含有测量误差的 Panel 数据模型的统计推断

岳莉莉^{1,2}, 史建红^{2*}, 李高荣³

1. 北京工业大学应用数理学院, 北京 100124;

2. 山西师范大学数学与计算机科学学院, 临汾 041004;

3. 北京工业大学北京科学与工程计算研究院, 北京 100124

E-mail: yuelilicz@163.com, shijh70@163.com, ligaorong@gmail.com

收稿日期: 2016-10-07; 接受日期: 2016-12-29; 网络出版日期: 2017-05-17; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11471029)、北京市自然科学基金 (批准号: 1142002) 和山西省自然科学基金 (批准号: 2013011002-1) 资助项目

摘要 本文考虑含有测量误差的 Panel 数据模型在约束条件下的参数估计和检验问题. 首先, 给出未知参数向量的纠正最小二乘估计, 在一些正则条件下研究其渐近性质. 其次, 对线性约束条件的假设检验问题, 利用原假设和备择假设下纠正残差平方和的差构造检验统计量, 并证明该检验统计量的渐近分布. 最后, 通过数值模拟研究验证所提估计和检验方法的有效性.

关键词 Panel 数据模型 测量误差 纠正最小二乘 约束估计 渐近性质

MSC (2010) 主题分类 62F03, 62J05

1 引言

在实际中, 由于种种因素的存在, 如测量工具的不精确、测量成本的昂贵和个人因素等, 数据有时不能被精确测量或感兴趣的变量无法被直接观测到, 而观测到的仅仅是可以反映该变量信息的其他变量的一些数据值, 因此, 数据就带有了测量误差, 具体实例可参见文献 [1]. 若忽略这种误差, 直接用带有测量误差的数据代替真实数据进行统计分析, 那么就极可能得到有偏的估计或低效的检验. 目前, 已经有众多的研究成果, 例如, Fuller^[2] 系统研究了线性测量误差模型; Cheng 和 Van Ness^[3] 以及 Carroll 等^[1] 研究了线性和非线性测量误差模型; 李高荣等^[4] 研究了半参数测量误差模型. 对于传统的线性测量误差模型, 文献 [5-8] 讨论了未知参数的相合估计问题; Tang 等^[9] 讨论了回归系数的假设检验问题; Yang 等^[10] 研究了广义线性测量误差模型, 提出了纠偏的经验似然方法. 对于含有测量误差的线性混合效应模型, Cui 等^[11] 给出了模型中未知参数的矩估计.

本文考虑如下的含有测量误差的 Panel 数据模型:

$$\begin{cases} y_{it} = \beta_0 + x_{it}^T \beta + \mu_i + \nu_t + \varepsilon_{it}, \\ \omega_{it} = x_{it} + \delta_{it}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, T, \end{cases} \quad (1.1)$$

英文引用格式: Yue L L, Shi J H, Li G R. Statistical inference for the Panel data model with errors-in-variables (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1077-1088, doi: 10.1360/SCM-2016-0620

其中 y_{it} 表示第 i 个个体在时刻 t 的观测值, β_0 为截距项, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ 为未知的回归系数向量, x_{it} 为潜在的不可观测的 p 维随机向量, ω_{it} 为可观测的替代变量, μ_i 、 ν_t 和 ε_{it} 分别表示个体效应、时间效应和随机误差项, δ_{it} 为测量误差. 本文假定 $\{x_{it}\}$ 、 $\{\varepsilon_{it}\}$ 和 $\{\delta_{it}\}$ 相互独立, 且分别独立同分布, 满足 $E(\varepsilon_{it}) = 0$, $\text{Cov}(\varepsilon_{it}) = \sigma_\varepsilon^2 < \infty$, $E(\delta_{it}) = \mathbf{0}_p$, $\text{Cov}(\delta_{it}) = \sigma_\delta^2 I_p$, 其中 σ_δ^2 有限并且已知. 如果 σ_δ^2 未知, 则可利用 Carroll 等^[1] 和李高荣等^[4] 建议的重复测量的方法进行估计. 模型 (1.1), 对于不存在时间效应的情形, 学者们给出了广义矩估计方法^[12-14]; 对于不存在测量误差 ($\sigma_\delta^2 = 0$) 的情形, Yue 等^[15] 提出了一种参数 Bootstrap 的检验方法, Wu 和 Li^[16] 给出了未知参数向量的最小二乘估计, 但是 x_{it} 含有可加的测量误差, 如果直接用 ω_{it} 代替 x_{it} , 则得到的估计是有偏的, 甚至是不相合的. 对于模型 (1.1), 上述文献并没有考虑回归系数的约束估计问题, 并且也没有研究约束条件的假设检验问题.

在很多实际问题的研究中, 经常需要考虑一定约束条件下的参数估计问题和该约束条件是否合理的问题. 本文感兴趣的是如下的线性约束条件:

$$H\beta = d, \quad (1.2)$$

其中 H 是一个 $k \times p$ 的行满秩矩阵, d 是一个 $k \times 1$ 的已知向量. 对于约束条件 (1.2) 的假设检验问题, Zhang 等^[17] 和 Wei^[18] 分别考虑了带测量误差的部分线性变系数模型; Tang 等^[9] 考虑了含有删失数据的线性测量误差模型; 杨徐佳等^[19] 考虑了超结构线性测量误差模型. 但是, 模型 (1.1) 在约束条件 (1.2) 下的参数估计和检验问题还没有被研究.

本文基于偏差纠正的思想, 在模型 (1.1) 含有或未含有约束条件的情形下, 给出了未知参数的纠正最小二乘估计, 在一些正则条件下证明其渐近性质; 利用原假设和备择假设下纠正残差平方和的差, 构造检验统计量, 证明该检验统计量的渐近分布, 在此基础上, 对约束条件的假设检验问题, 提出一种近似检验方法. 通过有限样本的数值模拟研究, 验证本文所提方法的有效性.

