int_M [F''(\rho)|\nabla \rho|^2 + F'(\rho)(|\nabla h|^2 - n|\nabla H|^2)]dv \end{aligned}$$

$$+ nH^2(nF(\rho) - 2\rho F'(\rho))dv \geq 0. \quad (4.10)$$

因此

$$\rho = 0 \text{ 或者 } \rho = n.$$

(i) 对于 $\rho = 0$, 代入 (4.10), 我们有

$$0 = \int_M [F'(0)(|\nabla h|^2 - n|\nabla H|^2) + n^2 H^2 F(0)] dv \geq 0.$$

(a) 如果 $F(0) = 0$, 那么 M 是全脐的; (b) 如果 $F(0) \neq 0$, 那么 $H = S = \rho = 0$ 并且 M 是全测地的.

(ii) 对于 $\rho = n$, 代入 (4.10), 我们有

$$0 = \int_M [F'(n)(|\nabla h|^2 - n|\nabla H|^2) + n^2 H^2 (F(n) - 2F'(n))] dv.$$

(a) 如果 $F(n) - 2F'(n) = 0$, 那么 $\nabla h = 0$, 利用引理 4.6, 我们知道 M 是满足 $\rho = n$ 的环面, 由例 3.6, M 要么是 Clifford 环面要么是经典 Willmore 环面. 如果 M 是 Clifford 环面, 由例 3.4, 我们知 $n \equiv 0 \pmod{2}$, $M = C_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$; 如果 M 是经典 Willmore 环面, 由例 3.5, 我们知道 $M = W_{m, n-m}$ 并且总是 $W_{(n, F)}$ -Willmore 型子流形. 实际上, 当 $n \equiv 0 \pmod{2}$ 时, 我们有 $C_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} = W_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$, 因此我们可以包括 Clifford 环面情形到经典 Willmore 环面情形. 我们断言: 当 $\rho = n$ 时, 那么 $M = W_{m, n-m}$; (b) 如果 $F(n) - 2F'(n) \neq 0$, 那么 $H = 0$, $S = \rho = n$, 利用引理 4.7, 我们知道 $M = C_{m, n-m}$, 但是 M 是 $W_{(n, F)}$ -Willmore 型子流形并且满足 $F'(n) > 0$, 由例 3.6, 我们知道 $n \equiv 0 \pmod{2}$ 并且 $M = C_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.

(2) 当 $p \geq 2$ 并且函数在区间 $(0, \frac{n}{2-\frac{1}{p}}]$ 上满足 $F'' \geq 0$, $F' > 0$, $nF - 2uF' \geq 0$ 时, 由不等式 (1.4), 我们有

$$\begin{aligned} \int_M 2\left(2 - \frac{1}{p}\right)\rho\left(\rho - \frac{n}{2 - \frac{1}{p}}\right)F'(\rho)dv &\geq \int_M [F''(\rho)|\nabla \rho|^2 + F'(\rho)(|\nabla h|^2 - n|\nabla \vec{H}|^2) \\ &\quad + nH^2(nF(\rho) - 2\rho F'(\rho))]dv \geq 0. \end{aligned}$$

如果 $0 \leq \rho \leq \frac{n}{2-\frac{1}{p}}$, 可得估计

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_M 2\left(2 - \frac{1}{p}\right)\rho\left(\rho - \frac{n}{2 - \frac{1}{p}}\right)F'(\rho)dv \\ &\geq \int_M [F''(\rho)|\nabla \rho|^2 + F'(\rho)(|\nabla h|^2 - n|\nabla \vec{H}|^2) \\ &\quad + nH^2(nF(\rho) - 2\rho F'(\rho))]dv \geq 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

因此

$$\rho = 0 \text{ 或者 } \rho = \frac{n}{2 - \frac{1}{p}}.$$

(i) 对于 $\rho = 0$, 代入 (4.11), 可得

$$0 = \int_M [F'(0)(|\nabla h|^2 - n|\nabla \vec{H}|^2) + n^2 H^2 F(0)] dv.$$

(a) 如果 $F(0) = 0$, 那么 M 是全脐的; (b) 如果 $F(0) \neq 0$, 那么 $H = S = \rho = 0$ 并且 M 是全测地的.

