综 述

平均采样定理

献给徐利治教授 95 华诞

霍海叶, 孙文昌*

南开大学数学科学学院, 天津 300071

E-mail: haiye.09@163.com, sunwch@nankai.edu.cn

收稿日期: 2015-01-16; 接受日期: 2015-03-20; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371200) 资助项目

摘要 采样定理是信号分析中的基本工具之一, 广泛应用于数字信号处理、无线通信等很多领域. 近年来, 经典的 Shannon 采样定理被从频谱有限函数空间推广到更一般的平移不变子空间, 采样方法也从逐点取值推广到平均采样和多通道采样等. 本文简要回顾采样定理的发展过程, 重点介绍一些最新研究进展, 包括平均采样、多通道采样和随机过程采样等, 以及混淆误差和截断误差等重构误差估计.

关键词 平均采样 误差估计 框架 平移不变子空间 频谱有限函数

MSC (2010) 主题分类 94A20, 42C15

1 引言

采样定理是现代脉冲编码调制通信系统的理论基础, 也是信号分析中最强有力的基本工具之一. 自从经典的 Shannon 采样定理 (1949) 发表以来, 采样定理越来越引起人们的关注. 所谓采样, 指的是在模拟信号和数字信号转换过程中, 以一定时间间隔对时间连续信号进行取值的过程. 采样定理研究的问题是, 当离散采样点列 $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ 和时间连续信号 (函数) f 满足什么条件时, 可以从采样值 $\{f(x_n) : n \in \mathbb{Z}\}$ 完全重构这个信号, 即存在一系列函数 $\{S_n : n \in \mathbb{Z}\}$, 使得

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x_n) S_n(x).$$

为了使采样值有意义, 通常假设 f 是连续函数. 显然, 连续性本身并不能保证可以从采样值来恢复信号. 实际应用中, 通常假设信号频谱有限或者属于某个平移不变子空间.

采样定理有许多不同的分类. 根据信号类型可以大致分为两类: 一类是确定性信号的采样定理; 一类是随机信号的采样定理. 根据采样点间隔的不同, 可以分为规则 (等距) 采样和不规则采样. 根据信号所在的函数空间, 分为频谱有限函数的采样定理和一般平移不变子空间上的采样定理等.

首先, 回顾一下频谱有限函数的 Shannon 采样定理.

定理 1.1 ^[1] 对于任意 $f \in B_\Omega := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp } \hat{f} \subset [-\Omega, \Omega]\}$, 有

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega x - n\pi)}{\Omega x - n\pi}, \quad (1.1)$$

其中上式右端级数在 $L^2(\mathbb{R})$ 中收敛, 并且在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

历史上关于采样定理的研究可以追溯到 Cauchy 和 Borel 等人的工作. 上述结果在很多文献中也被称为 Whittaker-Kotelnikov-Shannon 采样定理或 Nyquist-Shannon 采样定理. 有关这方面的详细介绍, 请参见文献 [2].

在定理 1.1 中, 采样周期为 $T = \pi/\Omega$, 采样频率为 $2\pi/T = 2\Omega$, 称此频率为 Nyquist 频率, 它正好是信号最大频率的两倍. 如果降低采样频率, 则不能保证由采样值重构原始信号, 反例如下:

设采样频率 $2\Omega' < 2\Omega$, $\Omega' > 0$. 令

$$f(x) = \frac{\sin \Omega' x \sin(\Omega - \Omega')x}{x},$$

则 $f(x)$ 是一个解析函数并且 $|f(x)| \leq C e^{\Omega|x|}$. 由 Paley-Wiener 定理, $f \in B_\Omega$. 但

$$f\left(\frac{n\pi}{\Omega'}\right) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

因此, 不能由 $f(n\pi/\Omega')$ 重构 $f(x)$.

上述例子说明, 为了重构频谱有限信号, 采样频率必须大于或等于信号频率的两倍.

尽管频谱有限是一个非常有用的假设, 并且有关这方面的结果也很多, 但它并不总是与实际信号相匹配. 由于非零频谱有限信号可以看作解析函数在实轴上的限制, 因此, 它必然是时域无限的. 而工程中遇到的很多信号是时域有限的, 这促使人们考虑其他的信号模型, 如平移不变子空间上的采样定理 (参见文献 [3, 4]).

给定函数 $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, φ 的整平移在 $L^2(\mathbb{R})$ 中线性张成的闭子空间记为

$$V(\varphi) = \overline{\text{span}}\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}. \quad (1.2)$$

一般地, 对任意的 $L \geq 1$, 由 $L^2(\mathbb{R})$ 中 r 个函数 $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ 的整平移所生成的平移不变子空间为

$$V(\Phi) = \overline{\text{span}}\{\varphi_i(L \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq r\}. \quad (1.3)$$

显然, 当 $L = r = 1$ 时, (1.3) 变成 (1.2). 而当 φ_i 取为 sinc 函数时, $V(\Phi)$ 即为频谱有限函数空间.

可以证明, 当 $V(\Phi)$ 的生成函数 $\{\varphi_i : 1 \leq i \leq r\}$ 和采样点列 $\{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 满足一定条件时, 存在函数列 $\{S_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset V(\Phi)$, 使得对任意 $f \in V(\Phi)$, 有

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x_k) S_k(x), \quad (1.4)$$

上式在 $L^2(\mathbb{R})$ 中收敛并在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛. 有关上式成立的具体条件, 请参见文献 [5–12].

在很多情形下, (1.4) 中的函数 S_k 并不具有紧支集. 这意味着, 为了计算信号在某一点或者某段时间内的值, 必须知道信号在整个时间域上的无穷多个采样值. 由于硬件设备只能计算有限级数, 这就不可避免地带来截断误差; 另一方面, 应用中经常遇到的是局部采样: 很多情形下并不需要知道信号在整个定义域上的取值, 而是关心它在某个有限时间段内的取值 (如一段音乐或视频). 因此, 如果能够利用信号在某段时间内的有限多个采样值精确重构它在该段时间内的函数值, 则能够有效地消除截断误差. 显然, 局部采样更能反映实际需要, 能够避免应用传统的采样定理恢复信号时所带来的截断误差, 对于无线通信等很多领域都非常有用.

具体来讲, 局部采样的研究内容是, 给定函数空间 V 和一个有限区间 $[a, b]$, 寻找关于采样点列 $\{x_k : 0 \leq k \leq K-1\} \subset [a, b]$ 的条件, 使得存在函数列 $\{S_k : 0 \leq k \leq K-1\}$ 满足

$$f(x) = \sum_{k=0}^{K-1} f(x_k) S_k(x), \quad \forall f \in V, \quad x \in [a, b]. \quad (1.5)$$

目前, 这方面的结果还比较少, 参见文献 [13–17].

在经典的采样理论中, 采样值是信号在采样点处的函数值. 在实际应用中, 由于物理设备精度等的影响, 要测量信号在某一点的精确值是不可能的, 实际测量值是信号在这一点附近的局部平均值. 具体来讲, f 在 x_k 点附近的平均值可以表示为 $\langle f, u_k \rangle$, 其中 u_k 称为平均函数, 它满足如下条件:

$$\text{supp } u_k \subset \left[x_k - \frac{\delta}{2}, x_k + \frac{\delta}{2} \right], \quad u_k \geq 0 \quad \text{且} \quad \int u_k(x) dx = 1. \quad (1.6)$$

如果 δ 足够小, 则平均值 $\langle f, u_k \rangle$ 是函数值 $f(x_k)$ 的一个很好的近似, 由此恢复的函数与原函数的差别应该不大. 平均采样要研究的问题是, 能否用局部平均值精确重构原函数?

本文主要介绍平均采样的研究进展, 包括频谱有限函数的平均采样定理、平移不变子空间上的平均采样和多通道采样, 以及随机过程的平均采样等.

误差估计是实际采样定理过程中经常遇到的问题. 例如, 如果 $f(x)$ 不满足采样定理的条件, 则由重构公式从 f 的采样值重构的函数将不再等于 $f(x)$, 由此产生的误差称为混淆误差 (aliasing error). 再者, 由于设备的局限性, 只能使用有限个采样值来重构原始信号, 由此产生了截断误差 (truncation error). 由于测量仪器的影响, 我们得到的采样值不是在 x_k 点、而是在 $x_k + \delta_k$ 点处的值, 由此产生的误差称为时错误差 (time-jitter error). 另外, 由于受到量化、舍入、噪声等诸多因素的影响, 实际得到的采样值可能不是 $f(x_k)$, 而是它的一个近似值 $\tilde{f}(x_k)$, 由此产生的误差称为幅值误差 (amplitude error). 另一方面, 在应用采样定理时, 各种误差经常同时发生. 因此, 我们需要考虑几种误差带来的共同影响, 即所谓的混合误差. 对于经典的 Shannon 采样定理, 已经有很多这方面的结果 (参见文献 [18–24]). 本文主要介绍关于平均采样的误差估计.

Jerri^[25] 和 Unser^[26] 分别在 1977 和 2000 年全面阐述了 Shannon 采样当时的相关成果. 近年来也有一些关于采样定理的专著, 其中系统地讲述了采样定理及其应用的方方面面 (参见文献 [27, Part II] 和 [28, 29]). 作为一篇综述文章, 本文希望尽可能系统全面地介绍关于平均采样方面的研究进展.