本文假设 n 趋于无穷, T 固定. 该假设在 Panel 数据模型中较为常见, 详细讨论参见文献 [16, 20]. 本文结构如下: 第 2 节给出模型 (1.1) 中未知参数的两种纠正最小二乘估计, 对约束条件 (1.2) 适用性的假设检验问题, 提出一种检验方法, 并在一些正则条件下研究所提估计和检验统计量的渐近性质; 第 3 节通过 Monte Carlo 模拟研究来验证本文所提方法的有效性; 第 4 节给出定理的证明.

2 研究方法

将模型 (1.1) 写为如下的矩阵形式:

$$\begin{cases} y_i = \beta_0 \mathbf{1}_T + X_i \beta + \mu_i \mathbf{1}_T + \nu + \varepsilon_i, \\ W_i = X_i + \Delta_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{iT})^T$, $X_i = (x_{i1}, \dots, x_{iT})^T$, $x_{it} = (x_{it1}, \dots, x_{itp})^T$, $\mathbf{1}_T$ 是所有分量全为 1 的 $T \times 1$ 向量, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_T)^T$, $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{iT})^T$, $W_i = (\omega_{i1}, \dots, \omega_{iT})^T$, $\omega_{it} = (\omega_{it1}, \dots, \omega_{itp})^T$, $\Delta_i = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{iT})^T$, $\delta_{it} = (\delta_{it1}, \dots, \delta_{itp})^T$.

对模型 (2.1) 中的各项进行中心化处理, 则有

$$\begin{cases} \tilde{y}_i = \tilde{X}_i \beta + \tilde{\mu}_i \mathbf{1}_T + \tilde{\varepsilon}_i, \\ \tilde{W}_i = \tilde{X}_i + \tilde{\Delta}_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 $\tilde{y}_i = y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$, $\tilde{X}_i = X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $\tilde{\mu}_i = \mu_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i$, $\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$, $\tilde{W}_i = W_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i$, $\tilde{\Delta}_i = \Delta_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i$. 事实上, 可以找到一个矩阵 Q , 使得 $(T^{-1/2} \mathbf{1}_T, Q)$ 是一个 $T \times T$ 的正交矩阵, 并满足 $Q^T Q = I_{T-1}$, $Q Q^T = I_T - \frac{1}{T} \mathbf{1}_T \mathbf{1}_T^T$. 对模型 (2.2) 左乘矩阵 Q^T , 得到

$$Q^T \tilde{y}_i = Q^T \tilde{X}_i \beta + Q^T \tilde{\varepsilon}_i, \quad (2.3)$$

$$Q^T \tilde{W}_i = Q^T \tilde{X}_i + Q^T \tilde{\Delta}_i, \quad (2.4)$$

其中 $i = 1, \dots, n$, $Q^T \tilde{\varepsilon}_i$ 的协方差矩阵为 $\frac{n-1}{n} \sigma_\varepsilon^2 I_{T-1}$. 基于最小二乘估计的思想, 得到模型 (2.3) 中 β 的一个估计 $\hat{\beta}_{LS} = (\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^T Q Q^T \tilde{X}_i)^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^T Q Q^T \tilde{y}_i$. 然而, $\tilde{X}_i$ 不能被精确观测到, 如果忽略测量误差, 直接用 $\tilde{W}_i$ 代替 $\hat{\beta}_{LS}$ 中的 $\tilde{X}_i$, 那么所得估计是不相合的.

2.1 参数估计及其渐近性质

为了对约束条件 (1.2) 进行检验, 本节首先给出模型 (1.1) 中回归系数向量的约束估计. 根据模型 (2.3) 和 (2.4), 定义 β 的纠正的最小二乘目标函数如下:

$$\sum_{i=1}^n [(Q^T \tilde{y}_i - Q^T \tilde{W}_i \beta)^T (Q^T \tilde{y}_i - Q^T \tilde{W}_i \beta) - (T-1) \sigma_\delta^2 \beta^T \beta].$$

极小化上面的纠正的最小二乘目标函数, 可得 β 的纠正最小二乘估计为

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T P_{\mathbf{1}_T}^\perp \tilde{W}_i - n(T-1) \sigma_\delta^2 I_p \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T P_{\mathbf{1}_T}^\perp \tilde{y}_i, \quad (2.5)$$

其中 $P_{\mathbf{1}_T}^\perp = Q Q^T = I_T - \frac{1}{T} \mathbf{1}_T \mathbf{1}_T^T$, 可见其与矩阵 Q 的选择无关.

下面讨论在约束条件 (1.2) 下, 回归参数 β 的估计方法. 基于 Lagrange 乘子法, 构造辅助函数

$$F(\beta, \lambda) = \sum_{i=1}^n (Q^T \tilde{y}_i - Q^T \tilde{W}_i \beta)^T (Q^T \tilde{y}_i - Q^T \tilde{W}_i \beta) - n(T-1) \sigma_\delta^2 \beta^T \beta + 2\lambda^T (H\beta - d),$$

其中 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^T$ 为 Lagrange 乘子. 对辅助函数 $F(\beta, \lambda)$ 关于 β 和 λ 分别求偏导, 并令其偏导数等于零, 则有

$$\begin{cases} \frac{\partial F(\beta, \lambda)}{\partial \beta} = -2 \sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T Q Q^T \tilde{y}_i + 2 \sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T Q Q^T \tilde{W}_i \beta - 2n(T-1) \sigma_\delta^2 I_p \beta + 2H^T \lambda = 0, \\ \frac{\partial F(\beta, \lambda)}{\partial \lambda} = H\beta - d = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

求解 (2.6), 可得 β 的约束纠正最小二乘估计

$$\hat{\beta}_R = \hat{\beta} - W_\delta^{-1} H^T (H W_\delta^{-1} H^T)^{-1} (H \hat{\beta} - d), \quad (2.7)$$

其中 $W_\delta = \sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T P_{\mathbf{1}_T}^\perp \tilde{W}_i - n(T-1) \sigma_\delta^2 I_p$.

在给出估计 $\hat{\beta}$ 和 $\hat{\beta}_R$ 的渐近性质之前, 首先给出下面的条件:

(C.1) 假设 $\Sigma_1 = E(X_i^T P_{\mathbf{1}_T}^\perp X_i) - E(X_i^T) P_{\mathbf{1}_T}^\perp E(X_i)$ 为正定矩阵;

(C.2) 假设 $E\|\Delta_i\|^4 < \infty$, $E\|X_i\|^4 < \infty$.

