中国科学: 数学 2018 年 第 48 卷 第 11 期: 1595～1614
SCIENTIA SINICA Mathematica
综 述

# 广义路代数及其在表示论中的意义

献给刘绍学教授 90 华诞

李方[1], 叶昌[2*]
1. 浙江大学数学科学学院, 杭州 310027;
2. 湖州师范学院数学系, 湖州 313000
E-mail: fangli@zju.edu.cn, yechang@zjhu.edu.cn

收稿日期: 2018-01-06; 接受日期: 2018-06-08; 网络出版日期: 2018-10-30; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11671350 和 11571173) 资助项目

**摘要** 刘绍学和 Coelho 于 2000 年引进了广义路代数的概念, 以期对代数的结构和表示进行更直接的刻画. 在随后的十几年, 广义路代数的方法获得了发展和应用. 本文是对这方面的一个总结和展示, 包括对广义路代数及其相关概念 (如三角矩阵代数等) 的结构和表示的介绍、用广义路 (余) 代数提出的对非基本 (非点) Hopf 代数的刻画的一个设想、广义路代数的变异以及一类广义路代数决定的丛代数的加法范畴化.

**关键词** 广义路代数 Gabriel 定理 模块 Hopf 代数 丛代数

**MSC (2010) 主题分类** 16G10, 16G20, 16G60, 16T05, 13F60

## 1 引言

代数闭域上的有限维基本代数是路代数的商代数这一事实在表示论中非常重要, 因为它给出了基本代数的结构的一种刻画, 据此提供了利用箭图给出基本代数各种不同例子的方法, 更重要的是, 可以用来刻画给定代数上的有限生成模. 但这个方法的局限性也是明显的. 首先在于它对基础域的要求仅限于代数闭域, 同时对每个有限维代数表示的刻画, 都必须通过其对应的基本代数. 针对这一问题, Coelho 和 Liu [1] 率先引进了广义路代数的概念, 希望对代数的结构和表示的研究有更直接的新的认识, 成为这一方法的开端.

在随后的研究中, 这个方法得到系统深入的发展, 如文献 [2–8] 等在这方面的工作. 同时, 我们发现, 事实上类似的方法在代数及其表示的各个方面先后也有出现, 并且可以利用广义路代数的思想统一起来思考和发展. 本文将从这一观点出发, 对这方面的工作做一个综述, 来展现这一方法的重要性, 从而说明刘绍学与合作者在这方面的早期工作对现在代数表示论的意义.

本文第 2 和 3 节是对已有研究的总结. 第 4 节是在已有结果基础上, 提出的一个对 Hopf 代数研究的总结性的新设想. 第 5 节从广义路代数出发对丛代数及其范畴化的讨论, 是首先在本文提出的.

**英文引用格式:** Li F, Ye C. Generalized path algebra and its significance in representation theory (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1595–1614, doi: 10.1360/N012018-00008

© 2018《中国科学》杂志社 

## 2 广义路代数的结构

### 2.1 广义路代数的定义及等价描述

设 $Q=(Q_0,Q_1)$ 是一个箭图, $k$ 为一个域, $\mathcal{A}=\{A_i:i\in Q_0\}$ 是一组含幺 $k$- 代数 $A_i$ 的集合, 下标是 $Q$ 的顶点. $\bigcup_{i\in Q_0}A_i$ 中的元素叫作长度为 0 的 $\mathcal{A}$- 路, 且对每个 $n\geqslant 1$, 一个长度为 $n$ 的 $\mathcal{A}$- 路是 $a_1\beta_1a_2\beta_2\cdots a_n\beta_na_{n+1}$, 其中 $(s(\beta_1)|\beta_1\cdots\beta_n|e(\beta_n))$ 是 $Q$ 中长度为 $n$ 的路, $s(\beta_i)$ 和 $e(\beta_i)$ 分别表示箭向 $\beta_i$ 的起点和终点, 对每个 $i=1,\ldots,n$, $a_i\in A_{s(\beta_i)}$, $a_{n+1}\in A_{e(\beta_n)}$.

现在考虑 $R$ 是由箭图 $Q$ 中所有 $\mathcal{A}$- 路为基生成的 $k$- 向量空间模去由形如 $a_1\beta_1\cdots\beta_{j-1}(a_j^1+\cdots+a_j^m)\beta_ja_{j+1}\cdots\beta_na_{n+1}-\sum_{\ell=1}^m a_1\beta_1\cdots\beta_{j-1}a_j^\ell\beta_j\cdots\beta_na_{n+1}$ 的元素生成的子空间所得到的商, 其中 $(s(\beta_1)|\beta_1\cdots\beta_n|e(\beta_n))$ 是 $Q$ 中长度为 $n$ 的路, 对每个 $i=1,\ldots,n$, $a_i\in A_{s(\beta_i)}$, $a_{n+1}\in A_{e(\beta_n)}$, 对 $\ell=1,\ldots,m$, 有 $a_j^\ell\in A_{s(\beta_j)}$. 现在在 $R$ 中定义以下乘法, 给出两个元素 $a_1\beta_1\cdots\beta_na_{n+1}$ 和 $b_1\gamma_1\cdots\gamma_mb_{m+1}$, 定义

$$(a_1\beta_1\cdots\beta_na_{n+1})(b_1\gamma_1\cdots\gamma_mb_{m+1})=a_1\beta_1\cdots\beta_n(a_{n+1}b_1)\gamma_1\cdots\gamma_mb_{m+1},$$

当 $a_{n+1}$ 和 $b_1$ 属于同一个 $A_i$, 否则令 $(a_1\beta_1\cdots\beta_na_{n+1})(b_1\gamma_1\cdots\gamma_mb_{m+1})=0$. 很容易验证上述 $R$ 中的乘法是好的定义, 并且给了 $R$ 一个 $k$- 代数结构. 同时, $R$ 有单位元当且仅当 $Q_0$ 是有限的. 上面定义的代数 $R$ 叫作 $Q$ 的 $\mathcal{A}$- 广义路代数, 记作 $R=k(Q,\mathcal{A})$. 这个概念最早由 Coelho 和 Liu[1] 给出.

文献 [4] 给出了张量代数意义下 $\mathcal{A}$- 广义路代数 $R=k(Q,\mathcal{A})$ 的等价定义.

令 ${}_iM_j$ 是由从 $i$ 到 $j$ 的箭向生成的自由 $A_i$-$A_j$- 双模, $M=\bigoplus_{(i,j)\in Q_0\times Q_0{}_iM_j}$, $A=\bigoplus_{i\in Q_0}A_i$. 定义当 $k\neq i$ 时, $A_k\cdot{}_iM_j=0$; 当 $k\neq j$ 时, ${}_iM_j\cdot A_k=0$, 则 ${}_iM_j$ 是一个 $A$-$A$- 双模.

显然, $M$ 是一个 $A$-$A$- 双模, 代数 $A\oplus M\oplus(M\otimes_kM)\oplus(M\otimes_kM\otimes_kM)\oplus\cdots$ 的乘法由张量积诱导出, 这时张量代数 $T(A,M)=k(Q,\mathcal{A})$.

给一个域 $k$ 上的有限维代数 $A$ 和一个有限无圈的箭图 $Q$, 定义 $Q$ 在 $A$ 上的路代数, 即所谓代数上的路代数 $AQ$ 如下: $AQ$ 中的元素写成有限和 $\sum_{p\in\mathrm{P}}a_pp$, 其中 $P$ 是 $Q$ 中所有路的集合, $a_p\in A$ 并且只有有限个 $a_p\neq 0$, 那么 $AQ$ 成为一个 $k$- 代数, 当它的乘法定义成

$$(a_pp)(b_qq)=(a_pb_q)(pq),$$

其中 $a_pb_q$ 是 $A$ 中的乘积, $pq$ 是 $kQ$ 中路的乘积. 我们有 $k$- 代数同构

$$AQ\cong A\otimes_kkQ\cong kQ\otimes_kA.$$

广义路代数与代数上的路代数的关系在文献 [9] 中给出, 即有 $AQ\cong k(Q,\mathcal{A})/I$, 其中每个 $A_i\in\mathcal{A}$ 都取 $A$, 关系 $I$ 是由 $\{a\alpha1_A-1_A\alpha a\mid a\in A,\alpha\in Q_1\}$ 生成的理想. 关于 $AQ$ 的模范畴的研究, 可参见文献 [10].

### 2.2 广义路代数的 Jacobson 根及组合刻画

Coelho 和 Liu[1] 给出了广义路代数的 Jacobson 根的刻画.

**定义 2.2.1** 设 $Q$ 是一个箭图, $\mathcal{A}=\{A_i:i\in Q_0\}$ 是一组 $k$- 代数的集合.

(1) 称 $Q$ 中的路 $(i|\beta_1\cdots\beta_n|j)$ 是正则的, 如果它不是 $Q$ 中某个定向圈的子路.

(2) 设 $(i|\beta_1\cdots\beta_n|j)$ 是 $Q$ 中的正则路, 则称任意的 $\mathcal{A}$- 路 $a\beta_1\cdots\beta_nb$ 是正则的, 这里 $a\in A_i$, $b\in A_j$. 如果没有定向圈通过顶点 $i$, 我们也称 $J(A_i)$ 中的元素是长度为 0 的正则 $\mathcal{A}$- 路.

**命题 2.2.1** [1] 设 $R = k(Q, \mathcal{A})$ 是一个广义路代数, 则 $R$ 的 Jacobson 根 $J(R)$ 就是由所有 $R$ 的正则路生成的子空间.

**推论 2.2.1** [1] 设 $R = k(Q, \mathcal{A})$ 是一个广义路代数, 则 $R$ 是半本原代数当且仅当 $Q$ 没有正则路并且当 $i$ 是孤立点时有 $J(A_i) = 0$.

Coelho 和 Liu [1] 给出了判断一个广义路代数是素代数和 Noether 代数的等价刻画.

**定义 2.2.2** 称一个箭图 $Q$ 是定向连通的, 如果对任意不同的顶点 $i$ 和 $j$ 存在从 $i$ 到 $j$ 的路.

**定理 2.2.1** [1] 设箭图 $Q$ 是连通的且至少有两个顶点, $R = k(Q, \mathcal{A})$ 是一个广义路代数, 则以下条件等价:

(1) $R$ 是素代数;

(2) $Q$ 是定向连通的;

(3) $R$ 中没有正则 $\mathcal{A}$- 路.

**定理 2.2.2** [1] 设 $R = k(Q, \mathcal{A})$ 是一个广义路代数, 则 $R$ 是 Noether 的当且仅当 $Q$ 是有限的, 且对 $Q$ 的任意连通分支 $\Gamma$ 满足以下某种情形:

(1) $\Gamma = \{i\}$ 是一个孤立点且 $A_i$ 是 Noether 的;

(2) $\Gamma$ 没有定向圈, 且对每个顶点 $i$, $A_i$ 是有限维的;

(3) $\Gamma$ 是一个圈, 且对每个顶点 $i$, $A_i$ 是一维的.

文献 [1] 还给出了广义路代数的同构问题的刻画.

**定理 2.2.3** [1] 设 $Q$ 和 $\Gamma$ 是有限无圈箭图, 且每个 $A_i$ $(i \in Q_0)$ 和 $B_j$ $(j \in \Gamma_0)$ 是有限维的且只有唯一的非零幂等元, 则广义路代数的同构 $\Phi : k(Q, \mathcal{A}) \to k(\Gamma, \mathcal{B})$ 诱导出箭图的同构 $\Psi : Q \to \Gamma$ 使得对每个 $i \in Q_0$ 有 $A_i \cong B_{\Psi(i)}$.

称一个广义路代数 $k(Q, \mathcal{A})$ 是正规的, 如果对所有 $i \in Q_0, A_i$ 是单代数.

文献 [11, 定理 6.4–6.6] 给出了上述结论的改进结果, 即如下:

**定理 2.2.4** [11] (1) 设 $Q$ 和 $\Gamma$ 是有限无圈箭图, 且每个 $A_i$ $(i \in Q_0$ 和 $B_j$ $(j \in \Gamma_0)$ 是不可分解代数, 则广义路代数的同构 $\Phi : k(Q, \mathcal{A}) \to k(\Gamma, \mathcal{B})$ 诱导出箭图的同构 $\Psi : Q \to \Gamma$ 使得对每个 $i \in Q_0$ 有 $A_i/r(A_i) = B_{\Psi(a)}/r(B_{\Psi(a)})$. 特别地, 两个正规的广义路代数有同构 $\Phi : k(Q, \mathcal{A}) \to k(\Gamma, \mathcal{B})$ 当且仅当有箭图的同构 $\Psi : Q \to \Gamma$ 且对每个 $i \in Q_0$, 有 $A_i \cong B_{\Psi(a)}$.