本文的结构如下: 第 2 节介绍一般再生核 Hilbert 空间上的采样定理; 第 3 节主要介绍频谱有限函数和平移不变子空间上的平均采样定理; 第 4 节主要介绍一些平均采样的扩展, 包括高维确定性信号的平均采样定理、多通道采样定理和随机信号的平均采样定理; 第 5 节详细介绍确定性信号平均采样的误差估计, 包括混淆误差和截断误差等.

2 再生核 Hilbert 空间上的采样定理和频谱有限函数空间上的采样点列

de Boor 等人^[30] 给出了有限生成整平移不变子空间的结构. 由此不难证明, $V(\Phi)$ 中存在有限个函数, 它们的整平移构成 $V(\Phi)$ 的框架. 不失一般性, 可以设 $\{\varphi_i(L \cdot -k) : 1 \leq i \leq r, k \in \mathbb{Z}\}$ 构成 $V(\Phi)$ 的框架, 即存在常数 $A, B > 0$, 使得

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^r |\langle f, \varphi_i(L \cdot -k) \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in V(\Phi),$$

其中 A 和 B 分别称为框架下界和框架上界. 此时, 存在 $V(\Phi)$ 的框架 $\{\tilde{\varphi}_i(L \cdot -k) : 1 \leq i \leq r, k \in \mathbb{Z}\}$, 称为 $\{\varphi_i(L \cdot -k) : 1 \leq i \leq r, k \in \mathbb{Z}\}$ 的对偶框架, 使得

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^r \langle f, \varphi_i(L \cdot -k) \rangle \tilde{\varphi}_i(L \cdot -k), \quad \forall f \in V(\Phi).$$

有关框架理论的详细介绍, 请参见文献 [31, 32].

因为 $\varphi_i \in L^2(\mathbb{R})$, 所以,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi_i(x - k)|^2 < \infty, \quad \text{a.e.}$$

令

$$q(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^r \overline{\tilde{\varphi}_i(Lx - k)} \varphi_i(Ly - k),$$

则 $q(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上几乎处处有定义. 对任意 $f \in V(\Phi)$, 有

$$f(x) = \langle f, q(x, \cdot) \rangle, \quad \text{a.e.}$$

对于一般的 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$, 若存在函数 $q(x, y)$, 使得对任意 $x \in \mathbb{R}$, $q(x, \cdot) \in \mathcal{H}$, 并且上式成立, 则称 $\mathcal{H}$ 为再生核 Hilbert 空间.

定理 2.1 设 $\mathcal{H} \subset L^2(\mathbb{R})$ 为再生核 Hilbert 空间, $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$, $\{q(x_n, \cdot) : n \in \mathbb{Z}\}$ 构成 $\mathcal{H}$ 的框架, 则对任意 $f \in \mathcal{H}$,

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, q(x_n, \cdot) \rangle S_n(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x_n) S_n(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

其中 $\{S_n : n \in \mathbb{Z}\}$ 为 $\{q(x_n, \cdot) : n \in \mathbb{Z}\}$ 的对偶框架.

级数 (2.1) 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中收敛并且在 $\mathbb{R}$ 上逐点收敛. 若 $\sup_x \|q(x, \cdot)\|_2 < \infty$, 则该级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

这就是一般再生核 Hilbert 空间上的采样定理. 显然, 问题的关键是寻找合适的采样点列.

证明 只需证明逐点收敛性. 我们有

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{|n| \leq N} \langle f, q(x_n, \cdot) \rangle S_n(x) \right| &= \left| \left\langle f - \sum_{|n| \leq N} \langle f, q(x_n, \cdot) \rangle S_n, q(x, \cdot) \right\rangle \right| \\ &\leq \left\| f - \sum_{|n| \leq N} \langle f, q(x_n, \cdot) \rangle S_n \right\|_2 \|q(x, \cdot)\|_2. \end{aligned}$$

因此, (2.1) 中的级数逐点收敛. 此外, 若 $\sup_x \|q(x, \cdot)\|_2 < \infty$, 则该级数一致收敛. $\square$

定义 2.2 给定函数空间 $V \subset L^2(\mathbb{R})$ 和点列 $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$. 如果存在 V 的框架 $\{S_n : n \in \mathbb{Z}\}$, 使得对任意 $f \in V$,

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x_n) S_n(x),$$

则称 $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ 是 V 的采样点列.

根据定理 2.1, 对于再生核 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$, $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ 成为 $\mathcal{H}$ 的采样点列的充分必要条件是 $\{q(x_n, \cdot) : n \in \mathbb{Z}\}$ 构成 $\mathcal{H}$ 的框架.

对于频谱有限函数空间 B_Ω ,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{\sin \Omega(x-y)}{\pi(x-y)} dy, \quad \forall f \in B_\Omega.$$

因此, B_Ω 是再生核 Hilbert 空间, 核函数

$$q(x, y) = \frac{\sin \Omega(x-y)}{\pi(x-y)}.$$

所以, $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ 成为 B_Ω 的采样点列当且仅当 $\{q(x_n, \cdot) : n \in \mathbb{Z}\}$ 构成 B_Ω 的框架, 而这又等价于 $\{e^{i\omega x_n} : n \in \mathbb{Z}\}$ 构成 $L^2[-\Omega, \Omega]$ 的框架.

另一方面, 由于 $\|q(x, \cdot)\|_2$ 为常数, 所以, 当 (2.1) 成立时, 它必定在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

为了刻画 B_Ω 中的采样点列, 我们引入一致离散和 Beurling 密度的概念.

设 $\Lambda = \{\lambda_n : n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的点列. 如果存在常数 $\alpha > 0$, 使得 $|\lambda_n - \lambda_m| > \alpha, \forall n \neq m$, 则称 Λ 一致离散. 如果 Λ 可以表示成有限个一致离散数列的并, 则称其相对一致离散.

令

$$D^+(\Lambda) = \limsup_{h \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\#((x-h, x+h) \cap \Lambda)}{2h},$$

$$D^-(\Lambda) = \liminf_{h \rightarrow +\infty} \inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{\#((x-h, x+h) \cap \Lambda)}{2h},$$

分别称其为 Λ 的 Beurling 上密度和 Beurling 下密度. 如果 $D^+(\Lambda) = D^-(\Lambda)$, 则记 $D(\Lambda) = D^+(\Lambda)$, 并称其为 Λ 的 Beurling 密度.

如果存在常数 $\Delta, L > 0$ 使得

$$\left| \lambda_n - \frac{n}{\Delta} \right| \leq L, \quad n \in \mathbb{Z},$$

则称 Λ 具有一致密度 Δ .

Duffin 和 Schaeffer [33] 引入框架的概念, 证明了框架理论的一个基本结果:

定理 2.3 (参见文献 [33, 定理 1]) 设 $\Lambda = \{\lambda_n : n \in \mathbb{Z}\}$ 具有一致密度 $\Delta, 0 < \Omega < \pi\Delta$, 则 $\{e^{i\lambda_n \omega} : n \in \mathbb{Z}\}$ 构成 $L^2[-\Omega, \Omega]$ 的框架.

在此基础上, Jaffard 证明了以下结论:

定理 2.4 (参见文献 [34, 引理 2]) 设 $\Lambda = \{\lambda_n : n \in \mathbb{Z}\}$ 是单增实数列, 则以下两条等价:

- (1) 存在区间 I 使得 $\{e^{i\lambda_n \omega} : n \in \mathbb{Z}\}$ 构成 $L^2(I)$ 的框架;
- (2) Λ 可以表示为一个具有一致密度 Δ 的数列和一个相对一致离散数列的并.

当条件成立时, 对任意 $0 < \Omega < \pi\Delta$, $\{e^{i\lambda_n \omega} : n \in \mathbb{Z}\}$ 构成 $L^2[-\Omega, \Omega]$ 的框架.

定理 2.5 (参见文献 [34, 定理 2]) 若 $\{e^{i\lambda_n \omega} : n \in \mathbb{Z}\}$ 构成 $L^2[-\Omega, \Omega]$ 的框架, 则

$$D^-(\Lambda) \geq \frac{\Omega}{\pi}.$$

最终, Ortega-Cerdà 和 Seip [35] 给出 B_Ω 中采样点列的完整刻画. 以上结果仅给出 $\{e^{i\lambda_n \omega} : n \in \mathbb{Z}\}$ 构成框架的条件, 并没有给出框架界的任何估计, 这在一定程度上限制了它的应用. Gröchenig 证明当采样点列足够稠密时, 可以得到框架界的显式估计.

定理 2.6 (参见文献 [36, 定理 1]) 设 $\{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 是一个单增实数列,

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} x_k = \pm\infty,$$

并且

$$x_{k+1} - x_k \leq \delta < \frac{\pi}{\Omega},$$

则对任意 $f \in B_\Omega$,

$$\left(1 - \frac{\delta\Omega}{\pi}\right)^2 \|f\|_2^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2} |f(x_k)|^2 \leq \left(1 + \frac{\delta\Omega}{\pi}\right)^2 \|f\|_2^2.$$

从而存在 $\{S_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset B_\Omega$ 使得 (2.1) 成立.