注 1 条件 (C.1) 用于证明回归系数估计的渐近性质, 条件 (C.2) 用于证明定理 4. 这两个条件都是回归模型大样本性质研究中一些常见的假设条件, 且容易满足, 在文献 [7, 9, 11, 16] 以及其他文献中都可以看到类似的条件.

定理 1 假设条件 (C.1) 成立, 且 $E\|X_i\|^2 < \infty$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{L} N(\mathbf{0}_p, \Sigma_1^{-1} \Sigma_2 \Sigma_1^{-1}),$$

其中 “ $\xrightarrow{L}$ ” 表示依分布收敛, $\mathbf{0}_p$ 是所有元素都为零的 p 维均值向量, Σ_1 的定义见条件 (C.1), 且

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= E\{[(X_i - EX_i) + \Delta_i]^T P_{1T}^\perp (\varepsilon_i - \Delta_i \beta)\}^{\otimes 2} - (T-1)^2 (\sigma_\delta^2)^2 \beta \beta^T \\ &= (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\delta^2 \beta^T \beta) \cdot E[(X_i - EX_i)^T P_{1T}^\perp (X_i - EX_i)] + (T-1) \sigma_\varepsilon^2 \cdot \sigma_\delta^2 I_p \\ &\quad + E[\Delta_i^T P_{1T}^\perp \Delta_i \beta \beta^T \Delta_i^T P_{1T}^\perp \Delta_i] + E[(X_i - EX_i)^T P_{1T}^\perp \Delta_i \beta \beta^T \Delta_i^T P_{1T}^\perp \Delta_i] \\ &\quad + E[\Delta_i^T P_{1T}^\perp \Delta_i \beta \beta^T \Delta_i^T P_{1T}^\perp (X_i - EX_i)] - (T-1)^2 (\sigma_\delta^2)^2 \beta \beta^T, \end{aligned}$$

其中 $A^{\otimes 2} = AA^T$.

为了利用定理 1 进行统计推断, 需要给出 Σ_1 和 Σ_2 的相合估计. 由 (2.5) 定义的 β 的估计 $\hat{\beta}$, 分别定义 $\hat{\Sigma}_1$ 和 $\hat{\Sigma}_2$ 的估计如下:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T P_{1T}^\perp \tilde{W}_i - (T-1) \sigma_\delta^2 I_p, \\ \hat{\Sigma}_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tilde{W}_i^T P_{1T}^\perp (\tilde{y}_i - \tilde{W}_i \hat{\beta}))^{\otimes 2} - (T-1)^2 (\sigma_\delta^2)^2 \hat{\beta} \hat{\beta}^T. \end{aligned}$$

易证, $\hat{\Sigma}_1 \xrightarrow{P} \Sigma_1$, 并且在条件 (C.2) 成立时, 有 $\hat{\Sigma}_2 \xrightarrow{P} \Sigma_2$, 其中 “ $\xrightarrow{P}$ ” 表示依概率收敛.

注 2 定理 1 给出了 β 的纠正最小二乘估计 $\hat{\beta}$ 的渐近分布. 如果 X_i 能精确测量, 则通过对比容易发现 $\hat{\beta}$ 与文献 [16] 中给出的估计具有相同的渐近分布.

定理 2 假设条件 (C.1) 成立, 且 $E\|X_i\|^2 < \infty$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_R - \beta) \xrightarrow{L} N(\mathbf{0}_p, (I_p - D)(\Sigma_1^{-1} \Sigma_2 \Sigma_1^{-1})(I_p - D)^T),$$

其中 $D = \Sigma_1^{-1} H^T (H \Sigma_1^{-1} H^T)^{-1} H$.

2.2 线性约束条件的检验

为了检验约束条件 (1.2) 的适用性, 本节考虑如下的假设检验问题:

$$H_0 : H\beta = d \leftrightarrow H_1 : H\beta \neq d. \quad (2.8)$$

下面提出一种新的检验方法, 该检验方法的基本思想是比较原假设和备择假设下的纠正残差平方和.

首先, 定义原假设下的纠正残差平方和

$$RSS(H_0) = \sum_{i=1}^n \|Q^T \tilde{y}_i - Q^T \tilde{W}_i \hat{\beta}_R\|^2 - n(T-1) \hat{\beta}_R^T \sigma_\delta^2 I_p \hat{\beta}_R. \quad (2.9)$$

然后, 定义备择假设下的纠正残差平方和

$$RSS(H_1) = \sum_{i=1}^n \|Q^T \tilde{y}_i - Q^T \tilde{W}_i \hat{\beta}\|^2 - n(T-1) \hat{\beta}^T \sigma_\delta^2 I_p \hat{\beta}. \quad (2.10)$$

结合 (2.9) 和 (2.10), 构造如下的检验统计量:

$$T_n = \text{RSS}(H_0) - \text{RSS}(H_1). \quad (2.11)$$

显然, 当假设 (2.8) 中的原假设 H_0 成立时, $\text{RSS}(H_0)$ 和 $\text{RSS}(H_1)$ 不会有显著的差异. 如果 T_n 值比较大, 则需拒绝原假设 H_0 . 下面给出检验统计量的渐近分布.

定理 3 假设条件 (C.1) 和原假设 H_0 成立, 且 $E\|X_i\|^2 < \infty$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$T_n \xrightarrow{L} \xi_1 \chi_{1,1}^2 + \cdots + \xi_k \chi_{1,k}^2,$$

其中 $\chi_{1,j}^2$ ($1 \leq j \leq k$) 是相互独立的 χ_1^2 变量, ξ_j ($1 \leq j \leq k$) 是矩阵 $(H\Sigma_1^{-1}H^T)^{-1}(H\Sigma_1^{-1}\Sigma_2\Sigma_1^{-1}H^T)$ 的特征根.