(2) 如果两个带关系的正规广义路代数 $k(Q, \mathcal{A}, \rho) \cong k(Q', \mathcal{A}', \rho')$ 作为代数同构, 其中两个关系集合分别满足对某些正整数 $s$ 和 $t$, 有 $J^s \subseteq (\rho) \subseteq J^2$ 和 $J'^t \subseteq (\rho') \subseteq J'^2$, 则在同构意义下, $Q \cong Q'$ 且在重新标号 $Q'$ 中的点后有 $A_i \cong A'_i$.

### 2.3 广义路代数的结构刻画

有很多文献对广义路代数的结构进行了研究.

Cobos 等 [6] 给出了广义路代数的 Gabriel 箭图的刻画.

**定理 2.3.1** [6] 设 $Q$ 是有限无圈箭图, $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$ 是顶点的集合. $k$ 是代数闭域, $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ 是一组有限维基础 $k$- 代数的集合. 假设 $\mathfrak{Q} = \{Q_1, \ldots, Q_n\}$ 是一组箭图使得 $A_i \cong kQ_i/(\Omega_i)$ 对 $i = 1, \ldots, n$ 成立, 其中 $\Omega_i$ 是 $kQ_i$ 的容许理想, 那么,

$$k(Q, \mathcal{A}) \cong kQ_{\mathfrak{Q}}/(\Omega_1, \ldots, \Omega_n).$$

这里的 $Q_{\mathfrak{Q}}$ 定义如下:

(1) 顶点 $(Q_{\mathfrak{Q}})_0 = \bigcup_{i\in Q_0}(Q_i)_0$.

(2) 对任意顶点 $a \in Q_i$ 和 $b \in Q_j$, 如果 $i = j$, 则 $a$ 到 $b$ 的箭向个数等于在 $Q_i$ 中 $a$ 到 $b$ 的箭向个数; 如果 $i \neq j$, 则 $a$ 到 $b$ 的箭向个数等于在 $Q$ 中 $i$ 到 $j$ 的箭向个数.

给定一个 Artin 代数 $A$, 令 $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ 为互不同构单 $A$- 模的完全集. 定义箭图 $\Gamma_A$, 称为 $A$ 的 Ext- 箭图, 它的顶点的集合为 $\Gamma_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$, 从 $i$ 到 $j$ 的箭向个数 $m_{ij}$ 为维数 $\dim_k \mathrm{Ext}_A(S_i, S_j)$.

设 $r = r(A)$ 是 $A$ 的根, 记 $A/r = \bigoplus_{i=1}^{s} \bar{A}_i$, 其中对每个 $i$, $\bar{A}_i$ 是 $A/r$ 的一个单理想, 则 $r/r^2$ 是一个 $A/r$ 双模, 其模作用为 $\bar{a} \cdot (r/r^2) \cdot \bar{b} = arb/r^2$ 对任意的 $\bar{a} = a + r$, 有 $\bar{b} = b + r \in A/r$. 令 ${}_iM_j = \bar{A}_i \cdot r/r^2 \cdot \bar{A}_j$, 则对任意 $i$ 和 $j$, ${}_iM_j$ 是有限生成 $\bar{A}_i$-$\bar{A}_j$- 双模.

定义一个箭图 $\Delta_A$, 称为 $A$ 的自然箭图, 它的顶点的集合为 $\Delta_0 = \{1, 2, \ldots, s\}$; 从 $i$ 到 $j$ 的箭向个数 $t_{ij}$ 为有限生成 $\bar{A}_j$-$\bar{A}_i$- 双模 ${}_jM_i$ 的秩. 显然, 当 ${}_jM_i = 0$ 时, 从 $i$ 到 $j$ 没有箭向. 这个定义最早在文献 [2] 中给出, 作者希望通过 Artin 代数的自然箭图上的广义路代数来将 Gabriel 定理推广到非基础代数的情形.

**注 2.3.1** 一个有限生成的 $A$-$B$- 双模 $M$ 的秩定义为所有生成子集合的势的最小值.

对于一个 Artin 代数 $A$, 分解 $A/r = \bigoplus_{i=1}^{s} \bar{A}_i$ 为 $A/r$ 的单的左理想的直和, 存在一个相应的正规广义路代数 $k(\Delta_A, \mathcal{A})$, 其中 $\Delta_A$ 是 $A$ 的自然箭图, $\mathcal{A} = \{\bar{A}_i \mid i = 1, 2, \ldots, s\}$. 如果存在一个 $k(\Delta_A, \mathcal{A})$ 的理想 $I$ 使得 $A = k(\Delta_A, \mathcal{A})/I$, 则称 $A$ 是 Gabriel- 型代数.

**定理 2.3.2** [5] 假设 $A$ 是以 $r = r(A)$ 为根的一个 Artin 代数, 分解 $A/r = \bigoplus_{i=1}^{p} \bar{A}_i$ 为 $A/r$ 的单的左理想的直和. 如果存在一个箭图 $Q$ 和一个由单代数构成的集合 $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_q\}$ 使得

$$A \cong k(Q, \mathcal{B})/I,$$

其中 $I$ 是 $k(Q, \mathcal{B})$ 中一个满足 $J^s \subseteq I \subseteq J^2$ 的理想, 这里 $J$ 是 $k(Q, \mathcal{B})$ 中由长度为 1 的所有 $\mathcal{B}$- 路生成的理想, $s$ 为一个正整数, 则 $Q$ 恰好是 $A$ 的自然箭图 $\Delta_A$, 且 $p = q$ 使得重新标号后对于 $i = 1, \ldots, p$, 有 $\bar{A}_i \cong B_i$, 即 $A$ 是 Gabriel- 型代数.

称一个 $k$- 代数 $A$ 在它的根 $r$ 上可裂, 如果存在一个 $k$- 代数同态 $\rho : A/r \to A$ 使得 $\pi \circ \rho = Id_{A/r}$, 这里 $\pi$ 是 $A$ 到 $A/r$ 的投影映射.

**定理 2.3.3** [4] 一个 Artin 代数 $A$ 在它的根上可裂当且仅当 $A$ 是 Gabriel- 型代数.

**定义 2.3.1** 一个赋值箭图 $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{D}, \Omega)$ 由以下几部分组成:

(i) 一个有限集合 $\mathfrak{Y} = \{i, j, \ldots\}$ 称为顶点;

(ii) 集合 $\mathfrak{D} = \{(d_{ij}, d_{ji}) \mid (i, j) \in \mathfrak{Y} \times \mathfrak{Y}\}$ 称为 $\mathfrak{Y}$ 的赋值, 其中 $d_{ij}$ 为非负整数使得存在正整数 $\varepsilon_i (i \in \mathfrak{Y})$ 满足 $d_{ij}\varepsilon_j = d_{ji}\varepsilon_i$ 对所有 $i, j \in \mathfrak{Y}$ 成立. 若 $d_{ij} \neq 0$, 称 $(i, j)$ 为顶点 $i$ 与 $j$ 之间的边.

(iii) 定向 $\Omega$ 给每一条边一个排序.

**定义 2.3.2** 一个 Artin 代数 $A$ 的自然赋值箭图是指由 $k(\Delta_A, \mathcal{A})$ 诱导的赋值箭图 $((\Delta_0)_A, \mathfrak{D}, \Omega)$, 其中 $(\Delta_0)_A$ 是 $\Delta_A$ 的顶点, $\mathfrak{D} = \{(d_{ij}, d_{ji}) \mid (i, j) \in Q_0 \times Q_0\}$, 这里 $d_{ij} = \mathrm{rank}({}_iM_j)_{A_j}$, $d_{ji} = \mathrm{rank}_{A_i}({}_iM_j)$, ${}_iM_j$ 是由从 $i$ 到 $j$ 的箭向生成的自由 $A_i$-$A_j$- 双模, 定向 $\Omega$ 是当 ${}_iM_j \neq 0$ 时存在唯一的从 $i$ 到 $j$ 的定向边.

**定义 2.3.3** 一个 Artin 代数 $A$, 令 $A/r = \bigoplus_{i=1}^{s} \bar{A}_i$, 其中 $A_i \cong M_{n_i}(D_i)$, $D_i$ 是可除 $k$- 代数对 $i = 1, \ldots, s$. 记 $\{T_i\}_{i=1}^{s}$ 为 $A$ 的非同构单模的完全集. 定义赋值 Ext- 箭图 $(\mathfrak{L}_A, \mathfrak{F}, \Upsilon)$ 如下:

(i) $\mathfrak{L}_A = \{1, \ldots, s\}$.

(ii) 对 $i, j \in \mathfrak{L}_A$, 若 $\mathrm{Ext}_A^1(T_j, T_i) \neq 0$, 则有从 $i$ 到 $j$ 的定向边. 这样得到一个定向 $\Upsilon$.

(iii) 对 $i,j\in\mathfrak{L}_A$, 若 $\mathrm{Ext}_A^1(T_j,T_i)\neq 0$, 令 $e_{ij}=\dim_{D_i}\mathrm{Ext}_A^1(T_j,T_i)$, $e_{ji}=\dim_{D_j^{\mathrm{op}}}\mathrm{Ext}_A^1(T_j,T_i)$, 定义赋值 $\mathfrak{F}=\{(e_{ij},e_{ji})\mid(i,j)\in\mathfrak{L}\times\mathfrak{L}\}$.

当 Artin 代数 $A$ 是基本代数时, 它的自然赋值箭图与赋值 Ext- 箭图是赋值相反的赋值箭图. 在一般情形下, 有如下结论:

**定理 2.3.4** [3] 对 Artin 代数 $A$, 它的自然赋值箭图 $((\Delta_0)_A,\mathfrak{D},\Omega)$ 和赋值 Ext- 箭图 $(\mathfrak{L}_A,\mathfrak{F},\Upsilon)$ 满足如下关系:

(i) 顶点相同, 即 $(\Delta_0)_A=\mathfrak{L}_A$;

(ii) 定向相同, 即 $\Omega=\Upsilon$;

(iii) 赋值 $\mathfrak{D}=\{(d_{ij},d_{ji})\mid(i,j)\in(\Delta_0)_A\times(\Delta_0)_A\}$ 和 $\mathfrak{F}=\{(e_{ij},e_{ji})\mid(i,j)\in\mathfrak{L}_A\times\mathfrak{L}_A\}$ 满足公式

$$d_{ji}=e_{ij}n_j^2\frac{t_{ij}}{m_{ij}},\quad d_{ij}=e_{ji}n_i^2\frac{t_{ij}}{m_{ij}}$$

对任意顶点 $i$ 和 $j$ 成立, 这里 $t_{ij}$ 是 $A$ 的自然箭图 $\Delta_A$ 中从 $i$ 到 $j$ 的箭向的个数, $m_{ij}$ 是 $A$ 相应的基本代数 $B$ 的自然箭图 $\Delta_B$ 中从 $i$ 到 $j$ 的箭向个数, $n_i=\dim_k S_i/(\dim_k\mathrm{End}_A S_i)$ 对 $A$ 的单模 $S_i$ 在顶点 $i$.

特别地, 当 $A$ 是 $k$- 可裂 Artin 代数时, 对任意顶点 $i$ 和 $j$, 有

$$d_{ji}=e_{ij}n_j^2\frac{1}{m_{ij}}\left\lceil\frac{m_{ij}}{n_in_j}\right\rceil,\quad d_{ij}=e_{ji}n_i^2\frac{1}{m_{ij}}\left\lceil\frac{m_{ij}}{n_in_j}\right\rceil,$$

其中 $\lceil a\rceil=\min\{n\in\mathcal{Z}\mid n\geqslant a\}$.

上述用广义路代数刻画的 Gabriel 定理都是对 Artin 代数甚至是对有限维代数的. 目前对于非 Artin 代数的情形的讨论, 只有在文献 [12] 中对于具弱序乘法基的代数的研究, 我们对文献 [12] 中的这个研究简述如下.