Liu [6], Aldroubi 和 Gröchenig [37] 把这一经典结果推广到样条子空间, 得到了类似的结论.

3 平均采样定理

3.1 频谱有限函数的平均采样定理

Butzer 和 Lei [38] 研究了由局部平均值代替采样值所引起的重构误差. Gröchenig [36] 证明了, 当采样密度足够大时, 频谱有限信号可以由局部平均值精确重构.

定理 3.1 (参见文献 [36, 定理 2]) 设 $\{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 是一个单增实数列,

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} x_k = \pm\infty,$$

且满足

$$x_{k+1} - x_k \leq \delta < \frac{1}{\sqrt{2}\Omega}, \quad (3.1)$$

$\{u_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 是一列平均函数, 且 $\text{supp } u_k \subset [x_k - \frac{\delta}{2}, x_k + \frac{\delta}{2}]$, 则对于任意 $f \in B_\Omega$, $f(x)$ 由其局部平均值序列 $\langle f, u_k \rangle$ 唯一确定, 且有如下迭代重构算法:

$$\phi_0 = P \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, u_k \rangle \chi_{[\frac{x_{k-1}+x_k}{2}, \frac{x_k+x_{k+1}}{2}]} \right), \quad (3.2)$$

$$\phi_k = \phi_{k-1} - P \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{k-1}, u_k \rangle \chi_{[\frac{x_{k-1}+x_k}{2}, \frac{x_k+x_{k+1}}{2}]} \right), \quad (3.3)$$

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k. \quad (3.4)$$

上述所有级数均在 $L^2(\mathbb{R})$ 中收敛.

上述定理对平均函数的要求很少, 但是需要有很高的采样频率. 后来, Feichtinger 和 Gröchenig [39] 证明了, 当

$$\delta := \sup_{k \in \mathbb{Z}} (x_{k+1} - x_k) < \frac{\pi}{\Omega} \quad (3.5)$$

时, 任意 $f \in B_\Omega$ 都可以由 $\frac{1}{y_k - y_{k-1}} \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(x) dx$ 唯一确定, 其中

$$y_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}.$$

该结论对采样密度的要求有所降低, 但是要求平均函数是相对固定的.

考虑如下问题: 给定采样点列 $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$, 当平均函数的支集长度满足什么条件时, 能够从局部采样值完全重构原始信号? 应用定理 2.6, 对于采样点列和平均函数列都是不规则序列的情形, 可以给出平均函数支集长度的最优上界.

定理 3.2 (参见文献 [40, 定理 2.3]) 设 $\{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 是单增实数列, $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} x_k = \pm\infty$ 且存在常数 $0 < \beta < \frac{\pi}{\Omega}$, 使得

$$0 < x_{k+1} - x_k \leq \beta, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.6)$$

则当 $0 < \delta < \frac{\pi}{\Omega} - \beta$ 时, 对任意满足 $\text{supp } u_k \subset [x_k - \frac{\delta}{2}, x_k + \frac{\delta}{2}]$ 的平均函数列 $\{u_k : k \in \mathbb{Z}\}$, 存在 B_Ω 中以 $(1 + \frac{\delta\Omega}{\sqrt{2}})^{-2}(1 + \frac{\beta\Omega}{\pi})^{-2}$ 和 $\frac{81}{2}(1 - \frac{\beta+\delta}{\pi}\Omega)^{-3}$ 为界的框架 $\{S_k : k \in \mathbb{Z}\}$, 使对任意的 $f \in B_\Omega$,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2} \right)^{1/2} \langle f, u_k \rangle S_k(x), \quad (3.7)$$

其中上式在 $L^2(\mathbb{R})$ 中收敛并且在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

此外, 当 $\delta > \frac{\pi}{\Omega} - \beta$ 时, 结论不成立.

当采样点 $\{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上等距分布, 即 $x_k = \frac{k\varepsilon\pi}{\Omega}$, $0 < \varepsilon \leq 1$ 时, 同样可以给出使得平均采样定理成立的平均函数支集长度的最优上界.

定理 3.3 (参见文献 [40, 定理 2.7]) 设 $x_k = \frac{k\varepsilon\pi}{\Omega}$, $0 < \varepsilon \leq 1$. 令

$$\Delta_\varepsilon = \begin{cases} \frac{m\varepsilon\pi}{\Omega}, & \frac{1}{m+1} \leq \varepsilon < \frac{1}{m}, \quad m \geq 1, \\ \frac{\pi}{2\Omega}, & \varepsilon = 1, \end{cases}$$

则当 $0 < \delta < \Delta_\varepsilon$ 时, 对任意满足 $\text{supp } u_k \subset [x_k - \frac{\delta}{2}, x_k + \frac{\delta}{2}]$ 的平均函数列 $\{u_k : k \in \mathbb{Z}\}$, 存在 B_Ω 中的框架 $\{S_k : k \in \mathbb{Z}\}$, 使对任意 $f \in B_\Omega$, 在一致收敛意义下,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, u_k \rangle S_k(x). \quad (3.8)$$

当 $\frac{1}{\varepsilon}$ 不是大于 1 的整数时, 上述常数 Δ_ε 不能再改进.

对于平均函数 $u_k(x)$ 关于采样点 x_k 对称且在区间 $[x_k, x_k + \delta_k/2]$ 上单调递减的情形, 已经证明当 $0 < \delta < 1.8830453 \frac{\pi}{\Omega}$ 时, 平均采样定理成立 (参见文献 [41]). 我们猜测, 当 $\delta\Omega < 2\pi$ 时, 结论同样成立.

3.2 平移不变子空间上的平均采样

首先考虑样条子空间中的平均采样问题. 记样条子空间为

$$V_m = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_m(\cdot - k) : \{c_k\} \in l^2 \right\},$$

它由 m 次 B-样条

$$\varphi_m = \underbrace{\chi_{[0,1]} * \cdots * \chi_{[0,1]}}_{m+1 \text{ 项}}$$

生成.

对于标准平均函数 $u_k = \chi_{[x_k-1/2, x_k+1/2]}$, 可以证明当 $x_k = k$ 或者 $0 < \alpha \leq x_{k+1} - x_k \leq \beta < 1$ 时, 平均采样定理成立 (参见文献 [42]).

对于不规则采样点列, Sun 和 Zhou [43] 推广了 Aldroubi 和 Gröchenig [37] 的不规则采样定理, 并给出了平均函数支集长度的最优上界.

定理 3.4 (参见文献 [43, 定理 1.1]) 设 $\{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 是一个单增实数列, $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} x_k = \pm\infty$ 且存在常数 β , 使得

$$0 < x_{k+1} - x_k \leq \beta < 1, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.9)$$

则当 $0 < \delta < 1 - \beta$ 时, 对任意满足 $\text{supp } u_k \subset [x_k - \frac{\delta}{2}, x_k + \frac{\delta}{2}]$ 的平均函数列 $\{u_k : k \in \mathbb{Z}\}$, 存在 V_m 中的框架 $\{S_k : k \in \mathbb{Z}\}$, 使对任意 $f \in V_m$,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2} \right)^{1/2} \langle f, u_k \rangle S_k(x), \quad (3.10)$$

上式在 $L^2(\mathbb{R})$ 中收敛并且在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛. 此外, 当 $\delta \geq 1 - \beta$ 时, 结论不成立.

为了研究由平均采样值 $y_n = f * u(n + (m+1)/2)$, $n \in \mathbb{Z}$ 来重构样条函数 $f(t)$ 的存在性和唯一性, Pérez-Villalón 和 Portal [44] 考虑了一类不同的平均函数 $u(t)$, 它满足下面的条件:

$$\begin{aligned} \text{supp } u &\subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], \quad u(t) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ 0 < \int_{-1/2}^0 u(t) dt < \infty, \quad 0 < \int_0^{1/2} u(t) dt < \infty. \end{aligned} \quad (3.11)$$

对于给定的数列 $\{y_n : n \in \mathbb{Z}\}$, 他们研究以下问题解的存在唯一性:

(P1) 寻找样条函数 $f(t)$, 使得 $y_n = f * u(n + (m+1)/2)$, $n \in \mathbb{Z}$.

对 $\gamma \geq 0$, 记

$$\begin{aligned} V_{m,\gamma} &:= \{f(t) \in V_m : f(t) = \mathcal{O}(|t|^\gamma), t \mapsto \pm\infty\}, \\ D_\gamma &:= \{\{y_n : n \in \mathbb{Z}\} : y_n = \mathcal{O}(|n|^\gamma), n \mapsto \pm\infty\}. \end{aligned}$$

在此基础上, 他们得到如下结论:

定理 3.5 [44] 设 u 满足 (3.11). 当 $m = 1, 2, 3, 4$ 时, 对于给定的实数列 $\{y_n : n \in \mathbb{Z}\}$, 问题 (P1) 存在唯一解.

他们猜测定理 3.5 对所有的 $m \in \mathbb{N}$ 均成立, 但没有给出证明. 进一步, 如果假设 $\text{supp } u \subseteq [-l, l]$, 其中 $l < \frac{1}{2}$, Pérez-Villalón 和 Portal [45] 证得定理 3.5 对所有的 $m \geq 2$ 成立, 并且对充分大的 m , l 趋于 $1/2$.