根据 Rao 和 Scott^[21] 的理论, $k(\sum_{j=1}^k \xi_j \chi_{j,1}^2) / \sum_{j=1}^k \xi_j$ 的分布可以用自由度为 k 的 χ^2 分布来近似. Wang 和 Rao^[22] 以及李高荣等^[23] 则基于该逼近思想, 提出了一种校正方法, 该方法可以将服从加权 χ^2 分布的随机变量转化为服从标准 χ^2 分布的随机变量. 基于该校正方法, 定义如下的校正因子:

$$\rho = \frac{\text{tr}\{(H\hat{\Sigma}_1^{-1}\hat{\Sigma}_2\hat{\Sigma}_1^{-1}H^T)^{-1}(H\hat{\beta} - d)(H\hat{\beta} - d)^T\}}{\text{tr}\{(H\hat{\Sigma}_1^{-1}H^T)^{-1}(H\hat{\beta} - d)(H\hat{\beta} - d)^T\}}.$$

构造校正检验统计量为 $T_n^* = \rho T_n$.

定理 4 假设条件 (C.1) 和 (C.2) 以及原假设 H_0 成立, 则当 $n \rightarrow \infty$, 有 $T_n^* \xrightarrow{L} \chi_k^2$, 其中 χ_k^2 表示自由度为 k 的 χ^2 分布.

当 $T_n^* > \chi_k^2(1-\alpha)$ 时, 拒绝原假设 H_0 , 否则需要接受原假设 H_0 , 其中 $\chi_k^2(1-\alpha)$ 表示 χ_k^2 的 $1-\alpha$ 分位数.

3 随机模拟

本节通过两个数值模拟研究验证所提估计和检验方法的有效性. 在模拟中, 样本数据产生于如下模型:

$$\begin{cases} y_i = \beta_0 \mathbf{1}_T + X_i \beta + \mu_i \mathbf{1}_T + \nu + \varepsilon_i, \\ W_i = X_i + \Delta_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

其中 $n = 100, n = 300$ 或 $n = 500$; $T = 5$; $\beta_0 = 1, \beta = (\beta_1, \beta_2)^T$; $X_i = (x_{i1}, \dots, x_{iT})^T, x_{it} = (x_{it1}, x_{it2})^T, x_{itl}$ ($i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T, l = 1, 2$) 独立同分布地产生于标准正态分布; $\Delta_i = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{iT})^T, \delta_{it}$ 独立同分布于一个均值向量是 $\mathbf{0}_2$, 协方差阵是 $\sigma_\delta^2 I_2$ 的多元正态分布, 在此取 $\sigma_\delta^2 = 0.25$ 或 $\sigma_\delta^2 = 0.5$. 所有的随机模拟都是用 R 软件完成, 且进行了 1,000 次重复.

为了讨论 μ_i, ν 和 ε_i ($i = 1, \dots, n$) 的不同分布对所提估计和检验方法的影响, 模拟中考虑了下面四种不同的情形:

- (i) $\mu_i \sim N(0, 0.5), \nu \sim N(0, 0.4), \varepsilon_i \sim N(0, 0.25)$;
- (ii) $\mu_i \sim \sqrt{0.5}U(-\sqrt{3}, \sqrt{3}), \nu \sim \sqrt{0.4}U(-\sqrt{3}, \sqrt{3}), \varepsilon_i \sim \sqrt{0.25}U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$;
- (iii) $\mu_i \sim \sqrt{0.5}(\text{Exp}(1) - 1), \nu \sim \sqrt{0.4}(\text{Exp}(1) - 1), \varepsilon_i \sim \sqrt{0.25}(\text{Exp}(1) - 1)$;
- (iv) $\mu_i \sim \sqrt{\frac{0.5}{2}}(\chi_1^2 - 1), \nu \sim \sqrt{\frac{0.4}{2}}(\chi_1^2 - 1), \varepsilon_i \sim \sqrt{\frac{0.25}{2}}(\chi_1^2 - 1)$,

其中 $U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 表示区间 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 上的均匀分布, $\text{Exp}(1)$ 表示参数为 1 的指数分布.

第一个数值模拟研究讨论了所提估计的性质. 针对不同的参数选择和样本容量, 纠正最小二乘估计 $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)^T$ 和约束纠正最小二乘估计 $\hat{\beta}_R = (\hat{\beta}_{R1}, \hat{\beta}_{R2})^T$ 的样本均值 (mean) 和均方误差 (MSE) 的数据结果列在表 1. 对于 μ_i 、 ν 和 ε_i ($i = 1, \dots, n$) 的四种不同分布 (i)–(iv), 以情形 (i) 和 (ii) 为例, 图 1 和 2 分别给出了在 n 和 σ_δ^2 变化时, 估计 $\hat{\beta}$ 和 $\hat{\beta}_R$ 相应的密度函数曲线的变化情况. 在这个模拟中, 约束条件为 (1.2), 其中 $H = (1, 1)$, $\beta = (1, 2)^T$, $d = 3$.

观察表 1, 得到下面的结论: (1) $\hat{\beta}$ 和 $\hat{\beta}_R$ 是渐近无偏的; (2) 当样本容量一定时, 估计的偏差和均方误差随着测量误差方差的增大而增大; (3) 当测量误差项的方差一定时, 估计的偏差和均方误差随着样本容量的增大而减小; (4) 约束估计 $\hat{\beta}_R$ 的均方误差比 $\hat{\beta}$ 的小; (5) 方差分量分布的变化, 不影响估计的有效性.

对于情形 (i) 和 (ii), 图 1 和 2 分别呈现了所提出的两种估计 $\hat{\beta}$ 和 $\hat{\beta}_R$ 的密度函数曲线. 所有图显示, $\hat{\beta}_1$ 、 $\hat{\beta}_2$ 、 $\hat{\beta}_{R1}$ 和 $\hat{\beta}_{R2}$ 渐近服从正态分布, 且在方差分量分布变化时, 相应的密度函数曲线的变化较小.

