效应代数的表示

曹怀信*, 陈峥立, 郭志华, 张巧卫

陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安 710062

E-mail: caohx@snnu.edu.cn, czl@snnu.edu.cn, guozhuhua1984@stu.snnu.edu.cn, zhangqiaowei1188@sohu.com

收稿日期: 2010-09-29; 接受日期: 2011-02-07; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10571113, 10871224)、陕西省自然科学研究计划 (批准号: 2009JM1011) 和中央高校基本科研业务费 (批准号: GK201002006) 资助项目

摘要 本文讨论了抽象效应代数的表示问题. 对于一个抽象效应代数 $(E, \oplus, 0, 1)$, 如果存在一个 Hilbert 空间 H 和一个单态射 $\varphi: E \rightarrow \mathcal{E}(H)$, 那么称 E 为可表示的且称 (φ, H) 是 E 的一个表示, 其中 $\mathcal{E}(H)$ 表示 H 上所有正压缩算子构成的效应代数. 给出了一些可表示的和不可表示的效应代数的例子, 证明了非空集 X 上的任一模糊集系统 $\mathcal{F}$ 和 Boolean 代数 $\mathcal{B}_X$ 都是可表示的效应代数.

关键词 表示 效应代数 Hilbert 空间效应代数

MSC (2000) 主题分类 47A53, 47A55

1 引言

效应代数 (effect algebra) 是产生于量子信息理论的一个重要概念. 在量子力学中, 量子系统用一个复 Hilbert 空间 H 来描述, 系统的可观量用 H 上的 Hermite 算子描述, 量子效应用 H 上的正压缩算子表示, 精确量子效应 (sharp quantum effect) 用 H 上的全体投影算子来描述. 量子效应的全体 $\mathcal{E}(H)$ 作为 C^* -代数 $B(H)$ 中的一个闭凸集, 具有部分二元运算 $A \oplus B := A + B$, 每个量子效应 T 都有唯一的效应 T' 满足 $T \oplus T' = I$. 我们称 $\mathcal{E}(H)$ 为 Hilbert 空间效应代数 (或量子效应代数). 抽象效应代数是 Foulis 与 Bennett^[1] 于 1994 年提出的, 它是具体代数结构 $\mathcal{E}(H)$ 的一般化, 可以概括许多代数系统 (如 Boolean 代数、模糊集系统等), 因而具有许多重要的应用背景与前景, 受到数学家、逻辑学家与计算机专家的广泛关注^[2-14]. 表示与分类是数学理论中的重要问题与常用研究方法. 文献 [15] 研究了凸效应代数的仿射表示问题, 证明了每一个凸的效应代数 E 仿射同构于一个实有序线性空间 (V, P) 中的线性效应代数 $[0, u]$. 然而, 抽象效应代数的表示与分类问题尚未见到相关研究. 本文将引入抽象效应代数的表示的概念, 给出一些可表示的和不可表示的效应代数的例子, 证明非空集 X 上的任一模糊集系统 $\mathcal{F}$ 和 Boolean 代数 $\mathcal{B}_X$ 都是可表示的效应代数.

2 效应代数

为了讨论效应代数的表示, 本节先回顾关于效应代数的一些基本概念^[2], 并列举一些效应代数的例子.

引用格式: Cao H X, Chen Z L, Guo Z H, et al. Representations of effect algebras (in Chinese). Sci Sin Math, 2011, 41(3): 279-286, doi: 10.1360/012010-767

定义 2.1 设 E 是一个非空集合, 0 与 1 是 E 中的两个不同的元素, $\oplus$ 是 E 上的一个部分二元运算, 满足条件:

(E1) 交换律: 若 $a, b \in E$ 且 $a \oplus b$ 有定义 (这时称 a 与 b 正交, 记作 $a \perp b$), 则 $b \oplus a$ 有定义且 $b \oplus a = a \oplus b$;

(E2) 结合律: 若 $a, b, c \in E$, $(a \oplus b) \oplus c$ 与 $a \oplus (b \oplus c)$ 之一有定义, 则另一个也有定义且 $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;

(E3) 正交补: $\forall a \in E$, 都存在唯一的 $b \in E$ 使得 $a \oplus b = 1$ (b 称为 a 的正交补, 记作 a');

(E4) 0-1 律: 若 $a \in E$ 且 $1 \oplus a$ 有定义, 则 $a = 0$,

则称 $(E, \oplus, 0, 1)$ 是一个效应代数, 简称 E 为一个效应代数 (effect algebra).

对于 $a, b \in E$, 若存在 $c \in E$ 使得 $a \oplus c = b$, 则记为 $a \leq b$ 且 $c = b \ominus a$. 如果 $a \leq b$ 且 $a \neq b$, 则记为 $a < b$.

下列命题给出了效应代数的一些基本性质, 其证明参见文献 [2].