受到文献 [45] 的启发, Ponnaian 和 Shanmugam [46] 通过对平均函数加一些条件, 证得定理 3.5 对所有的 m 均成立. 假设平均函数 $u(t)$ 满足下述条件:

$$\begin{aligned} \text{supp } u &\subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], \quad u \in L^1(\mathbb{R}), \\ \int_0^{1/2} u(-t) t_+^m dt &\neq 0, \quad m \text{ 为奇数}, \\ \int_{-1/2}^{1/2} u(-t) \left(t + \frac{1}{2} \right)_+^m dt &\neq 0, \quad m \text{ 为偶数}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

其中 $(t)_+ = (t + |t|)/2$. 显然, 这些条件比 (3.11) 要弱.

定理 3.6 (参见文献 [46, 定理 2.1]) 设 $m \geq 1$, u 是一个满足条件 (3.12) 的可积函数. 当 m 为奇数时, 存在紧支集函数 g_i 满足 $u = \sum_{i=1}^L g_i * \tilde{g}_i$, 并且 $\inf_{\omega \in [-\pi, +\pi]} |\hat{g}_i(\omega)| > 0$; 当 m 为偶数时, $\hat{\beta}_0(\omega)\hat{u}(\omega) \geq 0, \forall \omega$, 且 $\inf_{\omega \in [-\pi, +\pi]} |\hat{u}(\omega)| > 0$. 则对于任意给定实数列 $\{y_n : n \in \mathbb{Z}\} \in D_\gamma$, 存在唯一一个样条函数 $f \in V_{m,\gamma}$ 满足 $f * u(n + (m+1)/2) = y_n, n \in \mathbb{Z}$.

对于一般的平移不变子空间 $V(\varphi)$, Kang 和 Kwon [47] 提出了一个更广泛的平均采样设计. 设 $\mathcal{L}[\cdot]$ 为一个线性时不变系统, 其脉冲响应 $l(t)$ 满足下述条件之一:

- (1) $l(t) = \delta(t+a), a \in \mathbb{R}$;
- (2) $l(t) \in L^2(\mathbb{R})$;
- (3) $\hat{l}(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R})$ 且 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2n\pi)| \in L^2[0, 2\pi]$.

问题: 是否存在 $V(\varphi)$ 中的一个框架 $\{S_n(t) : n \in \mathbb{Z}\}$, 使得 $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \mathcal{L}[f], u_n \rangle S_n(t)$ 在 $V(\varphi)$ 中成立?

为了解决该问题, Kang 和 Kwon [47] 对平均函数和生成元均作了一些假设. 首先, 假设平均函数满足下述条件:

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n(t) \in L^2(\mathbb{R}), \\ \text{supp } u_n(t) \subset [n-a, n+b], \quad a, b \geq 0, \quad a+b > 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} u_n(t) dt = \int_{n-a}^{n+b} u_n(t) dt = 1, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

进一步, 假设 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t) := \mathcal{L}[\varphi](t) = (\varphi * l)(t)$ 满足下列条件:

- (1) $\varphi(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上局部绝对连续, 且 $\varphi'(t) \in L^2(\mathbb{R})$;
- (2) $L := \|Z\psi'(t, \xi)\|_\infty < \infty$;
- (3) 存在常数 $\beta \geq \alpha > 0$, 使得

$$\alpha \leq |Z\psi(0, \xi)| \leq \beta, \quad \text{a.e., } \omega \in E_\varphi, \quad (3.14)$$

其中 $E_\varphi := \text{supp } G_\varphi \cap [0, 2\pi]$, $G_\varphi(\xi) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2n\pi)|^2$, $Zf(x, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k)e^{-ik\omega}$ 为 f 的 Zak 变换.

在上述假设的前提下, 他们证得如下的定理:

定理 3.7 (参见文献 [47, 定理 3.2]) 设平均函数列 $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ 满足 $\text{supp } u_n \subset [n-a, n+b]$, $\delta := \max\{a, b\}$. 如果

$$\sqrt{\delta(a+b)} < \frac{\alpha}{L}, \quad (3.15)$$

则存在 $V(\varphi)$ 的框架 $\{S_n : n \in \mathbb{Z}\}$, 使得

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \mathcal{L}[f], u_n \rangle S_n(t), \quad \forall f \in V(\varphi), \quad (3.16)$$

上式在 $L^2(\mathbb{R})$ 中收敛且在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

显然, 如果令脉冲响应 $l(t) = \delta(t)$, 定理 3.7 变成经典的平均采样定理. 进一步, 假设平均函数具有对称性, 则有下列结果:

定理 3.8 (参见文献 [47, 定理 3.7]) 设平均函数列 $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ 满足 $\text{supp } u_n \subset [n-a, n+b]$, 假设 $u_n(t)$ 在区间 $[n-a, n]$ 上单增, 且在区间 $[n, n+b]$ 上单减. 如果

$$\sqrt{M(a+b)} < \frac{\pi\alpha}{2L}, \quad (3.17)$$

其中

$$M := \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ b \int_n^{n+b} u_n(t) dt, a \int_{n-a}^n u_n(t) dt \right\},$$

则存在 $V(\varphi)$ 的框架 $\{S_n : n \in \mathbb{Z}\}$, 使得

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \mathcal{L}[f], u_n \rangle S_n(t), \quad \forall f \in V(\varphi), \quad (3.18)$$

上式在 $L^2(\mathbb{R})$ 中收敛且在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

当平移不变子空间的生成元 φ 属于 Wiener 空间时, Atreas^[48] 考虑了一类非一致平均采样定理. 首先, 假设采样算子 $\sigma : V(\varphi) \ni f \mapsto c_f \in S$ 有界可逆, 并且重构算子 $\kappa : S \mapsto V(\varphi)$ 是采样算子的一个有界左逆, 其中 c_f 是函数 f 的采样值, S 是一个使得 c_f 有界的合适的空间. 进一步, 假设生成函数 φ 满足下述条件:

(1) $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 属于 Wiener 空间

$$W_\infty(L^1) = \left\{ f : \|f\|_{W_\infty(L^1)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|f \cdot \chi_{[k, k+1]}\|_\infty < \infty \right\};$$

(2) φ 的 Fourier 变换在零点的邻域非零.

在此假设基础上, 有如下结论:

定理 3.9 (参见文献 [48, 定理 1]) 设 $\varphi \in W_\infty(L^1)$, 且存在正常数 δ 使得

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} - x_n \geq \delta. \quad (3.19)$$

此外, 设存在正常数 $A > 2/\sqrt{3}$ 和 C_0 使得

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \geq C_0, \quad \text{对所有的 } |\xi| \leq \frac{A\pi}{\delta} \text{ 成立.} \quad (3.20)$$

则任意函数 $f \in V(\varphi)$ 可以唯一地由其采样值 $\{f * \omega_\varphi(x_n) : n \in \mathbb{Z}\}$ 重构, 其中 $\omega_\varphi(x) = \overline{\varphi(-x)}$. 进一步, 下述重构公式

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f * \omega_\varphi(x_n) \psi_n \quad (3.21)$$

在 L^2 意义下收敛且逐点收敛, 其中

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\Phi^{-1})_{m,n} \varphi(x - x_m), \\ \Phi &= \{\Phi_{n,m} = \varphi * w_\varphi(x_n - x_m)\}_{n,m \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

4 平均采样定理的扩展

本节分为 3 小节, 第 4.1 小节介绍高维确定性信号的平均采样定理; 第 4.2 小节介绍多通道平均采样定理; 第 4.3 小节介绍随机信号的平均采样定理.

4.1 高维情形

第 3 节主要是讨论给定采样点列, 当平均函数满足什么条件时平均采样定理成立. 这里介绍采样点的选取. 粗略地讲, 当采样点列足够稠密时, 平均采样定理成立.

为了得到 $\mathbb{R}^d$ 上的平均采样定理, 需要对生成元和平均函数作一些限制. 记 W_0^p 为 $W(L^p)$ 中连续函数组成的子空间, 其中

$$W(L^p) := \left\{ f : \|f\|_{W(L^p)} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \|f \cdot \chi_{k+[0,1]^d}\|_\infty^p \right)^{1/p} < \infty \right\}. \quad (4.1)$$

设平均函数 $u_n(t)$ 具有紧支集且满足下述性质:

- (1) 对每个 n , $\text{supp } u_n \subset x_n + [-a, a]^d$;
- (2) 每一个函数 $|u_n|$ 都有上界 U_n ;
- (3) 对所有的 n , $\int_{\mathbb{R}^d} u_n = 1$ 并且 $\int_{\mathbb{R}^d} |u_n| \leq M$.

为叙述方便, 我们引入有界单位分解 (BUPU) 的概念.

定义 4.1 称一个函数集合 $\{\beta_n : n \in J\}$ 为关于 $\{B_\gamma(x_n) : n \in J\}$ 的有界单位分解 (BUPU), 如果它满足下述条件:

$$0 \leq \beta_n \leq 1, \quad \forall n \in J, \quad \text{supp } \beta_n \subset B_\gamma(x_n), \quad \sum_{n \in J} \beta_n = 1,$$

其中 $B_\gamma(x_n)$ 表示以 x_n 为中心、 γ 为半径的球体.