表 1 估计 $\hat{\beta}$ 和 $\hat{\beta}_R$ 的有限样本性质

情形	n	σ_δ^2	$\hat{\beta}_1$		$\hat{\beta}_2$		$\hat{\beta}_{R1}$		$\hat{\beta}_{R2}$	
			mean	MSE	mean	MSE	mean	MSE	mean	MSE
情形 (i)	100	0.25	1.0081	0.0066	2.0096	0.0072	0.9997	0.0032	2.0003	0.0032
		0.50	1.0172	0.0142	2.0233	0.0171	0.9981	0.0065	2.0019	0.0065
	300	0.25	1.0033	0.0021	2.0018	0.0022	1.0009	0.0010	1.9991	0.0010
		0.50	1.0062	0.0045	2.0052	0.0049	1.0008	0.0021	1.9992	0.0021
	500	0.25	1.0018	0.0013	2.0001	0.0013	1.0009	0.0006	1.9991	0.0006
		0.50	1.0037	0.0026	2.0019	0.0029	1.0011	0.0013	1.9989	0.0013
情形 (ii)	100	0.25	1.0038	0.0068	2.0104	0.0069	0.9970	0.0033	2.0030	0.0033
		0.50	1.0096	0.0143	2.0227	0.0160	0.9943	0.0067	2.0057	0.0067
	300	0.25	1.0031	0.0020	2.0029	0.0022	1.0002	0.0010	1.9998	0.0010
		0.50	1.0063	0.0042	2.0068	0.0050	1.0000	0.0020	2.0000	0.0020
	500	0.25	1.0008	0.0012	2.0011	0.0013	1.0000	0.0006	2.0000	0.0006
		0.50	1.0021	0.0026	2.0031	0.0029	0.9998	0.0012	2.0003	0.0012
情形 (iii)	100	0.25	1.0022	0.0067	2.0117	0.0066	0.9955	0.0029	2.0045	0.0029
		0.50	1.0078	0.0143	2.0243	0.0154	0.9925	0.0060	2.0075	0.0060
	300	0.25	0.9997	0.0020	2.0037	0.0021	0.9981	0.0010	2.0019	0.0010
		0.50	1.0006	0.0042	2.0072	0.0045	0.9970	0.0019	2.0030	0.0019
	500	0.25	0.9999	0.0012	2.0020	0.0013	0.9990	0.0006	2.0010	0.0006
		0.50	1.0001	0.0025	2.0045	0.0028	0.9980	0.0011	2.0020	0.0011
情形 (iv)	100	0.25	0.9986	0.0063	2.0091	0.0074	0.9953	0.0032	2.0047	0.0032
		0.50	1.0027	0.0134	2.0199	0.0165	0.9925	0.0065	2.0075	0.0065
	300	0.25	1.0001	0.0022	2.0029	0.0024	0.9987	0.0010	2.0013	0.0010
		0.50	1.0014	0.0044	2.0068	0.0050	0.9975	0.0020	2.0025	0.0020
	500	0.25	1.0001	0.0013	2.0015	0.0015	0.9994	0.0006	2.0006	0.0006
		0.50	1.0008	0.0026	2.0041	0.0032	0.9986	0.0013	2.0014	0.0013

图 1 在情形 (i) 下, $\hat{\beta}$ 和 $\hat{\beta}_R$ 的密度函数曲线

图 2 在情形 (ii) 下, $\hat{\beta}$ 和 $\hat{\beta}_R$ 的密度函数曲线

如果固定测量误差方差, 增大样本容量, 则曲线呈高而瘦; 如果固定样本容量, 增大测量误差方差, 则曲线呈矮而胖. 对于情形 (iii) 和 (iv), 也有类似的结论. 总之, 数据结果表明估计 $\hat{\beta}$ 和 $\hat{\beta}_R$ 都是有效的.

第二个数值模拟研究讨论了所提检验方法的有效性. 在此模拟中, 取显著性水平 $\alpha = 0.05$. 考虑检验问题 (2.8), 令

$$H = (1, -1), \quad \beta = (1, 1)^T, \quad d \text{ 分别取 } 0.0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20,$$

如果 $d = 0.0$, 则原假设成立; 否则, 备择假设成立. 针对上面不同的参数选择和样本容量, 原假设成立时, 犯第一类错误的估计值和备择假设成立时检验功效的估计值均列在表 2.

从表 2 中的数据结果可以看出, (1) 对于不同的参数选择和样本容量, 第 2 节提出的检验方法, 在原假设成立的情形下, 可以很好地控制犯第一类错误的概率. (2) 在备择假设成立的情形下, 随机效应和误差项的分布变化对检验功效的变化影响较小; 并且检验功效随着原假设和备择假设偏离程度的增大而增大. (3) 当样本容量一定时, 检验功效随着测量误差方差的增大而减小; 当测量误差的方差一定时, 检验功效随着样本容量的增大而增大. 总之, 提出的检验方法是有效的.

表 2 所提检验方法犯第一类错误的概率和功效的模拟结果

情形	σ_δ^2	n	d - 值				
			0.0	0.05	0.10	0.15	0.20
情形 (i)	0.25	100	0.047	0.097	0.223	0.445	0.654
		300	0.050	0.179	0.544	0.875	0.986
		500	0.042	0.245	0.762	0.969	0.998
	0.50	100	0.048	0.083	0.160	0.299	0.441
		300	0.051	0.117	0.356	0.664	0.861
		500	0.041	0.163	0.546	0.845	0.982
情形 (ii)	0.25	100	0.054	0.106	0.228	0.448	0.650
		300	0.050	0.201	0.530	0.841	0.982
		500	0.052	0.252	0.736	0.976	1.000
	0.50	100	0.049	0.085	0.150	0.308	0.457
		300	0.052	0.135	0.352	0.646	0.874
		500	0.047	0.158	0.525	0.847	0.989
情形 (iii)	0.25	100	0.052	0.110	0.255	0.447	0.635
		300	0.043	0.173	0.515	0.854	0.982
		500	0.048	0.241	0.751	0.978	1.000
	0.50	100	0.048	0.087	0.167	0.296	0.436
		300	0.049	0.116	0.323	0.644	0.863
		500	0.055	0.157	0.516	0.858	0.979
情形 (iv)	0.25	100	0.059	0.113	0.233	0.406	0.640
		300	0.050	0.145	0.564	0.865	0.985
		500	0.049	0.266	0.726	0.968	1.000
	0.50	100	0.050	0.076	0.160	0.267	0.426
		300	0.046	0.106	0.364	0.652	0.856
		500	0.045	0.170	0.508	0.848	0.979