对一个 $k$- 代数 $R$, 它的两个子集 $S$ 和 $T$, 记 $ST=\{st\mid s\in S,t\in T\}\setminus\{0\}$. 若 $S^2\subseteq S\cup\{0\}$, 则称 $S$ 是 0- 封闭的. 如果一个集合 $\mathcal{B}=\{b_\omega\in R:\omega\in\Omega\}$ 是 0- 封闭的且是 $R$ 的一组基, 则 $\mathcal{B}$ 叫作 $R$ 的乘法基.

类似于文献 [13], 在文献 [12] 中, $>$ 称为是 $\mathcal{B}$ 的一个弱允许序, 如果以下性质成立:

(W0) $>$ 在 $\mathcal{B}$ 中是一个良序;

(W1) 对所有 $b_1,b_2,b_3\in\mathcal{B}$, 若 $b_1>b_2$ 且 $b_1b_3$ 和 $b_2b_3$ 都不为 0, 则 $b_1b_3>b_2b_3$;

(W2) 对所有 $b_1,b_2,b_3\in\mathcal{B}$, 若 $b_1>b_2$ 且 $b_3b_1$ 和 $b_3b_2$ 都不为 0, 则 $b_3b_1>b_3b_2$;

(W3) 对所有 $b_1,b_3\in\mathcal{B}$, 若存在 $b_2,b_4\in\mathcal{B}\setminus\mathcal{V}$ 使得 $b_1=b_2b_3b_4$, 则 $b_1\geqslant b_3$, 这里

$$\mathcal{V}=\{b\in\mathcal{B}:\exists\, b^{-1}\in\mathcal{B},\text{s.t. } bb^{-1}\text{ 和 }b^{-1}b\text{ 是不同的幂等元}\}.$$

称 $R$ 有一个弱序乘法基 $(\mathcal{B},>)$, 若 $R$ 有一组乘法基 $\mathcal{B}$ 且 $\mathcal{B}$ 有一个弱允许序 $>$.

**定理 2.3.5** [12] 设 $R$ 是一个有弱序乘法基 $(\mathcal{B},>)$ 的 $k$- 代数, $k(Q,\mathcal{A})$ 是由上面定义的广义路代数, 则存在一个满的代数同态 $\phi:k(Q,\mathcal{A})\to R$.

## 3 广义路代数的表示

本节介绍广义路代数的表示方面的研究.

### 3.1 模块及其表示

对广义路代数 $k(Q,\mathcal{A})$, 称 $X=(X_i,\varphi_{jk})_{i,j,k\in Q_0}$ 为 $k(Q,\mathcal{A})$ 的一个表示, 若 $X_i$ 是 $A_i$- 模, $\varphi_{jk}: M(j,k)\otimes_{A_k}X_k\to X_j$ 是 $A_j$- 模同态, 其中

$$M(j,k)=A_j\Omega(j,k)A_k,\quad \Omega(j,k)=\{\alpha\in Q_1\mid s(\alpha)=k,e(\alpha)=j\}.$$

一个从表示 $X$ 到表示 $Y$ 的态射 $f$ 定义为一族同态 $(f_i,i\in Q_0)$, 其中对每个 $i\in Q_0$, $f_i:X_i\to Y_i$ 是 $A_i$- 模同态, 使得 $f_i\varphi_{ij}=\varphi_{ij}(\mathrm{id}_{M_{i,j}}\otimes f_j)$ 对所有 $\varphi_{ij}$ 成立.

还有另外一种 $k(Q,\mathcal{A})$ 的表示的定义. 一个 $k(Q,\mathcal{A})$ 的广义 $k$- 线性表示是一族 "模与映射" 对 $X=(X_i,X_\alpha)_{i\in Q_0,\alpha\in Q_1}$, 满足对每个 $i\in Q_0, X_i$ 是 $A_i$- 模; 对每个 $Q_1$ 中的箭向 $\alpha:i\to j$, $X_\alpha:X_i\to X_j$ 是一个 $k$- 线性映射. 一个从表示 $X$ 到表示 $Y$ 的态射 $f$ 被定义为一族同态 $(f_i,\ i\in Q_0)$, 其中对每个 $i\in Q_0$, $f_i:X_i\to Y_i$ 是一个 $A_i$- 模同态, 使得对每个 $\alpha:j\to i$, 有 $f_iX_\alpha=Y_\alpha f_j$.

事实上, 这两个定义是等价的. 定义函子 $F:=F(X_i,\varphi_{jk})_{i,j,k\in Q_0}=(X_i,X_\alpha)_{i\in Q_0,\alpha\in Q_1}$ 使得对任意 $\alpha:j\to k$ 有 $X_\alpha(X_j)=\varphi_{jk}(1_{A_k}\alpha 1_{A_j}\otimes X_j)$. 容易验证函子 $F$ 是一个范畴等价的函子.

**定义 3.1.1** 一个赋值箭图 $(\mathfrak{Y},\mathfrak{D},\Omega)$ 的 $k$- 模块 (modulation) $\mathcal{M}=(F_i,{}_iM_j)$ 是一组在公共中心子域 $k$ 上的有限维可除代数 $\{F_i\}_{i\in\mathfrak{Y}}$ 以及一组 $F_i$-$F_j$- 双模 $\{{}_iM_j\}_{i,j\in\mathfrak{Y}}$ 使得 $\dim({}_iM_j)_{F_j}=d_{ij}$, $\dim_{F_i}({}_iM_j)=d_{ji}\cdot{}_jM_i$ 是双模 ${}_iM_j$ 的对偶, 满足双模同构

$${}_jM_i\cong\mathrm{Hom}_{F_i}({}_iM_j,F_i)\cong\mathrm{Hom}_{F_j}({}_iM_j,F_j).$$

**定义 3.1.2** (i) 一个伪赋值箭图 $(\mathfrak{Y},\mathfrak{D},\Omega)$ 的 $k$- 伪模块 $\mathcal{M}=(A_i,{}_iM_j)$ 是指一组 Artin $k$- 代数 $\{A_i\}_{i\in\mathfrak{Y}}$ 和一组有限生成含幺 $A_i$-$A_j$- 双模 $\{{}_iM_j\}_{(i,j)\in\mathfrak{Y}\times\mathfrak{Y}}$ 使得

$$\mathrm{rank}({}_iM_j)_{A_j}=d_{ij},\quad \mathrm{rank}_{A_i}({}_iM_j)=d_{ji}.$$

(ii) 一个伪赋值箭图 $(\mathfrak{Y},\mathfrak{D},\Omega)$ 的 $k$- 伪模块 $\mathcal{M}=(A_i,{}_iM_j)$ 称为 (半) 正规的, 如果对所有的 $i\in\mathfrak{Y}$, $A_i$ 是 (半) 单代数.

(iii) 一个伪赋值箭图 $(\mathfrak{Y},\mathfrak{D},\Omega)$ 的 $k$- 伪模块 $\mathcal{M}=(A_i,{}_iM_j)$ 称为 $k$- 预模块的, 如果所有的 $i,j\in\mathfrak{Y}$, ${}_iM_j$ 是自由 $A_i$-$A_j$- 双模.

(iv) 一个 $k$- 预模块称为正则的, 如果对所有 $i,j\in\mathfrak{Y}$, 它满足 $A_i$-$A_j$- 双模同构 $\mathrm{Hom}_{A_i}({}_iM_j,A_i)\cong\mathrm{Hom}_{A_j}({}_iM_j,A_j)$.

**定理 3.1.1** [3] 伪模块和有限生成双模的 $\mathcal{A}$- 路型张量代数可以唯一地相互构造.

对一个伪赋值箭图 $(\mathfrak{Y},\mathfrak{D},\Omega)$ 的 $k$- 伪模块 $\mathcal{M}=(A_i,{}_jM_k)$, 定义 $\mathcal{M}$ 的一个表示为一个对象 $\mathcal{V}=(V_i,{}_j\varphi_k)$, 其中对每个顶点 $i\in\mathfrak{Y}$ 对应一个 $A_i$- 模 $V_i$, 对每个箭向 $k\to j$ 对应一个 $A_j$- 模同态 ${}_j\varphi_k:{}_jM_k\otimes_{A_k}V_k\to V_j$. 从一个表示 $\mathcal{V}=(V_i,{}_j\varphi_k)$ 到另一个表示 $\mathcal{U}=(U_i,{}_j\psi_k)$ 的态射是一系列 $A_i$- 模同态 $\alpha_i:V_i\to U_i$ 使得对每个箭向 $i\to j$ 有以下交换图成立:

$$\begin{tikzcd}
{}_jM_k\otimes_{A_k}V_k \arrow[r, "{}_j\varphi_k"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{{}_jM_k}\otimes_{A_k}\alpha_k"'] & V_j \arrow[d, "\alpha_j"'] \\
{}_jM_k\otimes_{A_k}V_k \arrow[r, "{}_j\psi_k"] & U_j.
\end{tikzcd}$$

**定理 3.1.2** [3] (1) 令 $\mathcal{M}=(A_i,{}_iM_j)$ 是伪赋值箭图 $(\mathfrak{Y},\mathfrak{D},\Omega)$ 的 $k$- 伪模块, 则 $\mathcal{M}$ 的所有表示构成的范畴 $\mathrm{Rep}(\mathcal{M})$ 范畴等价于右 $T(\mathcal{M})$- 模范畴 $\mathrm{Mod}_{T(\mathcal{M})}$. 类似地, $\mathcal{M}$ 的所有有限生成表示构成的范畴 $\mathrm{rep}(\mathcal{M})$ 范畴等价于有限生成右 $T(\mathcal{M})$- 模范畴 $\mathrm{mod}_{T(\mathcal{M})}$.

(2) 对广义路代数 $k(Q,\mathcal{A})$ 和相应的 $k$- 预模块 $\mathcal{M}=(A_i,{}_iM_j)$, 范畴 $\mathrm{Rep}(\mathcal{M})$ 和 $\mathrm{rep}(\mathcal{M})$ 分别等价于范畴 $\mathrm{Mod}(k(Q,\mathcal{A}))$ 和 $\mathrm{mod}(k(Q,\mathcal{A}))$.

**推论 3.1.1** [3] 对一个根为 $r$ 的有限维遗传代数 $A$, 它的伪赋值箭图 $(\mathcal{G},\mathcal{D},\Omega)$ 对应的伪模块 $\mathcal{M}=(A_i,\,{}_iM_j)$, 如果 $A/r$ 是可分的, 则 (有限) 表示范畴 $\mathrm{Rep}(\mathcal{M})$ $(\mathrm{rep}(\mathcal{M}))$ 范畴等价于 (有限生成) 模范畴 $\mathrm{Mod}_A$ $(\mathrm{mod}_A)$.

**定理 3.1.3** [3] 预模块和广义路代数可以相互构造. 当域 $k$ 是特征为 0 的代数闭域时, (半) 正规预模块都是 (半) 正规正则模块.

模块的一些例子在文献 [3] 中给出, 见第 3.1.1–3.1.3 小节.

### 3.1.1 群样本 (group species)

Demonet [14] 引进了群样本的概念, 即一个群样本是一个三元组 $(I,(\Gamma_i)_{i\in I},(M_{ij})_{(i,j)\in I^2})$, 其中 $I$ 是一个有限集合; 对 $i\in I$, $\Gamma_i$ 是有限群; 对每个 $(i,j)\in I^2$, $M_{ij}$ 是有限维 $(k[\Gamma_i],k[\Gamma_j])$- 双模.

群样本 $(I,(\Gamma_i)_{i\in I},(M_{ij})_{(i,j)\in I^2})$ 的表示是一个二元组 $((V_i)_{i\in I},(x_{jk})_{(j.k)\in I^2})$, 其中对每个 $i\in I$, $V_i$ 是有限维左 $k[\Gamma_i]$- 模, 对每个 $(j,k)\in I^2$, 有 $x_{jk}\in\mathrm{Hom}_{\Gamma_j}(M_{jk}\otimes_{\Gamma_k}V_k,V_j)$.