设 β_n 为 BUPU, 定义算子 A 为

$$A(f) = \sum_{n \in J} \langle f, u_n \rangle \beta_n. \quad (4.2)$$

在没有噪声的条件下, Aldroubi^[49] 给出了重构原始信号 f 的迭代算法, 称为 A-P 迭代.

定理 4.2 (参见文献 [49, 定理 4.1]) 给定 $\varphi \in W_0^1$, 则存在 $\gamma = \gamma(\varphi) > 0$ 和 $a_0 > 0$, 使得在任意 γ -稠子集上, 对任意 $0 < a \leq a_0$, 任意 $f \in V(\varphi)$ 均可以通过下述迭代算法由 $\{\langle f, u_n \rangle\}$ 重构:

$$f_1 = PA(f), \quad f_{n+1} = PA(f - f_n) + f_n, \quad (4.3)$$

其中 P 是 L^2 到 $V(\varphi)$ 上的一个正交投影. 在这种情形下, f_n 在 $W(L^2)$ 范数的意义下收敛到 f , 因而在 L^2 范数意义下收敛且在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

在有噪声的情形下, Aldroubi^[49] 也给出了一个重构算法. 首先假设数据 $f' = \{f'_n : n \in J\}$ 属于 l^2 , 但并不假设它们是 $f \in V(\varphi)$ 的采样值. 令

$$f_1 = P\left(\sum_{n \in J} f'_n \beta_n\right), \quad f_{n+1} = f_1 + (I - PA)f_n, \quad (4.4)$$

则有如下结果:

定理 4.3 (参见文献 [49, 定理 4.2]) 在定理 4.2 条件下, 算法 (4.4) 收敛于函数 $f_\infty \in V(\varphi)$, 并且满足

$$P\left(A(f_\infty) - \sum_{n \in J} f'_n \beta_n\right) = 0.$$

对于多个生成元的情形, 可以得到类似的结果 (参见文献 [50]). Xian 和 Li^[51] 改进了上述 A-P 迭代算法, 得到了更快的收敛速度.

Sun^[52] 研究了更一般条件下的平均采样问题. 在介绍具体结果之前, 先引入几个概念.

我们称一个信号具有有限更新率 (finite rate of innovation), 如果它在每个单位时间内有一个有限的自由度.

对 $1 \leq q \leq \infty$, 定义函数空间

$$V_q(\Phi, \Lambda) := \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \varphi_\lambda : \|(c(\lambda))_{\lambda \in \Lambda}\|_{l^q(\Lambda)} < \infty \right\}, \quad (4.5)$$

称定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的正函数 u 为权, 如果它连续、对称, 且对所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 有 $1 = u(0) \leq u(x) < \infty$, 并且存在 $\mathbb{R}^d$ 上的正连续函数 v 使得 $u(x+y) \leq u(x)v(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$.

设 $1 \leq p \leq \infty$. 称权 u 是 p -容许权, 如果存在权函数 v 与两个正常数 $D := D(u) \in (0, \infty)$ 和 $\theta := \theta(u) \in (0, 1)$ 使得

$$u(x+y) \leq D(u(x)v(y) + v(x)u(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (4.6)$$

$$\|(vu^{-1})\|_{L^{p'}} \leq D, \quad (4.7)$$

$$\inf_{\tau > 0} \|v\|_{L^1(B(\tau))} + t \|vu^{-1}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d \setminus B(\tau))} \leq Dt^\theta, \quad \forall t \geq 1, \quad (4.8)$$

其中

$$p' = \frac{p}{p-1}, \quad B(\tau) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq \tau\}.$$

给定 $1 \leq p, q \leq \infty$ 、权函数 u 和 $\mathbb{R}^d$ 上的一致离散子集 Γ , 以及 $\mathbb{R}^d$ 上的函数族 $\Psi = \{\psi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, 定义

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_{q,p,u} := & \sup_{\gamma \in \Gamma} \|(\|\psi_\gamma(\cdot)u(\cdot - \gamma)\|_{L^q(k+[0,1]^d)})_{k \in \mathbb{Z}^d}\|_{l^p(\mathbb{Z}^d)} \\ & + \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \|(\|\psi_\gamma(\cdot)u(\cdot - \gamma)\|_{L^q(k+[0,1]^d)})_{\gamma \in \Gamma}\|_{l^p(\Gamma)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

利用这些概念, 可以得到下面更为一般的结果:

定理 4.4 (参见文献 [52, 定理 3.1]) 令 $2 \leq q \leq \infty$, $q/(q-1) \leq q^* \leq \infty$, $1 \leq r \leq q$, $1 \leq p \leq \infty$, 设 u 是 p -容许权, $\mathbb{R}^d$ 的子集 Λ 和 Γ 相对一致离散, 生成元 $\Phi = \{\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 满足

$$\|\Phi\|_{q,p,u} < \infty, \quad (4.10)$$

平均函数 $\Psi = \{\psi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ 满足

$$\|\Psi\|_{q^*,p,u} < \infty, \quad (4.11)$$

且空间 $V_r(\Phi, \Lambda)$ 如 (4.5) 所定义. 设 Φ 是 $V_2(\Phi, \Lambda)$ 的 Riesz 基, Ψ 是 $V_2(\Phi, \Lambda) \subset L^2$ 的稳定平均函数列, 则存在 $\tilde{\Psi} = \{\tilde{\psi}_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset V_1(\Phi, \Lambda)$ 使得

$$\|\tilde{\Psi}\|_{q,p,u} < \infty, \quad (4.12)$$

并且

$$f = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle f, \psi_\gamma \rangle \tilde{\psi}_\gamma, \quad \forall f \in V_r(\Phi, \Lambda). \quad (4.13)$$

4.2 多通道平均采样定理

给定平移不变子空间 $V(\varphi)$, 设有 s 个线性时不变系统 (滤波器) $\mathcal{L}_j, 1 \leq j \leq s$, 采样值 $\{(\mathcal{L}_j f)(rn) : n \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq s\}$ 已知, $r \in \mathbb{N}$. 所谓多通道采样或者广义采样是指利用上述采样值序列稳定地重构函数 $f \in V(\varphi)$. 换言之, 研究 $V(\varphi)$ 中形如

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^s (\mathcal{L}_j f)(rn) S_j(t - rn), \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.14)$$

的采样公式, 其中重构函数列 $\{S_j(\cdot - rn) : n \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq s\}$ 是 $V(\varphi)$ 的框架. 因为线性时不变系统可以用卷积表示, 而卷积可以看作某种形式的内积, 所以, 多通道采样与平均采样密切相关.

这种类型的采样定理可以追溯到 1977 年. Papoulis^[53] 给出了一个多通道的采样定理, 证明了频谱有限信号 f 可以被 s 个线性平移不变系统以 $1/s$ 的速率采样得到的响应值 $\{(\mathcal{L}_j f)(rn) : n \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq s\}$ 精确重构. Papoulis 的理论有各种形式的推广. 对于频谱有限函数, 它被延拓到多维情形 (参见文献 [54–56]). Djokovic 和 Vaidyanathan^[57] 利用类似的思想给出属于特定小波空间中函数的重构方法. Unser 和 Zerubia^[58] 改进了 Papoulis 的结果. 他们将信号范围扩大到平移不变子空间, 并在对输入信号不作任何假设的前提下得到近似重构算法. García 和 Pérez-Villalón^[59] 利用 $L^2(0, 1)$ 的一些特殊对偶框架得到平移不变子空间上的广义采样定理.

记 $G(w) := [g_j(w + \frac{k-1}{r})]_{1 \leq j \leq s, 1 \leq k \leq r}$, $A(w) := [a_j(w + \frac{k-1}{r})]_{1 \leq j \leq s, 1 \leq k \leq r}$. 定义

$$\begin{aligned} \alpha_A &= \operatorname{ess\,inf}_{w \in (0, 1/r)} \lambda_{\min}[A^*(w)A(w)], \\ \beta_A &= \operatorname{ess\,sup}_{w \in (0, 1/r)} \lambda_{\max}[A^*(w)A(w)], \end{aligned}$$

其中 $A^*(w)$ 表示 $A(w)$ 的共轭转置, $\lambda_{\min}$ 和 $\lambda_{\max}$ 分别是矩阵 $A^*(w)A(w)$ 的最小和最大特征值. 定义同构 $\mathcal{T}$ 为

$$(\mathcal{T}F)(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle F(\cdot), e^{-2\pi i n \cdot} \rangle_{L^2(0, 1)} \varphi(t - n), \quad F \in L^2(0, 1).$$

定理 4.5 (参见文献 [59, 定理 1]) 设 $g_j \in L^\infty(0, 1), 1 \leq j \leq s$. 如果存在 $a_i \in L^\infty(0, 1)$ 使得

$$[a_1(w), a_2(w), \dots, a_s(w)]G(w) = [1, 0, \dots, 0] \quad (4.15)$$

在 $(0, 1)$ 上几乎处处成立, 则对每个 $f \in V(\varphi)$, 有

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^s (\mathcal{L}_j f)(rn) S_j(t - rn), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.16)$$

其中 $S_j = r\mathcal{T}a_j, 1 \leq j \leq s$. 上述级数在 L^2 意义下收敛, 且在 $\mathbb{R}$ 上绝对收敛和一致收敛. 此外, $\{S_j(t - rn) : n \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq s\}$ 是 $V(\varphi)$ 中以 $r\alpha_A\|\Phi\|_0$ 和 $r\beta_A\|\Phi\|_\infty$ 为界的框架, 其中

$$\Phi(w) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(w + k)|^2, \quad w \in (0, 1).$$

上述结果被进一步推广到多生成元平移不变子空间上的不规则多通道采样. 更多结果请参见文献 [60–66].