(ii) 对于 $\rho = \frac{n}{2-\frac{1}{p}}$, 代入 (4.11), 可得

$$0 = \int_M \left[F' \left(\frac{n}{2-\frac{1}{p}} \right) (|\nabla h|^2 - n|\nabla \vec{H}|^2) + nH^2 \left(nF \left(\frac{n}{2-\frac{1}{p}} \right) - 2\frac{n}{2-\frac{1}{p}} F' \left(\frac{n}{2-\frac{1}{p}} \right) \right) \right] dv.$$

利用引理 4.1、4.5、4.7 和例 3.5, 我们有 $n = p = 2$, $H = 0$, $S = \rho = \frac{4}{3}$ 并且 M 是 Veronese 曲面. 这样我们完成了定理 1.3 的证明. $\square$

致谢 作者衷心感谢审稿人的有益建议, 感谢李海中教授的指导.

参考文献

- 1 Chen B Y. Some conformal invariants of submanifolds and their applications. *Boll Unione Mat Ital*, 1974, 10: 380–385
- 2 Pedit F J, Willmore T J. Conformal geometry. *Atti Semin Mat Fis Univ Modena*, 1988, 36: 237–245
- 3 Willmore F J. *Total Curvature in Riemannian Geometry*. Chichester: Ellis Horwood Limited, 1982
- 4 Willmore F J. *Riemannian Geometry*. Oxford: Clarendon Press, 1993
- 5 Marques F C, Neves A. Min-max theory and the Willmore conjecture. *Ann Math*, 2014, 179: 683–782
- 6 Li H Z. Willmore hypersurfaces in a sphere. *Asian J Math*, 2001, 5: 365–378
- 7 Li H Z. Willmore surfaces in a sphere. *Ann Global Anal Geom*, 2002, 21: 203–213
- 8 Li H Z. Willmore submanifolds in a sphere. *Math Res Lett*, 2002, 9: 771–790
- 9 Guo Z. Willmore submanifolds in the unit sphere. *Collect Math*, 2004, 55: 279–287
- 10 Hu Z J, Li H Z. Willmore submanifolds in Riemannian manifolds. In: *Proceedings of the Workshop, Contem Geom and Related Topics*. Singapore: World Scientific, 2005, 251–275
- 11 Guo Z, Li H Z, Wang C P. The second variation of formula for Willmore submanifolds in S^n . *Results Math*, 2001, 40: 205–225
- 12 Cai M. L^p Willmore functionals. *Proc Amer Math Soc*, 1999, 127: 569–575
- 13 Guo Z, Li H Z. A variational problem for submanifolds in a sphere. *Monatsh Math*, 2007, 152: 295–302
- 14 Xu H W, Yang D Y. The gap phenomenon for extremal submanifolds in a sphere. *Differential Geom Appl*, 2011, 29: 26–34
- 15 Wu L. A class of variational problems for submanifolds in a space form. *Houston J Math*, 2009, 35: 435–450
- 16 Chern S S, do Carmo M, Kobayashi S. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length. In: *Functional Analysis and Related Fields*. Berlin: Springer-Verlag, 1970, 59–75
- 17 Huisken G. Flow by mean curvature of convex surfaces in to shperes. *J Differential Geom*, 1984, 20: 237–266

Variational problem of an abstract Willmore type functional of sub-manifold in unit sphere

LIU Jin

Abstract For an n -dimensional sub-manifold in unit sphere, we introduce an abstract Willmore type called $W_{(n,F)}$ -Willmore functional, which generalizes the well-known classic Willmore functional. Its critical point is called the $W_{(n,F)}$ -Willmore sub-manifold, for which the variational equation and the Simons' type integral inequalities are obtained. Moreover, for some particular functions F , we construct a few examples of $W_{(n,F)}$ -Willmore sub-manifold. What's more important, a gap phenomenon characterization is given by use of Simons' type integral formula.

Keywords $W_{(n,F)}$ -Willmore sub-manifold, Simons' type inequality, gap phenomenon

MSC(2010) 53C42, 53A10

doi: 10.1360/012014-67