令 $((V_i)_{i\in I},(x_{jk})_{(j.k)\in I^2})$ 和 $((V_i')_{i\in I},(x_{jk}')_{(j.k)\in I^2})$ 是群样本 $(I,(\Gamma_i)_{i\in I},(M_{ij})_{(i,j)\in I^2})$ 的两个表示. 它们之间的一个态射是一组 $(f_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\Gamma_i}(V_i,V_i')$ 使得对每个 $(i,j)\in I^2$ 有以下交换图成立:

$$\begin{tikzcd}
M_{jk}\otimes_{\Gamma_k}V_k \arrow[r, "x_{jk}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M_{jk}}\otimes f_k"'] & V_j \arrow[d, "f_j"'] \\
M_{jk}\otimes_{\Gamma_k}V_k' \arrow[r, "x_{jk}'"] & V_j'.
\end{tikzcd}$$

显然, 一个群样本 $(I,(\Gamma_i)_{i\in I},(M_{ij})_{(i,j)\in I^2})$ 可以看成某个伪赋值箭图的 $k$- 伪模块. 事实上, 令伪赋值箭图 $(\mathfrak{Y},\mathfrak{D},\Omega)$ 的顶点 $\mathfrak{Y}=I$, 定义赋值 $\mathfrak{D}=\{(d_{ij},d_{ji})\mid(i,j)\in\mathfrak{Y}\times\mathfrak{Y}\}$, 其中 $d_{ij}=\mathrm{rank}({}_{k\Gamma_i}M_{ij})$, $d_{ji}=\mathrm{rank}(M_{ij}{}_{k\Gamma_j})$; 对每个 $(i,j)$, 若 $M_{ij}\neq 0$, 给一个从 $i$ 到 $j$ 的定向, 则给出了一个定向 $\Omega$. 那么, 群样本 $(I,(\Gamma_i)_{i\in I},(A_{ij})_{(i,j)\in I^2})$ 可以看成伪赋值箭图 $(\mathfrak{Y},\mathfrak{D},\Omega)$ 的 $k$- 伪模块 $((k\Gamma_i)_{i\in\mathfrak{Y}},(M_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{Y}\times\mathfrak{Y}})$. 这时, 它作为群样本的表示和表示态射, 恰好是它作为伪模块的表示和表示态射.

当 $k$ 是特征为 0 的代数闭域时, 所有的 $k\Gamma_i$ 都是半单代数, 所以, 群样本对应的 $k$- 伪模块是半正规的.

群样本进一步可以与丛代数 (见后面第 5 节) 理论联系起来. 在非退化的情形下, 文献 [14] 给出的群样本的变异定义与本文第 5.2 小节对广义路代数的变异一致, 类似于 Fomin-Zelevinsky 定义的种子的变异, 其换位矩阵是由群样本得到的可斜对称化的矩阵. 当换位矩阵是由带势的群样本给出时, 文献 [14] 就群样本的变异及其装饰表示给出了丛代数中 $F$- 多项式和 $g$- 向量的解释. 丛代数的相关内容见第 5 节及文献 [14].

### 3.1.2 微分张量代数 (differential tensor algebra)

一个张量代数 $T=T(A,M)$ 上有一个自然的分次, 即对所有 $l\geqslant 0$ 有 $T_l=M^{\otimes l}$, 其中 $T_0=A$.

对一个分次 $k$- 代数 $T$, 称一个 $T$ 上的线性变换 $\delta$ 是微分, 如果它满足对所有 $i$ 有 $\delta[T]_i \subseteq [T]_{i+1}$, 且对所有齐次元素 $a, b \in T$ 有 Leibniz 法则 $\delta(ab) = \delta(a)b + (-1)^{\deg(a)} a\delta(b)$ 成立.

一个微分张量代数 $A$ 是一个二元组 $A = (T, \delta)$, 其中 $T$ 是一个张量代数, $\delta$ 是 $T$ 上的微分且满足 $\delta^2 = 0$. 微分张量代数及其表示参见文献 [15].

**定义 3.1.3** (1) 给定一个伪赋值箭图 $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{D}, \Omega)$ 的 $k$- 伪模块 $\mathcal{M} = (A_i,_i M_j)$ 和它对应的 $\mathcal{A}$- 路型张量代数 $T(A, M)$, 一个线性变换 $\delta : T(A, M) \to T(A, M)$ 称为 $\mathcal{M}$ 上的微分, 如果 $\delta$ 满足:

(i) $\delta(A_i) \subseteq_i M_i$;

(ii) $\delta({}_iM_{i_1} \otimes_{A_{i_1}} \cdots \otimes_{A_{i_{s-1}} i_{s-1}} M_j) \subseteq \sum_{l \in \mathfrak{Y}i} M_l \otimes_{A_l l} M_{i_1} \otimes_{A_{i_1}} \cdots \otimes_{A_{i_{s-1}} i_{s-1}} M_j + \sum_{l \in \mathfrak{Y}i} M_{i_1} \otimes_{A_{i_1} i_1} M_l \otimes_{A_l l} M_{i_2} \otimes_{A_{i_2}} \cdots \otimes_{A_{i_{s-1}} i_{s-1}} M_j + \cdots + \sum_{l \in \mathfrak{Y}i} M_{i_1} \otimes_{A_{i_1}} \cdots \otimes_{A_{i_{s-1}} i_{s-1}} M_l \otimes_{A_l l} M_j$, 并且对任意的 $a \in_i M_{i_1} \otimes \cdots \otimes_{i_{s-1}} M_j$ 和 $b \in_u M_{u_1} \otimes \cdots \otimes_{u_{t-1}} M_v$ 有如下 Leibniz 法则成立:

$$\delta(ab) = \delta(a)b + (-1)^{\deg(a)} a\delta(b).$$

(2) 一个微分伪模块 $\mathcal{M}$ 定义为一个二元组 $(\mathcal{M}, \delta)$, 其中 $\delta$ 是 $\mathcal{M}$ 上的微分且满足 $\delta^2 = 0$.

容易验证 Leibniz 法则对 $T(A, M)$ 的自然分次上的所有齐次元素都成立, 所以, 微分伪模块 $\mathcal{M}$ 的张量代数 $T(A, M)$ 是一个以 $\delta$ 为微分的微分张量代数.

### 3.1.3 微分分次范畴 (differential graded category)

一个范畴 $\mathcal{J}$ 称为分次范畴, 如果对任意对象 $a, b \in \mathcal{J}$, 态射 $\mathrm{Hom}(a, b)$ 是态射 $T_i(a, b)$ 的集合, 其中 $0 \leqslant i < +\infty$, 且满足对任意 $\alpha \in T_i(a, b)$, $\beta \in T_j(b, c)$, 有 $\beta\alpha \in T_{i+j}(a, c)$. 称 $\alpha$ 的阶数为 $i$, 参见文献 [16,17].

对一个给定的正整数 $n$, 一个分次范畴 $\mathcal{J}$ 称为微分 $n$- 分次范畴, 若对 $T = \bigoplus_{a,b \in \mathcal{J}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{J}}(a, b)$ 存在一个 $k$- 线性映射 $D : T \to T$ 使得 $D^2 = 0, D(T_i(a, b)) \subseteq T_{i+n}(a, b)$ 对每个 $a, b \in \mathcal{J}, i \geqslant 0$ 成立, 以及对所有齐次元素 $\alpha, \beta \in T$ 有 Leibniz 法则 $D(\beta\alpha) = D(\beta)\alpha + (-1)^{n\deg(\beta)} \beta D(\alpha)$ 成立. 这个 $D$ 称为 $\mathcal{J}$ 的 $n$- 微分.

由文献 [18] 知, 对范畴 $\mathcal{H}$ 上任意的双模 $\mathcal{M}$, 我们可以构造 $\mathcal{M}$ 的张量范畴 $T(\mathcal{M})$, 即一个分次范畴 $T(\mathcal{M})$ 使得 $T_0 = \mathcal{M}, T_1 = \mathcal{M}, \ldots, T_n = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{H}} \cdots \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{M}$, 这里 $T_n$ 是 $n$ 个 $\mathcal{M}$ 的张量.

对一个伪赋值箭图 $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{D}, \Omega)$ 的 $k$- 伪模块 $\mathcal{M} = (A_i,_a M_b)$ 和它对应的 $\mathcal{A}$- 路型张量代数 $T(\mathcal{M}) := T(A, M)$, 我们可以定义一个分次范畴 $\mathcal{J}$: 它的对象就是 $\mathfrak{Y}$ 中的顶点; 对 $a, b \in \mathfrak{Y}$, 它的态射是

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{J}}(a, b) = \bigcup_{i \geqslant 0} T_i(a, b),$$

其中

$$T_i(a, b) = \Sigma_{(a\alpha_1 a_1 \alpha_2 a_2 \cdots a_{i-1} \alpha_i b)a} M_{a_i} \otimes_{A_{a_l} a_l} M_{a_2} \otimes_{A_{a_2}} \cdots \otimes_{A_{a_{i-1}} a_{i-1}} M_b,$$

这里 $(a\alpha_1 a_1 \alpha_2 a_2 \cdots a_{i-1} \alpha_i b)$ 取遍伪赋值箭图 $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{D}, \Omega)$ 中从 $a$ 到 $b$ 的长度为 $i$ 所有路.

然而, 通常张量代数 $T(\mathcal{M})$ 上的 $n$ 次微分不一定是它的分次范畴 $\mathcal{T}$ 的微分. 例如, 文献 [19] 构造出了所有路代数 $kQ$ 的 $n$- 微分 $D$, 但是它们通常不是分次范畴 $\mathcal{T}_{kQ}$ 的微分. 所以需要找出哪些路代数 $kQ$ 的 $n$- 微分使得 $\mathcal{T}_{kQ}$ 为微分分次范畴.

受此启发, 可以考虑如何构造 $k$- 伪模块 $\mathcal{M}$ 上的微分使得对应的分次范畴成为微分分次范畴. 另外, 还可以讨论由这些微分组成的李代数.

### 3.2 由三角矩阵代数构作的广义路代数及其表示的 Gabriel 定理

Geiss 等 [20] 定义了一类代数, 它们是由可对称化的广义 Cartan 矩阵决定的箭图和关系定义的. 具体如下:

设 $C=(c_{ij})\in M_n(\mathbb{Z})$ 是对称化子为 $D=\mathrm{diag}(c_1,\ldots,c_n)$ 的一个可对称化的广义 Cartan 矩阵. 对所有的 $c_{ij}<0$ , 记 $g_{ij}:=|\gcd(c_{ij},c_{ji})|$, $f_{ij}:=|c_{ij}|/g_{ij}$, $k_{ij}:=\gcd(c_i,c_j)$.

$C$ 的一个定向是指一个子集 $\Omega\subset\{1,2,\ldots,n\}\times\{1,2,\ldots,n\}$ 满足如下条件:

(i) $\{(i,j),(j,i)\}\cap\Omega\neq\emptyset$ 当且仅当 $c_{ij}<0$;

(ii) 任意满足 $t\geqslant 1$ 和 $(i_s,i_{s+1})\in\Omega$ 的序列 $((i_1,i_2),(i_2,i_3),\ldots,(i_t,i_{t+1}))$, 其中 $1\leqslant s\leqslant t$, 我们有 $i_1\neq i_{t+1}$.

给定 $C$ 的一个定向 $\Omega$ , 令 $Q:=Q(C,\Omega)$ 是如下箭图: 顶点集为 $Q_0:=\{1,\ldots,n\}$, 箭向集为

$$Q_1:=\{\alpha_{ij}^{(g)}:j\to i\mid(i,j)\in\Omega,1\leqslant g\leqslant g_{ij}\}\cup\{\varepsilon_i:i\to i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}.$$

对于箭向 $Q=Q(C,\Omega)$ 和 $C$ 的对称化子 $D=\mathrm{diag}(c_1,\ldots,c_n)$, 令

$$A(C,D,\Omega):=kQ/I, \tag{3.1}$$

其中 $kQ$ 为 $Q$ 的路代数, $I$ 是 $kQ$ 的由如下关系定义的一个理想:

(i) 对任意 $i$, 有幂零关系 $\varepsilon_i^{c_i}=0$;

(ii) 对任意 $(i,j)\in\Omega$ 和 $1\leqslant g\leqslant g_{ij}$, 有交换关系 $\varepsilon_i^{f_{ji}}\alpha_{ij}^{(g)}=\alpha_{ij}^{(g)}\varepsilon_j^{f_{ij}}$.