Aldroubi 等人^[67, 68] 研究了信号的动态采样 (dynamical sampling), 即通过信号在一系列算子作用下的采样值重构原始信号. 动态采样与多通道采样密切相关, 具体内容请参见文献 [67, 68].

4.3 随机过程的平均采样定理

由于信号经常具有随机特性, 随机信号在信号处理尤其是在采样定理的研究中得到广泛关注. 本节主要介绍宽平稳过程的平均采样定理.

给定一个概率空间和随机过程 $\{X(t, \omega) : t \in \mathbb{R}\}$. 如果 $\mathbb{E}|X(t, \cdot)|^2 < \infty, \forall t \in \mathbb{R}$, 并且自相关函数 $R_X(\tau) := \mathbb{E}X(t, \cdot)\overline{X(t+\tau, \cdot)}$ 与 t 无关, 则称 $\{X(t, \omega) : t \in \mathbb{R}\}$ 为宽平稳随机过程. 如果它的自相关函数 R_X 频谱有限, 则称其为频谱有限宽平稳过程. 如果它的自相关函数属于某个平移不变子空间, 则称其为平移不变宽平稳过程^[69].

Song 等人^[70] 研究了频谱有限宽平稳过程的平均采样, 把关于确定性信号的一些结论推广到随机过程.

定理 4.6 (参见文献 [70, 定理 2.2]) 令 $\{u_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 为满足 (1.6) 的一列平均函数, $\{t_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 是相对一致离散实数列. 假设 $\{S_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 是 B_Ω 的一个框架, 且使得

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, u_k \rangle S_k(t), \quad \forall f \in B_\Omega, \quad (4.17)$$

其中, 上述级数在 $L^2(\mathbb{R})$ 收敛且在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

设 $X(t, \omega)$ 是频谱有限宽平稳过程且其自相关函数 R_X 满足 $|R_X(t)| \leq R_X(0)(1 + |t|)^{-1-\eta}, \eta > 0$, 则有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| X(t, \omega) - \sum_{k=-N}^N \langle X(\cdot, \omega), u_k \rangle S_k(t) \right|^2 = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.18)$$

对于平均函数支集关于采样点不对称的情形, 可以证明类似的结论 (参见文献 [71, 72]). Song^[73] 进一步把上述结果推广到高维随机过程的平均采样.

5 误差估计

误差分析是应用采样定理时经常遇到的问题, 具有重要的实际意义. 本节主要介绍确定性信号的混淆误差和截断误差估计. 更多误差估计的结果请参见文献 [74–77]. 关于随机过程的采样误差估计可以参见文献 [78–81].

5.1 混淆误差

在应用中, 我们处理的信号并不一定满足采样定理中要求的条件, 这样产生的误差称为混淆误差^[82–89].

对于经典的 Shannon 采样定理, Brown^[19] 证明了当采样频率趋于无穷时, 重构函数收敛于 f .

定理 5.1 (参见文献 [19, 定理 1]) 设 $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ 且 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, 则有

$$\left| f(t) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega t - k\pi)}{\Omega t - k\pi} \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{|\omega| > \Omega} |\hat{f}(\omega)| d\omega. \quad (5.1)$$

此外, 存在 $f \neq 0$, 使得上式中的等号成立, 即常数 $\frac{1}{\pi}$ 是一个最好的误差上界.

Standish^[82] 构造一个例子说明, 存在函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 使得

$$\int_{|\omega| > \Omega} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega < \varepsilon,$$

而且相应的采样级数 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega t - k\pi)}{\Omega t - k\pi}$ 在传统或者均方意义下均不收敛. 因此, 对任意的绝对常数 c , 将不等式 (5.1) 的左端用 L^2 范数代替, 右端用 $c \int_{|\omega| > \Omega} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$ 代替后的不等式不成立.

Brown^[87] 证得, 给定 $c > 0$, $\Omega > 0$, 存在函数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, 满足 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, 并且

$$\left\| f(t) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega t - k\pi)}{\Omega t - k\pi} \right\|_2^2 \geq c \int_{|\omega| > \Omega} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (5.2)$$

对于平均采样, 定义混淆误差为

$$(Af)(x) := f(x) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, u_k \rangle S_k(x). \quad (5.3)$$

上式右端中的级数一般称为采样级数. 当采样点不规则分布时, 我们有如下的混淆误差估计:

定理 5.2 假设条件如定理 3.2. 令采样级数为

$$(Rf)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2} \right)^{1/2} \langle f, u_k \rangle S_k(x), \quad (5.4)$$

则当 $f, f' \in L^2(\mathbb{R})$ 时,

$$\begin{aligned} \|f - Rf\|_2^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| > \Omega} (1 + M\omega^2) |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega, \\ \|f - Rf\|_\infty &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| > \Omega} |\hat{f}(\omega)| d\omega + \left(\frac{\Omega M}{2\pi^2} \int_{|\omega| > \Omega} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

其中

$$M = \frac{81}{2(1 - \frac{\beta + \delta}{\pi}\Omega)^3} (\beta + \delta) \left[\left(\frac{\beta + \delta}{2} \left\lceil \frac{\beta + \delta}{\beta} \right\rceil \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{\beta\Omega^2} + \beta \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2,$$

这里 $\lceil x \rceil = \min\{k : k \geq x, k \in \mathbb{Z}\}$.

对于采样点均匀分布的情形, 可以得到类似的结果.

下面考虑一种特殊情形, u_k 为同一个函数的平移. 此时可以给出误差上界的最佳估计.

定理 5.3 设 u 为平均函数, $\hat{u}$ 在 $[-\Omega, \Omega]$ 上无零点. 令

$$\hat{S}(\omega) = \frac{\pi}{\Omega} \cdot \frac{1}{\hat{h}(\omega)} \chi_{[-\Omega, \Omega]}(\omega), \quad (R_\Omega f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle f, u\left(\cdot - \frac{k\pi}{\Omega}\right) \right\rangle S\left(x - \frac{k\pi}{\Omega}\right),$$

则对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\|f - R_\Omega f\|_2^2 \leq \frac{M_u}{2\pi} \int_{|\omega| > \Omega} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega, \quad (5.5)$$

其中

$$M_u = \max_{|\omega| \leq \Omega} \frac{\pi}{\Omega |\hat{u}(\omega)|^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle u, u\left(\cdot - \frac{k\pi}{\Omega}\right) \right\rangle e^{-i \frac{k\pi\omega}{\Omega}},$$

并且 $\frac{M_u}{2\pi}$ 是一个最好的上界. 特别地, 当 $\text{supp } u \subset [-\frac{\pi}{2\Omega}, \frac{\pi}{2\Omega}]$ 时,

$$M_u = \max_{|\omega| \leq \Omega} \frac{\pi \|u\|^2}{\Omega |\hat{u}(\omega)|^2}.$$

此外, 若 f 连续且 $\hat{f}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$, 则

$$|f(t) - (R_\Omega f)(t)| \leq \frac{1 + m_u}{2\pi m_u} \int_{|\omega| > \Omega} |\hat{f}(\omega)| d\omega,$$

其中

$$m_u = \min_{|\omega| \leq \Omega} |\hat{u}(\omega)|.$$

从 (5.5) 可知, $\frac{M_u}{2\pi}$ 是一个误差上界. 可以证明,

$$M_u \geq 2,$$

并且当 $u(x) = \frac{\Omega}{2} \cos(\Omega x) \chi_{[-\frac{\pi}{2\Omega}, \frac{\pi}{2\Omega}]}(x)$ 时, 等号成立.

当 $u(x) = \frac{\Omega}{\pi} \chi_{[-\frac{\pi}{2\Omega}, \frac{\pi}{2\Omega}]}(x)$, f 连续且 $\hat{f}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$ 时, 有

$$|f(t) - (R_\Omega f)(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| > \Omega} |\hat{f}(\omega)| \left(1 + \frac{\Omega}{|\omega|}\right) d\omega. \quad (5.6)$$

对比 (5.1) 和 (5.6) 两式可知, 与经典的采样定理相比, 平均采样具有较小的混淆误差.