4 定理证明

定理 1 的证明 根据 (2.5) 定义的 $\hat{\beta}$, 有

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) &= \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{W}_i - (T-1)\sigma_\delta^2 I_p \right)^{-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{y}_i - \sqrt{n}\beta \\ &= \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{W}_i - (T-1)\sigma_\delta^2 I_p \right)^{-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tilde{W}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{y}_i - \tilde{W}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{W}_i \beta \\ &\quad + (T-1)\sigma_\delta^2 \beta).\end{aligned}\quad (4.1)$$

经过简单的整理, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{W}_i - (T-1)\sigma_\delta^2 I_p &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i^T P_{1_T}^\perp W_i - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i^T \right) P_{1_T}^\perp \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i \right) - (T-1)\sigma_\delta^2 I_p \\ &= \Sigma_1 + o_p(1),\end{aligned}\quad (4.2)$$

并且

$$\begin{aligned}\tilde{W}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{y}_i - \tilde{W}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{W}_i \beta + (T-1)\sigma_\delta^2 \beta \\ = \tilde{X}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{\varepsilon}_i + \tilde{\Delta}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{\varepsilon}_i - \tilde{X}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{\Delta}_i \beta - \tilde{\Delta}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{\Delta}_i \beta + (T-1)\sigma_\delta^2 \beta.\end{aligned}\quad (4.3)$$

由于 $\tilde{X}_i$ 、 $\tilde{\varepsilon}_i$ 和 $\tilde{\Delta}_i$ 是独立同分布的序列, 故有

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) = O_p(1), \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = O_p(1), \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \Delta_i = O_p(1). \quad (4.4)$$

于是, 结合 (4.1)–(4.4), $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ 可以重新写为

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \Sigma_1^{-1} (\tilde{X}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{\varepsilon}_i + \tilde{\Delta}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{\varepsilon}_i - \tilde{X}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{\Delta}_i \beta - \tilde{\Delta}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{\Delta}_i \beta + (T-1)\sigma_\delta^2 \beta) + o_p(1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \Sigma_1^{-1} \left[X_i^T P_{1_T}^\perp \varepsilon_i - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^T \right) P_{1_T}^\perp \varepsilon_i + \Delta_i^T P_{1_T}^\perp \varepsilon_i - X_i^T P_{1_T}^\perp \Delta_i \beta + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^T \right) P_{1_T}^\perp \Delta_i \beta \right. \\ &\quad \left. - \Delta_i^T P_{1_T}^\perp \Delta_i \beta + (T-1)\sigma_\delta^2 \beta \right] + o_p(1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \Sigma_1^{-1} \left[\left(X_i^T - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^T \right) P_{1_T}^\perp (\varepsilon_i - \Delta_i \beta) + \Delta_i^T P_{1_T}^\perp \varepsilon_i - \Delta_i^T P_{1_T}^\perp \Delta_i \beta + (T-1)\sigma_\delta^2 \beta \right] + o_p(1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \Sigma_1^{-1} \left[(X_i^T - EX_i^T) P_{1_T}^\perp (\varepsilon_i - \Delta_i \beta) + \left(EX_i^T - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^T \right) P_{1_T}^\perp (\varepsilon_i - \Delta_i \beta) \right. \\ &\quad \left. + \Delta_i^T P_{1_T}^\perp \varepsilon_i - \Delta_i^T P_{1_T}^\perp \Delta_i \beta + (T-1)\sigma_\delta^2 \beta \right] + o_p(1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \Sigma_1^{-1} [(X_i^T - EX_i^T + \Delta_i^T) P_{1_T}^\perp (\varepsilon_i - \Delta_i \beta) + (T-1)\sigma_\delta^2 \beta] + o_p(1) \\ &=: \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \eta_i + o_p(1),\end{aligned}$$

其中 $E(\eta_i) = \mathbf{0}_p$, $\text{Cov}(\eta_i) = \Sigma_1^{-1} \Sigma_2 \Sigma_1^{-1}$. 因此, 利用中心极限定理, 能够证明

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(\mathbf{0}_p, \Sigma_1^{-1} \Sigma_2 \Sigma_1^{-1}).$$

定理 1 得证. □

定理 2 的证明 根据 (2.7) 定义的 $\hat{\beta}_R$, 可得

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_R - \beta &= \hat{\beta} - \beta - \left(\sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{W}_i - n(T-1)\sigma_\delta^2 I_p \right)^{-1} \\ &\quad \times H^T \left[H \left(\sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{W}_i - n(T-1)\sigma_\delta^2 I_p \right)^{-1} H^T \right]^{-1} (H\hat{\beta} - d) \\ &= \left[I_p - \left(\sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{W}_i - n(T-1)\sigma_\delta^2 I_p \right)^{-1} \right. \\ &\quad \times H^T \left(H \left(\sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{W}_i - n(T-1)\sigma_\delta^2 I_p \right)^{-1} H^T \right)^{-1} H \left. \right] (\hat{\beta} - \beta) \\ &= (I_p - D)(\hat{\beta} - \beta) + o_p(1). \end{aligned}$$

于是, $\hat{\beta}_R - \beta \xrightarrow{P} (I_p - D)(\hat{\beta} - \beta)$. 结合定理 1, 则有 $\sqrt{n}(\hat{\beta}_R - \beta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(\mathbf{0}_p, (I_p - D)(\Sigma_1^{-1} \Sigma_2 \Sigma_1^{-1})(I_p - D)^T)$.