同时, $A(C,D,\Omega)$ 同构于一个广义路代数的商代数 $k(\Gamma,\mathcal{A})/J$, 其中

$$\Gamma_0=Q_0,\Gamma_1=\{\alpha_{ij}^{(g)}:j\to i\mid(i,j)\in\Omega,1\leqslant g\leqslant g_{ij}\},$$

而 $\mathcal{A}=\{A_i:i=1,\ldots,n\}$, 其中 $A_i=k(x_i)/(x_i^{c_i})$, $J$ 是由 $x_i^{f_{ji}}\alpha_{ij}^{(g)}-\alpha_{ij}^{(g)}x_j^{f_{ij}}$ 生成的理想, $1\leqslant g\leqslant g_{ij}$.

对 $n\geqslant 2$ , 定义一个阶为 $n$ 的三角矩阵代数 $\Gamma$ 满足

$$\Gamma=\begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ 0 & A_2 & \cdots & A_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & A_n\end{pmatrix},$$

其中每个 $A_i$ 都是代数, $A_{ij}$ 是 $A_i$-$A_j$- 双模, $\mu_{ilj}:A_{il}\otimes_{A_l}A_{lj}\to A_{ij}$ 为双模同态满足如下交换关系:

$$\begin{tikzcd} A_{il}\otimes_{A_l}A_{lj}\otimes_{A_j}A_{jt} \arrow[r, "\mu_{ijq}\otimes\mathrm{id}_{A_{jt}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{A_{il}}\otimes\mu_{ljt}"] & A_{ij}\otimes_{A_j}A_{jt} \arrow[d, "\mu_{ijt}"] \\ A_{il}\otimes_{A_l}A_{lt} \arrow[r, "\mu_{ilt}"] & A_{it}. \end{tikzcd}$$

任意 $1\leqslant i<l<j<t\leqslant n$, $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}\in\Gamma$, 乘法定义为

$$(AB)_{ij}=\sum_{i<l<j}\mu_{ilj}(a_{il}\otimes b_{lj}),$$

其中 $(AB)_{ij}$ 表示 $AB$ 第 $(i,j)$ 位置的元素.

如下数组 $X$ 称为 $\Gamma$ 的一个表示:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}_{\phi_{ij}},$$

使得对于任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $\phi_{ij} : A_{ij} \otimes_{A_j} X_j \to X_i$ 是 $A_i$- 模同态并且满足如下交换图:

$$\begin{tikzcd} A_{ij} \otimes_{A_j} A_{jq} \otimes_{A_q} X_q \arrow[r, "\mu_{ijq}\otimes \mathrm{id}_{X_q}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{A_{ij}}\otimes\phi_{jq}"] & A_{iq} \otimes_{A_q} X_q \arrow[d, "\phi_{iq}"] \\ A_{ij} \otimes_{A_j} X_j \arrow[r, "\phi_{ij}"] & X_i. \end{tikzcd}$$

从表示 $X$ 到表示 $Y$ 的一个态射 $f$ 包含如下数组: $(f_i,\ i = 1,\ldots,n)$, 对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $f_i : X_i \to Y_i$ 是 $A_i$- 模同态使得 $f_i\phi_{ij} = \phi_{ij}(\mathrm{id}_{A_{i,j}} \otimes f_j)$.

因此, 我们得到 $\Gamma$ 的表示范畴, 记作 $\mathrm{Rep}(\Gamma)$.

**定理 3.2.1** [21] 三角矩阵代数的表示范畴和它的模范畴是范畴等价的.

设 $A_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ 是任意有限维代数. 令 $B_{ij}$ 为 $A_i$-$A_j$- 双模使得 $B_{ij}$ 为自由左 $A_i$- 模和自由右 $A_j$- 模, 并且对所有 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $\mathrm{Hom}_{A_i}(B_{ij}, A_i)$ 是一个投射 $A_j$- 模或内射 $A_j$- 模. 令

$$A_{ij} = \bigoplus_{l=0}^{j-i-1} \bigoplus_{i<k_1<k_2<\cdots<k_l<j} B_{ik_1} \otimes_{A_{k_1}} B_{k_1k_2} \otimes \cdots \otimes_{A_{k_l}} B_{k_lj} \tag{3.2}$$

对 $1 \leqslant i < j \leqslant n$ 成立, 其中 $l = 0$ 时约定表示直和项 $B_{ij}$.

称一个三角矩阵代数

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_2 & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

为正规三角矩阵代数, 如果它满足 (3.2) 且映射 $\mu_{ijq} : A_{ij} \otimes_{A_j} A_{jq} \to A_{iq}$ 为嵌入映射.

Gorenstein 投射模的概念由 Auslander 和 Bridger [22] 提出. 令 $A$ 为一个 Artin 代数, $A$-mod 为有限生成左 $A$- 模范畴. 一个完全 $A$- 投射分解是一个有限生成投射 $A$- 模的正合列

$$P^\bullet = \ \cdots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{d^0} P^1 \longrightarrow \cdots$$

使得 $\mathrm{Hom}_A(P^\bullet, A)$ 是正合的. 一个模 $M \in A$- 模叫作 Gorenstein 投射模, 如果存在一个完全 $A$- 投射分解 $P^\bullet$ 使得 $M \cong \mathrm{Ker}d^0$.

**定理 3.2.2** [21] 假设 $\Lambda$ 是一个正规三角矩阵代数, $X$ 是一个 $\Lambda$- 模, 那么 $X \in \mathcal{GP}(\Lambda)$ 当且仅当以下条件成立:

(1) 对每个 $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $\bigoplus_{k=i+1}^{n} \phi_{ik}(B_{ik} \otimes_{A_k} X_k) \to X_i$ 是单同态;

(2) 对每个 $1 \leqslant i \leqslant n$ , $X_i$ 和 $X_i/\bigoplus_{k=i+1}^{n} \phi_{ik}(B_{ik} \otimes_{A_k} X_k)$ 是 Gorenstein- 投射 $A_i$- 模.

当存在一个左 $A$- 模同构 ${}_AA \cong D(A_A)$, 此时有限维的代数 $A$ 称作一个 Frobenius 代数, 其中 $D := \mathrm{Hom}_k(-,k)$, 参见文献 [23].

**定义 3.2.1** 对任意 $i=1,\ldots,n$, 令 $A_i$ 是一个具有单位元 $e_i$ 的 Frobenius 代数. 对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, 令 $B_{ij}$ 是一个 $A_i$-$A_j$- 双模满足 $B_{ij}$ 是有限秩的自由左 $A_i$- 模和有限秩的自由右 $A_j$- 模. 假设对所有 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, 存在 $A_i$-$A_j$- 双模同构

$$\mathrm{Hom}_{A_i}(B_{ij}, A_i) \cong \mathrm{Hom}_{A_j}(B_{ij}, A_j).$$

对所有 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, 令

$$A_{ij} = \bigoplus_{l=0}^{j-i-1} \bigoplus_{i<k_1<k_2<\cdots<k_l<j} B_{ik_1} \otimes_{A_{k_1}} B_{k_1k_2} \otimes \cdots \otimes_{A_{k_l}} B_{k_lj}, \tag{3.3}$$

其中 $l=0$ 时约定表示直和项 $B_{ij}$.

如果三角矩阵代数

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_2 & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

满足 (3.3) 以及双模映射 $\mu_{ijq}: A_{ij} \otimes_{A_j} A_{jq} \to A_{iq}$ 为自然嵌入, 则称 $\Lambda$ 为 Frobenius- 型三角矩阵代数.

假设 $Q=(Q_0,Q_1)$ 是一个无圈的有限箭图, 即 $Q_0$ 和 $Q_1$ 都是有限的. 令 $j>i$, 如果存在从 $j$ 到 $i$ 的道路. 因为 $Q$ 无圈, 则这个定义是合理的. 那么有 $k(Q,\mathcal{A}) \cong \Lambda$, 其中

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

是一个正规三角矩阵代数. 因此, 每个广义路代数都可以看成一个三角矩阵代数通过定义 $A_{ij}$ 为由所有从 $j$ 到 $i$ 的 $\mathcal{A}$- 路生成的 $k$- 向量空间. 而 $B_{ij}$ 就是由所有从 $j$ 到 $i$ 的 $\mathcal{A}$- 箭向生成的 $k$- 向量空间. 事实上, $\mathcal{A}$- 路可以看成自由 $A_i$-$A_j$- 双模, 所以, $k(Q,\mathcal{A})$ 是一类特殊的正规三角矩阵代数, 且有 $A_{ii}=A_i$. 表示 $X=(X_i,\varphi_{jk})_{i,j,k\in Q_0}$ 可以写成

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}_{\varphi_{ij}}.$$

**定义 3.2.2** 对一个 Frobenius- 型三角矩阵代数 $\Lambda$, 称一个有限生成 $\Lambda$- 模 $X$ 是局部自由的, 如果 $X_i$ 是自由 $A_i$- 模对所有 $1 \leqslant i \leqslant n$ 成立. 一个 $\Lambda$- 模 $X$ 称作 $\tau$- 局部自由, 如果 $\tau^k(X)$ 是局部自由的对任意 $k \in \mathbb{Z}$ 成立. 特别地, $X$ 称作不可分解 $\tau$- 局部自由, 如果 $X$ 不能写成两个非零 $\tau$- 局部自由 $\Lambda$- 模的直和, 这里 $\tau$ 是 $AR$- 函子.

对于一个 Frobenius- 型三角矩阵代数 $\Lambda$, 令 $C=(c_{ij})\in M_n(\mathbb{Z})$, 其中

$$c_{ij}=\begin{cases}2, & \text{如果 } i=j,\\ -\mathrm{rank}_{A_i}(B_{ij}), & \text{如果 } i<j,\\ -\mathrm{rank}_{A_i}(B_{ji}), & \text{如果 } i>j.\end{cases}$$

记 $c_i=\dim_k(A_i)$. 容易知道 $c_ic_{ij}=c_jc_{ji}=-\dim_k(B_{ij})$, 这意味着 $C$ 是一个可对称化的 Cartan 矩阵.

定义一个 $C$ 的二次型 $q_C:\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Z}$ 满足对 $x=(x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{Z}^n$, 有

$$q_C(x):=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i^2-\sum_{i<j}c_i|c_{ij}|x_ix_j. \tag{3.4}$$

称一个 Cartan 矩阵 $C$ 是 Dynkin 型, 如果 $q_C$ 是正定的. 作为对这类广义路代数的 Gabriel 定理, 我们有如下定理:

**定理 3.2.3** [24] 对一个 Frobenius- 型三角矩阵代数 $\Lambda$, 以下结论成立:

(1) 不可分解 $\tau$- 局部自由 $\Lambda$- 模的同构类的个数是有限的当且仅当 $C$ 是 Dynkin 型的;

(2) 如果 $C$ 是 Dynkin 型的, 那么映射 $\underline{\mathrm{rank}}:X\mapsto\underline{\mathrm{rank}}(X)$ 诱导了一个从不可分解 $\tau$- 局部自由 $\Lambda$- 模的同构类的集合到二次型 $q_C(x)$ 的正根的集合的双射.

## 4 对非基本或非点 Hopf 代数的结构的应用

### 4.1 广义路余代数及其上 Hopf 代数结构的一个刻画

虽然代数和余代数是有对称性的结构, 很多性质和研究思想都有对称意义下的类似性. 但由于余代数和余表示结构特有的局部有限性, 因此, 余代数及其余表示的研究在方法上有比代数和表示更易把握的有益的一面, 这也是很多代数研究者关注余结构的原因. 在这个意义上, 我们同样有必要引入并考虑广义余代数和余表示的结构, 这方面, 文献 [25] 引入并做了初步的研究.

设 $Q=(Q_0,Q_1)$ 是一个箭图, $\mathcal{S}=\{S_i\mid i\in Q_0\}$ 是余代数 $S_i$ 构成的集合, 其中下标是 $Q$ 的顶点, $S_i$ 的余乘法记为 $\Delta_i$, 余单位记为 $\varepsilon_i$. $\bigcup_{i\in Q_0}S_i$ 中的元素叫作长度为 0 的 $\mathcal{S}$- 路, 且对每个 $n\geqslant 1$, 一个长度为 $n$ 的 $\mathcal{S}$- 路是 $a_1\beta_1a_2\beta_2\cdots a_n\beta_na_{n+1}$, 其中 $(s(\beta_1)|\beta_1\cdots\beta_n|e(\beta_n))$ 是 $Q$ 中长度为 $n$ 的路, 对每个 $i=1,\ldots,n$, $a_i\in A_{s(\beta_i)}$, $a_{n+1}\in A_{e(\beta_n)}$.