5.2 截断误差

在应用采样定理重构信号时, 只能计算有限项的和, 由此产生的误差称为截断误差^[90-97]. 在经典的 Shannon 采样理论中, 定义截断误差为

$$(T_N f)(t) := f(t) - \sum_{k=-N}^N f\left(\frac{k\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega t - k\pi)}{\Omega t - k\pi} = \sum_{|k| > N} f\left(\frac{k\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega t - k\pi)}{\Omega t - k\pi}, \quad f \in B_\Omega. \quad (5.7)$$

前面已经说明, 对任意的 $f \in B_\Omega$, $T_N f$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 0.

对于过采样 (即采样频率大于 Nyquist 频率) 的情形, 文献 [20, 22] 证明了

$$(T_N f)(t) = \mathcal{O}(N^{-1}), \quad N \rightarrow \infty.$$

Micchelli 等人^[98] 进一步证明, 通过选取合适的重构函数, 可以使得截断误差指数衰减. 在此基础上, Zhang^[99] 提出了一个新的方法, 使得频谱有限函数可由它的有限个平均采样数据近似重构, 并且重构误差指数衰减. 他的核心思想是寻找具有快速衰减性质的对偶框架. 具体地, 考虑下述平均采样方法:

$$\mu_k(f) := \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} f(x+k) d\nu(x), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (5.8)$$

其中 σ 是一个很小的正常数, ν 是 $[-\sigma/2, \sigma/2]$ 上的一个 Borel 概率测度, 它关于原点对称. 通过选取合适的重构函数, 可以使得重构误差指数衰减.

定理 5.4 (参见文献 [99, 定理 1.1]) 令 $f \in B_\delta$, $\delta < \pi$ 且 $\sigma\delta < \pi$. 给定平均采样 (5.8), 存在一个函数 $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ 使得

$$\sup_{x \in (0,1)} \left| f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-N}^N \mu_k(f) \phi(x-k) \right| \leq C \|f\|_2 \frac{1}{N^{3/4}} e^{-\frac{2(\pi-\delta)\gamma N}{e(1+\sqrt{2})^2(\gamma+\sigma(\pi-\delta))}}, \quad (5.9)$$

其中 C 是一个与 f 和 N 无关的正常数, $\gamma = \cos(\frac{\sigma\delta}{2})$.

上述结果被进一步推广到多变量频谱有限函数的平均采样 (参见文献 [100]). 有关 ϕ 的具体构造方法, 请参见文献 [98, 99].

致谢 作者感谢审稿人提出的宝贵意见和建议.

参考文献

- 1 Shannon C E. Communication in the presence of noise. IEEE, 1949, 37: 10–21
- 2 Higgins J R. Five short stories about the cardinal series. Bull Amer Math Soc (NS), 1985, 12: 45–89
- 3 Walter G G. A sampling theorem for wavelet subspaces. IEEE Trans Inform Theory, 1992, 38: 881–884
- 4 Unser M, Aldroubi A. A general sampling theorem for nonideal acquisition devices. IEEE Trans Signal Process, 1994, 42: 2915–2925
- 5 Liu Y, Walter G G. Irregular sampling in wavelet subspaces. J Fourier Anal Appl, 1995, 2: 181–189
- 6 Liu Y. Irregular sampling for spline wavelet subspaces. IEEE Trans Inform Theory, 1996, 42: 623–627
- 7 Chen W, Itoh S. A sampling theorem for shift-invariant subspaces. IEEE Trans Signal Process, 1998, 46: 2822–2824
- 8 Aldroubi A, Gröchenig K. Nonuniform sampling and reconstruction in shift-invariant spaces. SIAM Rev, 2001, 43: 585–620
- 9 Sun W. Sampling theorems for multivariate shift invariant subspaces. Sampl Theory Signal Image Process, 2005, 4: 73–98
- 10 Zhao C, Zhao P. Sampling theorem and irregular sampling theorem for multiwavelet subspaces. IEEE Trans Signal Process, 2005, 53: 705–713
- 11 Xian J, Luo S-P, Lin W. Weighted sampling and signal reconstruction in spline subspaces. Signal Process, 2006, 86: 331–340
- 12 Yang J, Wei W. Random sampling in shift invariant spaces. J Math Anal Appl, 2013, 398: 26–34
- 13 Sun W, Zhou X. Reconstruction of functions in spline subspaces from local averages. Proc Amer Math Soc, 2003, 131: 2561–2571
- 14 Sun W. Local sampling theorems for spaces generated by splines with arbitrary points. Math Comp, 2009, 78: 225–239
- 15 Sun Q. Local reconstruction for sampling in shift-invariant spaces. Adv Comput Math, 2010, 32: 335–352
- 16 Xian J, Sun W. Local sampling and reconstruction in shift-invariant spaces and their applications in spline subspaces. Numer Funct Anal Optim, 2010, 31: 366–386
- 17 Xian J. Local sampling set conditions in weighted shift-invariant signal spaces. Appl Anal, 2012, 91: 447–457
- 18 Butzer P L, Splettstösser W, Stens R L. The sampling theorem and linear prediction in signal analysis. Jahresber Deutsch Math-Verein, 1988, 90: 1–70
- 19 Brown J L. On the error in reconstructing a non-bandlimited function by means of the band pass sampling theorem. J Math Anal Appl, 1967, 18: 75–84
- 20 Yao K, Thomas J B. On truncation error bounds for sampling representations of band-limited signals. IEEE Trans Aerosp Electron Syst, 1966, 2: 640–647
- 21 Brown J L. Bounds for truncation error in sampling expansions of bandlimited signals. IEEE Trans Inform Theory, 1969, 15: 440–444
- 22 Piper H S. Bounds for truncation error in sampling expansion of finite energy bandlimited signals. IEEE Trans Inform Theory, 1975, 21: 482–485
- 23 Sun W, Zhou X. Sampling theorem for wavelet subspaces: Error estimate and irregular sampling. IEEE Trans Signal Process, 2000, 48: 223–226
- 24 Xian J. Error estimates from noise samples for iterative algorithm in shift-invariant signal spaces. Abstr Appl Anal, 2010, 2010: 214213
- 25 Jerri A J. The Shannon sampling theorem — its various extensions and applications: A tutorial review. IEEE, 1977, 65: 1565–1596
- 26 Unser M. Sampling — 50 years after Shannon. IEEE, 2000, 88: 569–587
- 27 Benedetto J J, Frazier M W. Wavelets: Mathematics and Applications. Studies in Advanced Mathematics. Boca Raton: CRC Press, 1994
- 28 Benedetto J J, Ferreira P J S G. Modern Sampling Theory, Mathematics and Applications. Boston: Birkhäuser, 2001
- 29 Marvasti F. Nonuniform Sampling, Theory and Practice. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2001
- 30 de Boor C, DeVore R A, Ron A. The structure of finitely generated shift-invariant spaces in $L^2(\mathbb{R}^d)$. J Funct Anal, 1994, 119: 37–78
- 31 Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston: Birkhäuser, 2003
- 32 Heil C. A Basis Theory Primer. Expanded edition. New York: Birkhäuser/Springer, 2011
- 33 Duffin R J, Schaeffer A C. A class of nonharmonic Fourier series. Trans Amer Math Soc, 1952, 72: 341–366
- 34 Jaffard S. A density criterion for frames of complex exponentials. Michigan Math J, 1991, 38: 339–348