定理 2 得证. □

定理 3 的证明 为了书写方便, 记

$$B = \left(\sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{W}_i - n(T-1)\sigma_\delta^2 I_p \right)^{-1} H^T \left[H \left(\sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{W}_i - n(T-1)\sigma_\delta^2 I_p \right)^{-1} H^T \right]^{-1}.$$

结合 $\hat{\beta}_R$ 和 $\text{RSS}(H_0)$ 的定义, 则有 $\hat{\beta}_R = \hat{\beta} - B(H\hat{\beta} - d)$, 并且

$$\begin{aligned} \text{RSS}(H_0) &= \sum_{i=1}^n \|Q^T \tilde{y}_i - Q^T \tilde{W}_i \hat{\beta}_R\|^2 - n(T-1)\sigma_\delta^2 \hat{\beta}_R^T \hat{\beta}_R \\ &= \sum_{i=1}^n (Q^T \tilde{y}_i - Q^T \tilde{W}_i \hat{\beta}_R)^T (Q^T \tilde{y}_i - Q^T \tilde{W}_i \hat{\beta}_R) - n(T-1)\sigma_\delta^2 \hat{\beta}_R^T \hat{\beta}_R \\ &= \sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i^T Q - \hat{\beta}^T \tilde{W}_i^T Q + (H\hat{\beta} - d)^T B^T \tilde{W}_i^T Q) (Q^T \tilde{y}_i - Q^T \tilde{W}_i \hat{\beta} + Q^T \tilde{W}_i B(H\hat{\beta} - d)) \\ &\quad - n(T-1)\sigma_\delta^2 (\hat{\beta} - B(H\hat{\beta} - d))^T (\hat{\beta} - B(H\hat{\beta} - d)) \\ &= \sum_{i=1}^n [(\tilde{y}_i^T Q - \hat{\beta}^T \tilde{W}_i^T Q)(Q^T \tilde{y}_i - Q^T \tilde{W}_i \hat{\beta}) + (\tilde{y}_i^T Q - \hat{\beta}^T \tilde{W}_i^T Q) Q^T \tilde{W}_i B(H\hat{\beta} - d) \\ &\quad + (H\hat{\beta} - d)^T B^T \tilde{W}_i^T Q (Q^T \tilde{y}_i - Q^T \tilde{W}_i \hat{\beta}) + (H\hat{\beta} - d)^T B^T \tilde{W}_i^T Q Q^T \tilde{W}_i B(H\hat{\beta} - d)] \\ &\quad - n(T-1)\sigma_\delta^2 \hat{\beta}^T \hat{\beta} + n(T-1)\sigma_\delta^2 \hat{\beta}^T B(H\hat{\beta} - d) + n(T-1)\sigma_\delta^2 (H\hat{\beta} - d)^T B^T \hat{\beta} \\ &\quad - n(T-1)\sigma_\delta^2 (H\hat{\beta} - d)^T B^T B(H\hat{\beta} - d). \end{aligned} \tag{4.5}$$

经过简单的整理, 可得 $\sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i^T Q - \hat{\beta}^T \tilde{W}_i^T Q) Q^T \tilde{W}_i B(H\hat{\beta} - d) + n(T-1)\sigma_\delta^2 \hat{\beta}^T B(H\hat{\beta} - d)$ 和 $\sum_{i=1}^n (H\hat{\beta} - d)^T B^T \tilde{W}_i^T Q (Q^T \tilde{y}_i - Q^T \tilde{W}_i \hat{\beta}) + n(T-1)\sigma_\delta^2 (H\hat{\beta} - d)^T B^T \hat{\beta}$ 都是零矩阵, 于是, (4.5) 可以重新写为

$$\text{RSS}(H_0) = \text{RSS}(H_1) + (H\hat{\beta} - d)^T \left[H \left(\sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T P_{1_T}^\perp \tilde{W}_i - n(T-1)\sigma_\delta^2 I_p \right)^{-1} H^T \right]^{-1} (H\hat{\beta} - d).$$

从而, 检验统计量

$$T_n = (H\hat{\beta} - d)^T \left[H \left(\sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T P_{1T}^\perp \tilde{W}_i - n(T-1)\sigma_\delta^2 I_p \right)^{-1} H^T \right]^{-1} (H\hat{\beta} - d), \quad (4.6)$$

其中

$$\sqrt{n}(H(\hat{\beta} - \beta)) \xrightarrow{L} N(\mathbf{0}_k, H(\Sigma_1^{-1}\Sigma_2\Sigma_1^{-1})H^T), \quad (4.7)$$

$$H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T P_{1T}^\perp \tilde{W}_i - (T-1)\sigma_\delta^2 I_p \right)^{-1} H^T \xrightarrow{P} H\Sigma_1^{-1}H^T. \quad (4.8)$$

在原假设 H_0 成立的情形下, 结合 (4.6)–(4.8), 有

$$\begin{aligned} T_n &= \sqrt{n}(H\hat{\beta} - d)^T (H\Sigma_1^{-1}H^T)^{-1} \cdot \sqrt{n}(H\hat{\beta} - d) + o_p(1) \\ &= [(H(\Sigma_1^{-1}\Sigma_2\Sigma_1^{-1})H^T)^{-1/2}\sqrt{n}(H\hat{\beta} - d)]^T [(H(\Sigma_1^{-1}\Sigma_2\Sigma_1^{-1})H^T)^{1/2}(H\Sigma_1^{-1}H^T)^{-1} \\ &\quad \times (H(\Sigma_1^{-1}\Sigma_2\Sigma_1^{-1})H^T)^{1/2}] [(H(\Sigma_1^{-1}\Sigma_2\Sigma_1^{-1})H^T)^{-1/2}\sqrt{n}(H\hat{\beta} - d)] + o_p(1). \end{aligned}$$

令 $\xi_1, \dots, \xi_k$ 是矩阵 $(H(\Sigma_1^{-1}\Sigma_2\Sigma_1^{-1})H^T)^{1/2}(H\Sigma_1^{-1}H^T)^{-1}(H(\Sigma_1^{-1}\Sigma_2\Sigma_1^{-1})H^T)^{1/2}$ 的特征根, $U = \text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_k)$. 因此, 存在正交矩阵 G 使得

$$(H(\Sigma_1^{-1}\Sigma_2\Sigma_1^{-1})H^T)^{1/2}(H\Sigma_1^{-1}H^T)^{-1}(H(\Sigma_1^{-1}\Sigma_2\Sigma_1^{-1})H^T)^{1/2} = G^T U G.$$

于是,

$$T_n = [G(H(\Sigma_1^{-1}\Sigma_2\Sigma_1^{-1})H^T)^{-1/2}\sqrt{n}(H\hat{\beta} - d)]^T U [G(H(\Sigma_1^{-1}\Sigma_2\Sigma_1^{-1})H^T)^{-1/2}\sqrt{n}(H\hat{\beta} - d)] + o_p(1).$$