现在考虑 $R$ 是由箭图 $Q$ 中所有 $\mathcal{A}$- 路为基生成的 $k$- 向量空间模去由形如

$$a_1\beta_1\cdots\beta_{j-1}(a_j^1+\cdots+a_j^m)\beta_ja_{j+1}\cdots\beta_na_{n+1}-\sum_{\ell=1}^{m}a_1\beta_1\cdots\beta_{j-1}a_j^{\ell}\beta_j\cdots\beta_na_{n+1}$$

的元素生成的子空间所得到的商, 其中 $(s(\beta_1)|\beta_1\cdots\beta_n|e(\beta_n))$ 是 $Q$ 中长度为 $n$ 的路, 对每个 $i=1,\ldots,n$, $a_i\in S_{s(\beta_i)}$, $a_{n+1}\in S_{e(\beta_n)}$; 对 $\ell=1,\ldots,m$, 有 $a_j^{\ell}\in S_{s(\beta_j)}$. 现在在 $R$ 中定义以下余乘法和余单位, 给定 $a_1\beta_1\cdots\beta_na_{n+1}$, 定义

$$\Delta(a_1\beta_1\cdots\beta_na_{n+1})=\sum_{i=1}^{n+1}a_1\beta_1\cdots a_{i-1}\beta_{i-1}a_i'\otimes a_i''\beta_ia_{i+1}\cdots a_n\beta_na_{n+1}.$$

特别地, 对 $a_i \in S_i$, $i \in Q_0$, 有 $\Delta(a_i) = \Delta_i(a_i) = a_i' \otimes a_i''$. 定义余单位

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } p \text{ 的长度大于 } 0, \\ \varepsilon_i(p), & \text{如果对某个 } i \in Q_0, \text{ 有 } p \in S_i. \end{cases}$$

这个余代数称为 $Q$ 的 $S$- 路余代数, 记作 $k_C(Q, \mathcal{S})$.

李方和刘公祥[25] 给出了广义路余代数的一些基本性质, 解决了正规广义路余代数的同构问题. 对于满足 $\mathrm{Codim} C_0 \leqslant 1$ 的余代数 $C$, 他们证明了对偶 Wedderburn-Malcev 定理成立. 作为广义路余代数的一个应用, 他们推广了点余代数的对偶 Gabriel 定理.

**定理 4.1.1**[25] 设 $C$ 是一个余代数满足 $\mathrm{Codim} C_0 \leqslant 1$. 假定我们将余根写成 $C_0 = \bigoplus_{i \in \Lambda} S_i$, 每个 $S_i$ 是单余代数. 如果 $C_1/C_0$ 作为 $C_0$- 双余模是 $C/C_0$ 的直和项, 则

(i) 存在余代数的嵌入 $\psi : C \hookrightarrow \mathrm{CoT}_{C_0}(C_1/C_0)$;

(ii) (广义对偶 Gabriel 定理) 设 $Q = (Q_0, Q_1)$ 是 $\mathrm{CoT}_{C_0}(C_1/C_0)$ 的箭图, $\mathcal{C} = \{S_i \mid i \in \Lambda\}$, 存在余代数嵌入 $\varphi : C \hookrightarrow k(Q, \mathcal{C})$ 使得 $\varphi(I_1) \subseteq k(Q_1, \mathcal{C})$, 其中 $I_1 = I \cap C_1$.

设 $G$ 是一个有限群, $\mathcal{D}$ 是 $G$ 的所有共轭类的集合. 由文献 [26] 知, 群 $G$ 的分歧数据 $r$ 是一组数 $r = (r_D)_{D \in \mathcal{D}} \in \mathbf{N}^{\mathcal{D}}$. 对应 $(G, r)$ 的 Hopf 箭图 $Q = Q(G, r)$ 定义如下:

(i) $Q_0 = \{v_g\}_{g \in G}$;

(ii) 对任意 $x, y \in G$, 如果 $yx^{-1} \in D$, 其中 $D \in \mathcal{D}$, 则有 $r_D$ 个从 $v_x$ 到 $v_y$ 的箭向.

对偶地, 我们有同样重要的覆盖箭图的概念, 即设 $G$ 是一个有限群, $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ 是 $G$ 中元素的序列. 称 $W$ 是一个权序列, 如果对任意的 $g \in G$, 序列 $W$ 和 $(gw_1g^{-1}, gw_2g^{-1}, \ldots, gw_ng^{-1})$ 在置换下是相同的. 特别地, $W$ 在共轭作用下封闭. 定义一个箭图, 记为 $\Gamma_G(W)$, 它的顶点集为集合 $\{v_g\}_{g \in G}$, 箭向由

$$\{(a_i, g) : v_{g^{-1}} \to v_{w_i g^{-1}} \mid i = 1, 2, \ldots, n, g \in G\}$$

给出. 称这个箭图为覆盖箭图 (关于权序列 $W$).

文献 [27] 给出了正规广义路余代数 $k_C(Q, \mathcal{C})$ 上具有 Hopf 代数结构的刻画, 即如下的定理:

**定理 4.1.2**[27] 设 $k_C(Q, \mathcal{C})$ 是一个正规广义路余代数, 则以下三条等价:

(i) $Q$ 是某个 $(G, r)$ 的 Hopf 箭图使得 $k_C(Q_0, \mathcal{C})$ 是 $G$- 型的;

(ii) $k_C(Q_0, \mathcal{C})$ 是 $Q_0$- 封闭的使得 $k_C(Q_1, \mathcal{C})$ 有一个 $k_C(Q_0, \mathcal{C})$-Hopf 双模结构, 其中模结构是 $\mathcal{C}$- 箭向稳定的, 余模结构满足对任意 $x \in k_C(Q_1, \mathcal{C})$, 有

$$\delta_L(x) := \sum_{(x)} (x')_0 \otimes x'', \quad \delta_R(x) := \sum_{(x)} x' \otimes (x'')_0;$$

(iii) $k_C(Q, \mathcal{C})$ 有一个分次 Hopf 代数结构, 它是按路的长度分次的, 具有 $Q_0$- 封闭余根和 $\mathcal{C}$- 箭向稳定的乘法.

因此, 只要上述三个条件中任意一个条件成立, 我们就有 $k_C(Q, \mathcal{C})$ 上的一个 Hopf 代数结构, 记为 $k_C^H(Q, \mathcal{C})$.

### 4.2 非基本或非点 Hopf 代数的分类的一个设想

利用上面覆盖箭图的概念, 文献 [28] 证明了下面的定理:

**定理 4.2.1** [28] 设 $H$ 是一个有限维基本 Hopf $k$- 代数, 则存在一个有限群 $G$ 以及 $G$ 的一个权序列 $W=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$, 使得 $H\cong k\Gamma_G(W)/I$ 对某个容许理想 $I$ 成立.

至今, (有限维) Hopf 代数的分类研究的成熟的方法还限于基本 (basic) Hopf 代数的情形. 对于非基本 Hopf 代数, 事实上还没有系统的有效方法. 其中一个困难在于如何有效构造非基本 Hopf 代数的一些类, 而上面的 $k_C^H(Q,\mathcal{C})$ 给出了一类非基本 Hopf 代数的构造方法. 在此, 我们基于广义路 (余) 代数已获得的结果, 试图来给出一个可能的规划 (programme) 如下.

**有限维非基本 (对偶地, 非点) Hopf 代数的分类的一个设想:**

(1) 与定理 4.1.2 对偶地, 用 (广义) 覆盖箭图的方法, 给出正规广义路代数具有 Hopf 代数结构的等价刻画;

(2) 对于一个有限维非基本 Hopf 代数 $H$, 利用定理 4.2.1 及其方法, 以及 (1) 的结论,

(i) 获得了一个 (广义) 覆盖箭图 $\Gamma_G^{\mathcal{A}}(W)$, 并以此得到一个具有 Hopf 代数结构的广义路代数 $k(\Gamma_G^{\mathcal{A}}(W),\mathcal{A})$,

(ii) 尝试将定理 4.2.1 改进到 $H$ 上, 从而使得 $H$ 成为一个商代数 $k(\Gamma_G^{\mathcal{A}}(W),\mathcal{A})/I$;

(3) 利用 (2) 对 $H$ 的商代数表达, 尝试对有限维非基本 Hopf 代数 $H$ 进行分类刻画.

对偶地,

$(2)^{\mathrm{dual}}$ 对于一个有限维非点 Hopf 代数 $H$, 利用定理 4.1.1 及其方法, 以及定理 4.1.2 的结论,

(i) 获得一个 (广义) Hopf 箭图 $L_G^{\mathcal{C}}(Q)$ 并以此得到一个具有 Hopf 代数结构的广义路余代数 $k(L_G^{\mathcal{C}}(Q),\mathcal{C})$,

(ii) 尝试将定理 4.1.1(ii), 即广义对偶 Gabriel 定理, 改进到 $H$ 上, 从而使得 $H$ 嵌入成为 Hopf 代数 $k(L_G^{\mathcal{C}}(Q),\mathcal{C})$ 的子余代数;

$(3)^{\mathrm{dual}}$ 利用 $(2)^{\mathrm{dual}}$ 将 $H$ 的子余代数嵌入, 尝试对有限维非点 Hopf 代数 $H$ 进行分类刻画.

上面 $(3)^{\mathrm{dual}}$ 的规划, 可以看作试图对刘公祥与合作者在文献 [29–32] 中给出的对有限维基本 Hopf 代数的分类方法在 "非基本" 情形下的推广.

## 5 与丛代数相关的广义路代数结构

### 5.1 丛代数

**定义 5.1.1** 一个矩阵 $B=(b_{ij})\in M_n(\mathbb{Z})$ 称作可斜对称化矩阵, 如果存在一个对角矩阵

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d_n\end{pmatrix},$$

其中 $d_i\in\mathbb{N}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, 使得 $DB$ 是斜对称矩阵, 即满足 $(DB)^{\mathrm{T}}=-DB$. 此时, 称 $D$ 是可斜对称化矩阵 $B$ 的一个斜对称化子.

当 $B$ 是一个斜对称矩阵时, 我们可将其对应一个箭图 $Q(B)$, 箭图 $Q(B)$ 对应 $B$ 行 (列) 指标, 若 $b_{ij}>0$, 则在 $Q(B)$ 中有 $b_{ij}$ 条从顶点 $i$ 到顶点 $j$ 的箭向; 若 $b_{ij}<0$, 则在 $Q(B)$ 中有 $-b_{ij}$ 条从顶点 $j$ 到顶点 $i$ 的箭向.

**定理 5.1.1** 设 $\mathcal{Q}$ 为不含长度小于等于 2 的圈的箭图, 则 $B \mapsto Q(B)$ 定义了一个从斜对称整数矩阵集到 $\mathcal{Q}$ 的一个双射.

**定义 5.1.2** 设 $\mathcal{F}$ 是一个带有 $n$ 个独立变元的有理函数域, 二元组 $(X, B)$ 称为 $\mathcal{F}$ 上的一个种子, 如果

(i) $X = (x_1, \ldots, x_n)$, 使得 $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathcal{F}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上代数无关;

(ii) $B$ 是一个 $n$ 阶可斜对称化矩阵.

此时, 称 $X$ 为一个丛 (cluster), $X$ 的各个分量称为丛变量, $B$ 称为一个换位矩阵.

特别地, 当 $B$ 是斜对称矩阵时, 我们通常将种子 $(X, B)$ 记为 $(X, Q(B))$.

**定义 5.1.3** 设 $\mathcal{F}$ 是一个带有 $n$ 个独立变元的有理函数域, $(X, B)$ 是 $\mathcal{F}$ 上的一个种子, 对 $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$, 定义 $(X, B)$ 沿 $t$ 方向上的变异 (mutation) $\mu_t(X, B) =: (X', B')$:

$$x_i' = \begin{cases} x_i, & \text{如果 } i \neq t, \\ \dfrac{\prod_{b_{it}>0} x_i^{b_{it}} + \prod_{b_{it}<0} x_i^{-b_{it}}}{x_t}, & \text{如果 } i = t, \end{cases} \tag{5.1}$$

$$b_{ij}' = \begin{cases} -b_{ij}, & \text{如果 } i = t \quad \text{或者} \quad j = t, \\ b_{ij} + \dfrac{|b_{it}|b_{tj} + b_{it}|b_{tj}|}{2}, & \text{其他}. \end{cases} \tag{5.2}$$

显然, $\mathcal{F}$ 上种子 $(X, B)$ 沿 $t$ 方向的变异 $\mu_t(X, B)$ 仍为 $\mathcal{F}$ 上的一个种子.