- 35 Ortega-Cerdà J, Seip K. Fourier frames. *Ann Math*, 2002, 155: 789–806
- 36 Gröchenig K. Reconstruction algorithms in irregular sampling. *Math Comp*, 1992, 59: 181–194
- 37 Aldroubi A, Gröchenig K. Beuling-Landau-type theorems for non-uniform sampling in shift invariant spline spaces. *J Fourier Anal Appl*, 2000, 6: 93–103
- 38 Butzer P L, Lei J. Approximation of signals using measured sampled values and error analysis. *Commun Appl Anal*, 2000, 4: 245–256
- 39 Feichtinger H G, Gröchenig K. Theory and practice of irregular sampling. In: *Wavelets: Mathematics and Applications*. Boca Raton: CRC Press, 1994, 305–363
- 40 Sun W, Zhou X. Reconstruction of band-limited functions from local averages. *Constr Approx*, 2002, 18: 205–222
- 41 Sun W, Zhou X. Reconstruction of band-limited signals from local averages. *IEEE Trans Inform Theory*, 2002, 48: 2955–2963
- 42 Sun W, Zhou X. Average sampling in spline subspaces. *Appl Math Lett*, 2002, 15: 233–237
- 43 Sun W, Zhou X. Reconstruction of functions in spline subspaces from local averages. *Proc Amer Math Soc*, 2003, 131: 2561–2571
- 44 Pérez-Villalón G, Portal A. Reconstruction of splines from local average samples. *Appl Math Lett*, 2012, 25: 1315–1319
- 45 Pérez-Villalón G, Portal A. Sampling in shift-invariant spaces of functions with polynomial growth. *Appl Anal*, 2013, 92: 2536–2546
- 46 Ponnaian D, Shanmugam Y. Existence and uniqueness of spline reconstruction from local weighted average samples. *Rend Circ Mat Palermo*, 2014, 63: 97–108
- 47 Kang S, Kwon K H. Generalized average sampling in shift invariant spaces. *J Math Anal Appl*, 2011, 377: 70–78
- 48 Atreas N D. On a class of non-uniform average sampling expansions and partial reconstruction in subspaces of $L^2(\mathbb{R})$. *Adv Comput Math*, 2012, 36: 21–38
- 49 Aldroubi A. Non-uniform weighted average sampling and reconstruction in shift-invariant and wavelet spaces. *Appl Comput Harmon Anal*, 2002, 13: 152–161
- 50 Aldroubi A, Sun Q, Tang W-S. Nonuniform average sampling and reconstruction in multiply generated shift-invariant spaces. *Constr Approx*, 2004, 20: 173–189
- 51 Xian J, Li S. General A-P iterative algorithm in shift-invariant spaces. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2009, 25: 545–552
- 52 Sun Q. Nonuniform average sampling and reconstruction of signals with finite rate of innovation. *SIAM J Math Anal*, 2006, 38: 1389–1422
- 53 Papoulis A. Generalized sampling expansion. *IEEE Trans Circuits Syst*, 1977, 24: 652–654
- 54 Brown J L. Multi-channel sampling of low-pass signals. *IEEE Trans Circuits Syst*, 1981, 28: 101–106
- 55 Brown J L, Sangsari K. Sampling reconstruction of N -dimensional band-limited images after multilinear filtering. *IEEE Trans Circuits Syst*, 1989, 36: 1035–1038
- 56 Seidner D, Feder M, Cubanski D, et al. Introduction to vector sampling expansion. *IEEE Signal Process Lett*, 1998, 5: 115–117
- 57 Djokovic I, Vaidyanathan P P. Generalized sampling theorems in multiresolution subspaces. *IEEE Trans Signal Process*, 1997, 45: 583–599
- 58 Unser M, Zerubia J. A generalized sampling without bandlimiting constraints. *IEEE Trans Circuits Syst*, 1998, 45: 959–969
- 59 García A G, Pérez-Villalón G. Dual frames in $L^2(0, 1)$ connected with generalized sampling in shift-invariant spaces. *Appl Comput Harmon Anal*, 2006, 20: 422–433
- 60 García A G, Pérez-Villalón G. Generalized irregular sampling in shift-invariant spaces. *Int J Wavelets Multiresolut Inf Process*, 2007, 5: 369–387
- 61 García A G, Hernández-Medina M A, Pérez-Villalón G. Generalized sampling in shift-invariant spaces with multiple stable generators. *J Math Anal Appl*, 2008, 337: 69–84
- 62 García A G, Pérez-Villalón G. Multivariate generalized sampling in shift-invariant spaces and its approximation properties. *J Math Anal Appl*, 2009, 355: 397–413
- 63 Nashed M Z, Sun Q, Tang W-S. Average sampling in L^2 . *C R Acad Sci Paris Ser I*, 2009, 347: 1007–1010
- 64 Kang S, Kim J M, Kwon K H. Asymmetric multi-channel sampling in shift invariant spaces. *J Math Anal Appl*, 2010, 367: 20–28
- 65 Ericsson S. Generalized sampling in shift invariant spaces with frames. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2012, 28: 1823–1844
- 66 Xian J. Average sampling and reconstruction in a reproducing kernel subspace of homogeneous type space. *Math Nachr*, 2014, 287: 1042–1056

- 67 Aldroubi A, Davis J, Krishtal I. Dynamical sampling: Time-space trade-off. *Appl Comput Harmon Anal*, 2013, 34: 495–503
- 68 Aldroubi A, Davis J, Krishtal I. Exact reconstruction of signals in evolutionary systems via spatiotemporal trade-off. *J Fourier Anal Appl*, 2015, 21: 11–31
- 69 Xian J, Li S. Sampling and reconstruction for shift-invariant stochastic processes. *Stochastics*, 2014, 86: 125–134
- 70 Song Z, Sun W, Zhou X, et al. An average sampling theorem for bandlimited stochastic processes. *IEEE Trans Inform Theory*, 2007, 53: 4798–4800
- 71 Song Z, Sun W, Yang S, et al. Approximation of weak sense stationary stochastic processes from local averages. *Sci China Ser A*, 2007, 50: 457–463
- 72 Song Z, Liu B, Pang Y, et al. An improved Nyquist-Shannon irregular sampling theorem from local averages. *IEEE Trans Inform Theory*, 2012, 58: 6093–6100
- 73 Song Z. Approximation of multidimensional stochastic processes from average sampling. *J Inequal Appl*, 2012, 2012: 1–9
- 74 Sun W, Zhou X. Average sampling in shift invariant subspaces with symmetric averaging functions. *J Math Anal Appl*, 2003, 287: 279–295
- 75 Papoulis A. Error analysis in sampling theory. *IEEE*, 1966, 54: 947–955
- 76 Jagerman D. Bounds for truncation error of the sampling expansion. *SIAM J Appl Math*, 1966, 14: 714–723
- 77 Butzer P, Feichtinger H, Gröchenig K. Error analysis in regular and irregular sampling theory. *Appl Anal*, 1993, 50: 167–189
- 78 Brown J L. On mean-square aliasing error in the cardinal series expansion of random processes. *IEEE Trans Inform Theory*, 1978, 24: 254–256
- 79 Masry E. On the truncation error of the sampling expansion for stationary bandlimited processes. *IEEE Trans Signal Process*, 1994, 42: 2851–2853
- 80 Song Z, Zhou X, He G. Error estimate on non-bandlimited random signals by local averages. In: *Computational Science-ICCS. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3991. Berlin: Springer-Verlag, 2006, 822–825
- 81 Song Z, Yang S, Zhou X. Approximation of signals from local averages. *Appl Math Lett*, 2006, 19: 1414–1420
- 82 Standish C J. Two remarks on the reconstruction of sampled non-bandlimited functions. *IBM J Res Dev*, 1967, 11: 648–649
- 83 Stickler D C. An upper bound on aliasing error. *IEEE*, 1967, 55: 418–419
- 84 Brown J L. A least upper bound for aliasing error. *IEEE Trans Automat Control*, 1968, 13: 754–755
- 85 Splettstösser W, Törnig W. Error estimates for sampling approximation of non-bandlimited functions. *Math Methods Appl Sci*, 1979, 1: 127–137
- 86 Fang G. Whittaker-Kotelnikov-Shannon sampling theorem and aliasing error. *J Approx Theory*, 1996, 85: 115–131
- 87 Brown J L. Estimation of energy aliasing error for nonbandlimited signals. *Multidimens Syst Signal Process*, 2004, 15: 51–56
- 88 Olenko A Y, Pogány T K. Time shifted aliasing error upper bounds for truncated sampling cardinal series. *J Math Anal Appl*, 2006, 324: 262–280
- 89 Sharif B, Bresler Y. Upper bounds on aliasing error energy for multidimensional sampling of nonbandlimited signals. In: *Acoustics, Speech and Signal Processing*, 2008. ICASSP 2008. Las Vegas: IEEE, 2008, 3717–3720
- 90 Helms H D, Thomas J B. Truncation error of sampling-theorem expansions. *IRE*, 1962, 50: 179–184
- 91 Beutler F J. On the truncation error of the cardinal sampling expansion. *IEEE Trans Inform Theory*, 1976, 22: 568–573
- 92 Butzer P L, Engels W, Scheben U. Magnitude of the truncation error in sampling expansions of bandlimited signals. *IEEE Trans Acoust Speech Signal Process*, 1982, 30: 906–912
- 93 Li X M. Uniform bounds for sampling expansions. *J Approx Theory*, 1998, 93: 100–113
- 94 Atreas N D. New bounds for truncation-type errors on regular sampling expansions. *Numer Funct Anal Optim*, 2002, 23: 695–704
- 95 García A G, Perez-Villalón G. On the truncation error of generalized sampling expansions in shift-invariant spaces. *Sampl Theory Signal Image Process*, 2007, 6: 53–69
- 96 Tamberg G. On truncation errors of some generalized Shannon sampling operators. *Numer Algorithms*, 2010, 55: 367–382
- 97 Annaby M H, Asharabi R M. Truncation, amplitude, and jitter errors on $\mathbb{R}$ for sampling series derivatives. *J Approx Theory*, 2011, 163: 336–362
- 98 Micchelli C A, Xu Y, Zhang H. Optimal learning of bandlimited functions from localized sampling. *J Complexity*,

2009, 25: 85–114

99 Zhang H. Exponential approximation of bandlimited functions from average oversampling. ArXiv:1311.4294, 2013

100 Chen W, Zhang H. Exponential approximation of multivariate bandlimited functions from average oversampling. ArXiv:1412.4265, 2014

Average sampling theorem

HUO HaiYe & SUN WenChang

Abstract The sampling theorem is one of the fundamental and powerful tools in signal processing, which is widely used in digital signal processing, wireless communication, and many other fields. Recently, the classical Shannon sampling theorem has been extended from bandlimited functions to shift invariant subspaces, and from sampling function values to sampling local averages. In this paper, we simply review the development of the sampling theory with a focus on some recent advances in average sampling, multi-channel sampling and average sampling for stochastic processes. We also introduce some results on approximation errors.

Keywords average sampling, error estimate, frames, shift-invariant subspaces, band-limited functions

MSC(2010) 94A20, 42C15

doi: 10.1360/N012015-00026