假设原假设 H_0 成立, 则有 $T_n \xrightarrow{L} \xi_1\chi_{1,1}^2 + \dots + \xi_k\chi_{1,k}^2$. 注意到矩阵 $(H\Sigma_1^{-1}H^T)^{-1}(H(\Sigma_1^{-1}\Sigma_2\Sigma_1^{-1})H^T)$ 和 $(H(\Sigma_1^{-1}\Sigma_2\Sigma_1^{-1})H^T)^{1/2}(H\Sigma_1^{-1}H^T)^{-1}(H(\Sigma_1^{-1}\Sigma_2\Sigma_1^{-1})H^T)^{1/2}$ 具有相同的特征根. 因此定理 3 得证. $\square$

定理 4 的证明 根据 (4.6)、 T_n^* 的定义以及 $\hat{\Sigma}_1$ 和 $\hat{\Sigma}_2$ 的相合性, 则有

$$\begin{aligned} T_n^* &= n(H\hat{\beta} - d)^T (H\hat{\Sigma}_1^{-1}\hat{\Sigma}_2\hat{\Sigma}_1^{-1}H^T)^{-1}(H\hat{\beta} - d) \\ &= n(H\hat{\beta} - d)^T (H\Sigma_1^{-1}\Sigma_2\Sigma_1^{-1}H^T)^{-1}(H\hat{\beta} - d) + o_p(1). \end{aligned}$$

于是, 定理 4 得证. $\square$

致谢 衷心感谢编委和两位审稿人提出的宝贵建议, 他们的意见和建议使得本文有了进一步的提高.

参考文献

- 1 Carroll R J, Ruppert D, Stefanski L A, et al. Measurement Error in Nonlinear Models: A Modern Perspective. New York: Chapman & Hall/CRC, 2006
- 2 Fuller W A. Measurement Error Models. New York: John Wiley & Sons, 1987
- 3 Cheng C L, Van Ness J. Statistical Regression with Measurement Error. London: Arnold, 1999
- 4 李高荣, 张君, 冯三营. 现代测量误差模型. 北京: 科学出版社, 2016
- 5 Cui H J, Chen X S. Empirical likelihood confidence region for parameter in the errors-in-variables models. J Multivariate Anal, 2003, 84: 101–115
- 6 Shalabh. Consistent estimation of coefficients in measurement error models with replicated observation. J Multivariate Anal, 2003, 86: 227–241

- 7 Shalabh, Garg G, Misra N. Restricted regression estimation in measurement error models. *Comput Statist Data Anal*, 2007, 52: 1149–1166
- 8 Liu Q. Estimation of the linear EV model with censored data. *J Statist Plann Inference*, 2011, 141: 2463–2471
- 9 Tang L J, Zhou Z G, Wu C C. Testing the linear errors-in-variables model with randomly censored data. *Statist Probab Lett*, 2013, 83: 875–884
- 10 Yang Y P, Li G R, Tong T J. Corrected empirical likelihood for a class of generalized linear measurement error models. *Sci China Math*, 2015, 58: 1523–1536
- 11 Cui H J, Ng K W, Zhu L X. Estimation in mixed effects model with errors in variables. *J Multivariate Anal*, 2004, 91: 53–73
- 12 Xiao Z G, Shao J, Palta M. Instrumental variable and GMM estimation for panel data with measurement error. *Statist Sinica*, 2010, 20: 1725–1747
- 13 Griliches Z, Hausman J A. Errors in variables in panel data. *J Econometrics*, 1986, 32: 93–118
- 14 Wansbeek T J. GMM estimation in panel data models with measurement error. *J Econometrics*, 2001, 104: 259–268
- 15 Yue L L, Shi J H, Song W X. A parametric bootstrap approach for two-way error component regression models. *Comm Statist Simulation Comput*, 2017, 46: 3952–3961
- 16 Wu J H, Li G D. Moment-based tests for individual and time effects in panel data models. *J Econometrics*, 2014, 178: 569–581
- 17 Zhang W W, Li G R, Xue L G. Profile inference on partially linear varying-coefficient errors-in-variables models under restricted condition. *Comput Statist Data Anal*, 2011, 55: 3027–3040
- 18 Wei C H. Statistical inference for restricted partially linear varying coefficient errors-in-variables models. *J Statist Plann Inference*, 2012, 142: 2464–2472
- 19 杨徐佳, 魏传华, 齐飞. 约束线性测量误差模型的统计推断. *系统科学与数学*, 2013, 33: 171–178
- 20 Baltagi B H. *Econometric Analysis of Panel Data*. New York: John Wiley & Sons, 2008
- 21 Rao J N K, Scott A J. The analysis of categorical data from complex sample surveys: Chi-squared tests for goodness of fit and independence in two-way tables. *J Amer Statist Assoc*, 1981, 76: 221–230
- 22 Wang Q H, Rao J N K. Empirical likelihood-based inference in linear errors-in-covariables models with validation data. *Biometrika*, 2002, 89: 345–358
- 23 李高荣, 薛留根, 冯三营. 核实数据下响应变量缺失的线性 EV 模型的经验似然推断. *系统科学与数学*, 2009, 29: 94–108

Statistical inference for the Panel data model with errors-in-variables

YUE LiLi, SHI JianHong & LI GaoRong

Abstract In this paper, the Panel data model with errors-in-variables is considered, and the parameter estimation and testing problem of restricted condition are studied. Firstly, a corrected least squares method is proposed to estimate the unknown parameter vector, and the asymptotic property of the obtained estimator is shown under some regularity conditions. Then, to test the validity of linear restriction, a test statistic based on the difference of the corrected residual sum of squares under the null and alternative hypotheses is constructed, and its limiting distribution is derived. The effectiveness of the proposed methods is assessed by some simulation studies.

Keywords Panel data model, errors-in-variables, corrected least squares, restricted estimation, asymptotic property

MSC(2010) 62F03, 62J05

doi: 10.1360/SCM-2016-0620