由定义易知变异是一个对合, 即 $\mu_t\mu_t(X, B) = (X, B)$.

当种子取成 $(X, Q)$ 时, 它在沿 $t$ 方向的变异 $\mu_t(X, B) = (X', Q')$, 其中 $X' = X \setminus \{x_t\} \cup \{x_t'\}$ 且 $x_t'$ 通过换位关系 (exchange relation) $x_t x_t' = \prod_{\alpha: i \to t} x_i + \prod_{\alpha: t \to i} x_i$ 得到, $Q'$ 由 $Q$ 经过以下变化得到:

(1) 如果在 $Q$ 中存在路 $i \to t \to j$, 则增加一个从 $i$ 到 $j$ 箭向;

(2) 改变 $Q$ 中所有与 $t$ 相连的箭向的方向;

(3) 去掉 $Q$ 中长度为 2 的圈.

**定义 5.1.4** 丛代数 $\mathcal{A} := \mathcal{A}(X, B)$ 是指由所有从初始种子做变异得到的种子的丛变量生成的 $\mathcal{F}$ 的子代数.

### 5.2 广义路代数的变异

对一个广义路代数 $k(Q, \mathcal{A})$, 其中 $\mathcal{Q}$ 为不含长度小于等于 2 的圈的箭图, $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in Q_0\}$. 设 $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$, $A_i$ 是有限维代数, 记 $\dim_k(A_i) = d_i$. 定义一个矩阵 $C = (c_{ij})_{n \times n}$, 其中

$$c_{ij} = \begin{cases} \dfrac{d_{ij}\Omega_{ij}}{d_i}, & \text{如果存在箭向 } i \to j, \\ -\dfrac{d_{ij}\Omega_{ij}}{d_i}, & \text{如果存在箭向 } j \to i, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \tag{5.3}$$

其中 $d_{ij}$ 表示 $d_i$ 与 $d_j$ 的最小公倍数. $\Omega_{ij}$ 表示顶点 $i$ 与 $j$ 之间箭向的个数. 显然, $d_i c_{ij} = -d_j c_{ji}$. 所以, $C$ 是一个可斜对称化矩阵.

对每个 $i \in Q_0$, 取 $A_i = k^{d_i}$, 即 $d_i$ 个 $k$ 的直和, 则上面的可斜对称化矩阵 $C$ 是唯一确定的. 由定理 2.3.1 有以下推论:

**推论 5.2.1** $k(Q,\mathcal{A})$ 为一个广义路代数, 取 $A_i = k^{d_i}$ 对 $i \in Q_0$, 有同构 $k(Q,\mathcal{A}) \cong k\Gamma$, 其中 $\Gamma$ 是一个箭图, 顶点 $\Gamma_0 = \{i_{t_i} \mid i \in Q_0, t_i = 1,\ldots,d_i\}$, 箭向

$$\Gamma_1 = \{i_{t_i} \to j_{t_j} \mid i \to j \in Q_1, t_i = 1,\ldots,d_i, t_j = 1,\ldots,d_j\}.$$

显然, 若 $Q$ 是一个无圈箭图, 则 $\Gamma$ 也是无圈的. 定义矩阵 $B(\Gamma) := (b_{ij})$, 其中

$$b_{ij} = \begin{cases} \Omega_{ij}, & \text{如果 } \Gamma \text{ 中存在箭向 } i \to j, \\ -\Omega_{ij}, & \text{如果 } \Gamma \text{ 中存在箭向 } j \to i, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{5.4}$$

**注 5.2.1** 为了方便讨论, 记 $\Gamma$ 的顶点集指标为 $\{I_k \mid k \in Q_0\}$, $I_k = \{k_1,\ldots,k_{d_k}\}$.

由上面的定义, 给定一个广义路代数 $k(Q,\mathcal{A})$, 取 $A_i = k^{d_i}$, 则有唯一一个对应的可斜对称化的矩阵 $C$, 有一个同构的路代数 $k\Gamma$, 记其对应的斜对称矩阵为 $B$.

**定义 5.2.1** 给定一个广义路代数 $k(Q,\mathcal{A})$, 取 $A_i = k^{d_i}$ $(i \in Q_0)$. 对 $t \in Q_0$, 定义

$$\mu_t(k(Q,\mathcal{A})) = k(Q',\mathcal{A}),$$

其中 $Q'$ 由 $Q$ 经过以下变化得到:

(1) 如果在 $Q$ 中存在箭向 $i \to t$ 和 $t \to j$, 则增加 $d_t$ 个从 $i$ 到 $j$ 的箭向;

(2) 改变 $Q$ 中所有与 $t$ 相连的箭向的方向;

(3) 去掉 $Q$ 中长度为 2 的圈.

则 $\mu_t(k(Q,\mathcal{A}))$ 称为 $k(Q,\mathcal{A})$ 在点 $t$ 的变异.

**定义 5.2.2** [33] 称一个可斜对称化矩阵是强本原的 (strongly primitive), 如果它的斜对称化子是两两互素的.

**定理 5.2.1** 给定一个广义路代数 $k(Q,\mathcal{A})$, 取 $A_i = k^{d_i}$ $(i \in Q_0)$, 它对应的可斜对称化矩阵为 $C$. 若 $C$ 是强本原的, 则

(1) $\mu_t(k(Q,\mathcal{A}))$ 对应的可斜对称化矩阵为 $\mu_t(C)$;

(2) 若 $k(Q,\mathcal{A}) \cong k\Gamma$, 则 $\mu_t(k(Q,\mathcal{A})) \cong k(\mu_{t_1}\cdots\mu_{t_{d_t}}(\Gamma))$.

**证明** (1) 设 $\mu_t(k(Q,\mathcal{A}))$ 对应的矩阵为 $C' = (c'_{ij})$, $\Omega_{ij}$ 为 $Q$ 中顶点 $i$ 与 $j$ 之间箭向的个数. 由定义知,

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} \Omega_{ij}, & \text{如果 } i = t \quad \text{或者} \quad j = t, \\ |\Omega_{ij} \pm d_t\Omega_{it}\Omega_{tj}|, & \text{如果存在箭向 } i \to t, \quad t \to j, \end{cases} \tag{5.5}$$

这里加或减取决于顶点 $i$ 与 $j$ 之间箭向的方向.

因为 $C$ 是强本原的, 所以,

$$d_t\Omega_{it}\Omega_{tj} = d_t \times \frac{|d_ic_{it}|}{d_{it}} \times \frac{|d_tc_{tj}|}{d_{tj}} = \frac{|c_{it}c_{tj}|}{d_j}.$$

因此,

$$c'_{ij} = \begin{cases} -c_{ij}, & \text{如果 } i = t \quad \text{或者} \quad j = t, \\ c_{ij} + \dfrac{|c_{it}|c_{tj} + c_{it}|c_{tj}|}{2}, & \text{其他}. \end{cases} \tag{5.6}$$

所以, $\mu_t(k(Q,\mathcal{A}))$ 对应的可斜对称化矩阵为 $\mu_t(C)$.

(2) 设 $\Gamma$ 对应的斜对称矩阵为 $B$, 因为 $\mu_{t_1}\cdots\mu_{t_{d_t}}(\Gamma)$ 对应的斜对称矩阵为 $\mu_{t_1}\cdots\mu_{t_{d_t}}(B)$, 由变异的定义, 有 $\mu_{t_s}(B)=(b'_{ij})$, 其中

$$b'_{ij}=\begin{cases}-b_{ij}, & \text{如果 } i=t_s \quad \text{或者} \quad j=t_s,\\ b_{ij}, & \text{如果 } i\in I_t\setminus t_s \quad \text{或者} \quad j\in I_t\setminus t_s,\\ b_{ij}+\dfrac{|b_{it_s}|b_{t_sj}+b_{it_s}|b_{t_sj}|}{2}, & \text{其他}.\end{cases} \tag{5.7}$$

根据计算易知 $\mu_{t_1}\cdots\mu_{t_{d_t}}(B)=(b''_{ij})$, 其中

$$b''_{ij}=\begin{cases}-b_{ij}, & \text{如果 } i\in I_t \quad \text{或者} \quad j\in I_t,\\ b_{ij}+\dfrac{d_t(|b_{it_s}|b_{t_sj}+b_{it_s}|b_{t_sj}|)}{2}, & \text{其他}.\end{cases} \tag{5.8}$$

由 (1) 知, $\mu_t(k(Q,\mathcal{A}))$ 对应的可斜对称化矩阵为 $C'=\mu_t(C)$, 所以, 要证

$$\mu_t(k(Q,\mathcal{A}))\cong k(\mu_{t_1}\cdots\mu_{t_{d_t}}(\Gamma)),$$

只需证 $b''_{ij}=\frac{d_pc'_{pq}}{d_{pq}}$ 对所有 $p,q\in Q_0$, $i\in I_p$, $j\in I_q$ 成立.

由 $C'$ 的定义知, 只需验证当 $p\neq t$ 和 $q\neq t$ 时, $b''_{ij}=\frac{d_pc'_{pq}}{d_{pq}}$ 成立.

因为 $C$ 是强本原的, 所以有 $d_{ij}=d_id_j$ 对任意 $i,j\in Q_0$ 成立. 这时,

$$\begin{aligned}b''_{ij}&=b_{ij}+\frac{d_t(|b_{it_s}|b_{t_sj}+b_{it_s}|b_{t_sj}|)}{2}\\&=\frac{d_ic_{ij}}{d_{ij}}+\frac{d_td_id_{t_s}(|b_{it_s}|b_{t_sj}+b_{it_s}|b_{t_sj}|)}{2d_{it_s}d_{t_sj}}\\&=\frac{d_p(c_{pq}+\frac{|c_{pt}|c_{tq}+c_{pt}|c_{tq}|}{2})}{d_{pq}}\\&=\frac{d_pc'_{pq}}{d_{pq}}.\end{aligned}$$

所以, $\mu_t(k(Q,\mathcal{A}))\cong k(\mu_{t_1}\cdots\mu_{t_{d_t}}(\Gamma))$ 成立. □

### 5.3 一类广义路代数决定的丛代数的加法范畴化

丛范畴由 Buan 等[34] 于 2006 年提出. 他们构造了一个新的范畴 $\mathcal{C}$, 它是域 $k$ 上一个有限维遗传代数 $H$ 的模范畴的有界导出范畴的商范畴.

设 $H$ 是域 $k$ 上一个有限维遗传代数. 记 $\mathrm{mod}(H)$ 为有限生成模范畴. 记 $\mathcal{D}=D^b(H)$ 为 $\mathrm{mod}(H)$ 的有界导出范畴, 记其平移函子为 [1]. 定义函子 $F=\tau^{-1}[1]$, 其中 $\tau$ 是 $\mathcal{D}$ 中的 $AR$- 变换. 定义 $\mathcal{C}=\mathcal{D}/F$, 称其为 $H$ 的丛范畴.

Caldero 和 Keller[35] 证明了在无圈情形下丛代数 $\mathcal{A}(X,Q)$ 的丛变量与 $kQ$ 的丛范畴 $\mathcal{C}$ 的不可分解刚性对象之间有一一对应关系. 这个对应关系诱导出了丛代数 $\mathcal{A}(H)$ 的丛与丛范畴 $\mathcal{C}$ 的基本倾斜对象之间有一一对应关系. 由此解决了重数定理、分母定理, 以及丛代数的交换图上的一些猜想. 所以有以下引理:

**引理 5.3.1** [36] 对一个无圈箭图 $Q$, 丛代数 $\mathcal{A}(X,Q)$ 的非初始丛变量与路代数 $kQ$ 的不可分解刚性模的同构类是一一对应的, 并且不可分解刚性模的维数向量对应于非初始丛变量表示成初始变量时的分母中 $x_i$ 的指数.

事实上, 对一个广义路代数 $k(Q,\mathcal{A})$, 其中 $Q$ 是无圈箭图, 对任意的 $i\in Q_0$, 有 $A_i=k^{d_i}$. 其对应的可斜对称化矩阵为 $C$. 若 $C$ 是强本原的, 且 $k(Q,\mathcal{A})\cong k\Gamma$, 则箭图 $\Gamma$ 对应的矩阵为 $B$, 由定义知 $B$ 是 $C$ 的一个展开 (unfolding).

**引理 5.3.2** [37] 通过把 $y_{i_p}$ 映到 $x_i$, 其中 $i\in Q_0$, $p=1,\ldots,d_i$, 丛代数 $\mathcal{A}(X,C)$ 可以看成丛代数 $\mathcal{A}(Y,B)$ 的商代数的子代数.

**定理 5.3.1** 令广义路代数 $k(Q,\mathcal{A})$ 的 $Q$ 是无圈箭图, 且对 $i\in Q_0$, 有 $A_i=k^{d_i}$. 假设 $k(Q,\mathcal{A})$ 对应的可斜对称化矩阵为 $C$, 其对应的丛代数为 $\mathcal{A}(X,C)$. 若 $C$ 是强本原的, 则存在一个嵌入映射

$$\pi:\{\mathcal{A}(X,C)\text{ 的非初始丛变量}\}\hookrightarrow\{k(Q,\mathcal{A})\text{ 上不可分解局部自由刚性模}\}.$$

**证明** 回顾一个 $k(Q,\mathcal{A})$ 模 $X=(X_i,X_\alpha)_{i\in Q_0,\alpha\in Q_1}$ 是局部自由的, 如果对任意 $i\in Q_0$, $X_i$ 是自由的 $A_i$ 模.

因为我们有代数同构 $k(Q,\mathcal{A})\cong k\Gamma$, 所以, $k\Gamma$ 的表示范畴与 $k(Q,\mathcal{A})$ 的表示范畴是同构的. 因为 $A_i=k^{d_i}$, 易知这个同构是把在顶点 $i_1,\ldots,i_{d_i}$ 上的 $k$- 向量空间取直和变成 $A_i$- 模 $X_i$, 记这个函子为

$$F:\mathrm{Rep}(k\Gamma)\to\mathrm{Rep}(k(Q,\mathcal{A})),$$

则对 $Y\in\mathrm{Rep}(k\Gamma)$ 要使 $F(Y)$ 是局部自由的, 只需对每个给定的 $i\in Q_0$, $Y_{i_p}$ $(p=i_1,\ldots,i_{d_i})$ 有相同的维数.

由引理 5.3.1 和 5.3.2, 我们可以把 $\mathcal{A}(X,C)$ 的丛变量 $x_i$ 映到 $F(\bigoplus_{p=1}^{d_i}Y_{i_p})$, 其中 $Y_{i_p}$ 表示丛代数 $\mathcal{A}(Y,B)$ 中的丛变量 $y_{i_p}$ 对应的不可分解刚性 $k\Gamma$- 模. 由计算可知 $F(\bigoplus_{k=1}^{d_i}Y_{i_k})$ 是局部自由的. 显然, 对 $i\neq j$, $x_i$ 与 $x_j$ 对应的模不同构. 所以, 这就建立了一个从集合 $\{\mathcal{A}(X,C)$ 的非初始丛变量$\}$ 到集合 $\{k(Q,\mathcal{A})$ 中不可分解局部自由刚性模$\}$ 的一个嵌入映射. □

**注 5.3.1** (i) 定理 5.3.1 与引理 5.3.1 一样, 不能把初始变量对应过去, 是因为这个对应是把模的维数向量对应到非初始丛变量用初始丛变量表示时的分母中的初始丛变量的指数 (即分母向量), 所以, 初始丛变量本身没有对应的模.

(ii) 定理 5.3.1 中, $\pi$ 不是满射是因为证明中把丛变量 $y_{i_p}$ 映射到 $x_i$ 时有一些 $\mathcal{A}(Y,B)$ 丛变量在 $\mathcal{A}(X,C)$ 中没有对应.

设 $C$ 是一个可斜对称化矩阵, 令 $A(C)=(a_{ij})$, 其中

$$a_{ij}=\begin{cases}2, & \text{若 } i=j,\\ -|a_{ij}|, & \text{若 } i\neq j.\end{cases}$$

称 $A(C)$ 为 $C$ 对应的 Cartan 矩阵, 则有以下结果:

**引理 5.3.3** [38] 丛代数 $\mathcal{A}$ 是有限型的当且仅当存在 $\mathcal{A}$ 中的一个种子 $(X,C)$, 使得 $A(C)$ 是有限型 Cartan 矩阵, 且 $\mathcal{A}$ 中非初始的丛变量与 Cartan 矩阵对应的根系的正根一一对应.

因为在无圈的情形下广义路代数是特殊的正规三角矩阵代数, 所以由定理 3.2.3 有如下引理.

**引理 5.3.4** 令广义路代数 $k(Q,\mathcal{A})$ 的 $Q$ 无圈, 且对 $i\in Q_0$, 有 $A_i=k^{d_i}$, 那么, 以下结论成立:

(1) 不可分解 $\tau$- 局部自由 $k(Q,\mathcal{A})$- 模的同构类的个数是有限的当且仅当其对应的 Cartan 矩阵 $A$ 是 Dynkin 型的.

(2) 如果 $k(Q,\mathcal{A})$- 对应的 Cartan 矩阵 $A$ 是 Dynkin 型的, 那么映射 $\underline{\mathrm{rank}}: X \mapsto \underline{\mathrm{rank}}(X)$ 诱导出一个从不可分解 $\tau$- 局部自由 $k(Q,\mathcal{A})$- 模的同构类的集合到 $A$ 的所有正根的集合的双射.

**定理 5.3.2** 令广义路代数 $k(Q,\mathcal{A})$ 的 $Q$ 无圈, 且对 $i \in Q_0$, 有 $A_i = k^{d_i}$, 其对应的可斜对称化矩阵为 $C$. 若 $C$ 对应的丛代数 $\mathcal{A}(X,C)$ 是有限型的, 则存在 $\mathcal{A}(X,C)$ 的非初始丛变量与 $K(Q,\mathcal{A})$ 中不可分解局部自由刚性模的一一对应.

**证明** 由上面两个引理直接可得, 并且这个非初始丛变量的分母就由 $k(Q,\mathcal{A})$ 中不可分解局部自由刚性模的秩向量给出. □

**注 5.3.2** 因为在有限型的情形下, $C$ 始终是强本原的, 所以, 定理 5.3.2 的条件是定理 5.3.1 的条件的特殊情形, 但是定理 5.3.2 的结论是一一对应, 比定理 5.3.1 的结论只是嵌入要强.

## 参考文献


1 Coelho F U, Liu S X. Generalized path algebras. In: Interactions Between Ring Theory and Representations of Algebras (Murcia). Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2000, 53–66

2 Li F. Characterization of left Artinian algebras through pseudo path algebras. J Aust Math Soc, 2007, 83: 385–416

3 Li F. Modulation and natural valued quiver of an algebra. Pacific J Math, 2012, 256: 105–128

4 Li F, Lin Z Z. Approach to Artinian algebras via natural quivers. Trans Amer Math Soc, 2012, 364: 1395–1411

5 Li F, Chen L L. The natural quiver of an Artinian algebra. Algebr Represent Theory, 2010, 13: 623–636

6 Cobos I R, Navarro G, Peña J L. A note on generalized path algebras. Rev Roumaine Math Pures Appl, 2008, 53: 25–36

7 Zhang S, Zhang Y Z. Structures and representations of generalized path algebras. Algebr Represent Theory, 2007, 10: 117–134

8 Wang S. The generalized path algebras over standardly stratified algebras. Algebra Discrete Math, 2006, 3: 119–126

9 Zhu H, Li F. Quiver approach to some ordered semigroup algebras. Comm Algebra, 2018, 46: 51–61

10 Luo X H, Zhang P. Monic representations and Gorenstein-projective modules. Pacific J Math, 2013, 264: 163–194

11 陈利利. 箭图与 Hopf 代数. 博士学位论文. 杭州: 浙江大学, 2008

12 Zhu H, Li F. Weakly ordered multiplicative basis of an algebra related to quiver theory. J Algebra, 2011, 348: 196–216

13 Green E L. Multiplicative bases, Gröbner bases, and right Gröbner bases. J Symbolic Comput, 2000, 29: 601–623

14 Demonet L. Mutations of group species with potentials and their representations: Applications to cluster algebras. ArXiv:1003.5078, 2010

15 Bautista R, Salmerón L, Zuazua R. Differential Tensor Algebras and Their Module Categories. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 362. Cambridge: Cambridge University Press, 2009

16 Keller B. On differential graded categories. Internat Congr Math, 2006, 2: 151–190

17 Rojter A V. Matrix problems and representations of BOCSs. Represent Theory, 1980: 288–324

18 Mac Lane S. Homology. New York: Springer-Verlag, 1963

19 Guo L, Li F. Structure of Hochschild cohomology of path algebras and differential formulation of Euler's polyhedron formula. Asian J Math, 2014, 18: 545–572

20 Geiss C, Leclerc B, Schröer J. Quivers with relations for symmetrizable Cartan matrices, I: Foundations. Invent Math, 2017, 209: 61–158

21 Li F, Ye C. Gorenstein projective modules over a class of generalized matrix algebras and their applications. Algebr Represent Theory, 2015, 18: 693–710

22 Auslander M, Bridger M. Stable Module Theory. Memoirs of the American Mathematical Society. Providence: Amer Math Soc, 1969

23 Nakayama T. On Frobeniusean algebras, I. Ann of Math (2), 1939, 40: 611–633

24 Li F, Ye C. Representations of Frobenius-type triangular matrix algebras. Acta Math Sin Engl Ser, 2017, 33: 341–361
25 李方, 刘公祥. 广义路余代数和广义对偶 Gabriel 定理. 数学学报, 2008, 51: 853–862
26 Cibils C, Rosso M. Hopf quivers. J Algebra, 2002, 254: 241–251
27 Chen L L, Li F. Hopf algebra structures over generalized path coalgebras. Pure Appl Math Q, 2012, 8: 693–712
28 Green E L, Solberg Ø. Basic Hopf algebras and quantum groups. Math Z, 1998, 229: 45–76
29 刘公祥. 有限维基本 Hopf 代数. 博士学位论文. 杭州: 浙江大学, 2005
30 Liu G X, Li F. Pointed Hopf algebras of finite representation type and their classification. Proc Amer Math Soc, 2007, 135: 649–657
31 Liu G X. On the structure of tame graded basic Hopf algebras. J Algebra, 2006, 299: 841–853
32 Huang H L, Liu G X, Ye Y. Quivers, quasi-quantum groups and finite tensor categories. Comm Math Phys, 2011, 303: 595–612
33 Labardini-Fragoso D, Zelevinsky A. Strongly primitive species with potentials, I: Mutations. Bol Soc Mat Mexicana (3), 2016, 22: 47–115
34 Buan A B, Marsh R, Reineke M, et al. Tilting theory and cluster combinatorics. Adv Math, 2006, 204: 572–618
35 Caldero P, Keller B. From triangulated categories to cluster algebras. Invent Math, 2008, 172: 169–211
36 Caldero P, Keller B. From triangulated categories to cluster algebras, II. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2006, 39: 983–1009
37 Felikson A, Shapiro M, Tumarkin P. Cluster algebras of finite mutation type via unfoldings. Int Math Res Not IMRN, 2012, 8: 1768–1804
38 Fomin S, Zelevinsky A. Cluster algebras, II: Finite type classification. Invent Math, 2003, 154: 63–121

# Generalized path algebra and its significance in representation theory

Fang Li & Chang Ye

**Abstract** In 2000, Shaoxue Liu and Coelho introduced the concept of generalized path algebras in order to make a more direct characterization of the structure and representations of algebras. Over the following decade, the method for generalized path algebras received some developments and applications. This article is a summary and demonstration in this respect. Firstly, we give an introduction to structures and representations of generalized path algebras and some related notions, such as triangular matrix algebras, etc. We show the characterization of generalized path coalgebras with Hopf structures and then suggest a programme for classification of non-basic (resp. non-pointed) Hopf algebras by generalized path (co-)algebras. We also define the mutation of generalized path algebras and then investigate the additive categorification of cluster algebras determined by a class of generalized path algebras.

**Keywords** **generalized path algebra, Gabriel theorem, modulation, Hopf algebra, cluster algebra**

**MSC(2010)** **16G10, 16G20, 16G60, 16T05, 13F60**

**doi: 10.1360/N012018-00008**