命题 2.1 设 $(E, \oplus, 0, 1)$ 是一个效应代数, 则

- (1) $\forall x \in E, x \perp 0$ 且 $x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$;
- (2) $\forall a \in E$, 有 $a'' = a, 0 \leq a \leq 1$;
- (3) $a \leq b$ 当且仅当 $b' \leq a'$;
- (4) $a \perp b$ 当且仅当 $a \leq b'$;
- (5) $(E, \leq)$ 是一个偏序集, 而且对所有的 $a \in E$ 都有 $0 \leq a \leq 1$;
- (6) $a \perp b \Rightarrow a \oplus b = (a' \ominus b)' = (b' \ominus a)'$.

定义 2.2 设 $(E, \oplus, 0, 1)$ 是效应代数且 $x, a, b \in E$. 如果

- (1) $x \leq a$ 且 $x \leq b$,
- (2) $y \leq a$ 和 $y \leq b$ 意味着 $y \leq x$,

那么称 x 是 a 和 b 的下确界, 记为 $a \wedge b$.

显然, 如果 a 和 b 的下确界存在, 那么一定是唯一的. 同样, 上确界定义为 a 和 b 的最小上界. 如果 $a \wedge a' = 0$, 则称 a 为 E 的一个精确元 (sharp element).

命题 2.2^[2] 设 $(E, \oplus, 0, 1)$ 是效应代数且 $a, b \in E$, 则 $a \wedge b$ 存在当且仅当 $a' \vee b'$ 存在. 此时, $a' \vee b' = (a \wedge b)'$.

注 2.1 由命题 2.2 可知, 如果对任意的 $a, b \in E$, $a \wedge b$ 都存在, 那么对任意的 $a, b \in E$, $a \vee b$ 也存在. 因此, E 成为一个格 (lattice). 这时, 称 $(E, \oplus, 0, 1)$ 为一个格效应代数或格序效应代数.

定义 2.3^[16] 设 $(E, \oplus, 0, 1)$ 是效应代数, $1 \in E_0 \subset E$. 如果

- (1) $a, b \in E_0$ 且 $a \perp b \Rightarrow a \oplus b \in E_0$,
- (2) $a \in E_0, b \in E$ 且 $a \oplus b \in E_0 \Rightarrow b \in E_0$,

那么 E_0 为 E 的一个子效应代数 (sub-effect algebra). 记为 $E_0 \leq E$.

命题 2.3^[16] 设 $(E, \oplus, 0, 1)$ 是效应代数, 则 E 的子集 E_0 是 E 的子效应代数当且仅当下列条件成立:

- (1) $1 \in E_0$,
- (2) $a, b \in E_0, a \leq b \Rightarrow b \ominus a \in E_0$.

定义 2.4^[15] 设 $(E, \oplus, 0, 1)$ 是效应代数. 若 $\forall a \in E$ 以及 $t \in [0, 1]$, 都存在 $ta \in E$ 满足下列条件:

- (C1) $\forall s, t \in [0, 1]$ 和 $a \in E$, 有 $s(ta) = (st)a$;
- (C2) $s, t \in [0, 1], s + t \leq 1$ 且 $a \in E \Rightarrow sa \perp ta$ 且 $(s \oplus t)a = sa \oplus ta$;

(C3) $a, b \in E, a \perp b \Rightarrow \forall t \in [0, 1],$ 有 $ta \perp tb$ 且 $t(a \oplus b) = ta \oplus tb$;

(C4) $\forall a \in E,$ 有 $1a = a,$

则称 $(E, \oplus, 0, 1)$ 是一个凸效应代数 (convex effect algebra).

若映射 $(t, a) \mapsto ta : [0, 1] \times E \rightarrow E$ 具有性质 (C1)–(C4), 则称为 E 的一个凸结构. 文献 [15, 引理 2.1(iii)] 中已经证明了一个凸效应代数 E 在通常意义下是凸的, 即对所有的 $a, b \in E$ 和 $t \in [0, 1]$ 有 $ta \perp (1-t)b$. 显然, 凸效应代数 E 的基数不小于 $\aleph$. 所以, 有限效应代数是不可表示的.

下面是一些效应代数的例子.

例 2.1 对于 $a, b \in [0, 1] \subset \mathbb{R},$ 当 $a + b \leq 1$ 时, 定义 $a \oplus b = a + b$. 显然, $([0, 1], \oplus, 0, 1)$ 是一个格效应代数, 且关于普通乘法, 它是凸的.

例 2.2 设 $\mathcal{A}$ 是含单位 1 的 C^* -代数, 且

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} : 0 \leq a \leq 1\}, \quad \mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} : 0 \leq a = a^2 \leq 1\}.$$

当 $x + y \leq 1$ 时, 定义 $x \oplus y = x + y$. 则 $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ 与 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ 都是效应代数, 且 $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ 是凸的. 如果 $\mathcal{A}$ 是交换的, 则 $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ 是凸的格效应代数. 显然, $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ 的一个子效应代数.

例 2.3 设 $(E, \oplus, 0, 1)$ 是效应代数, X 是任意的非空集, E^X 为所有从 X 到 E 的映射之集. 定义 $e_0, e_1 : X \rightarrow E$ 为 $e_0(x) = 0, e_1(x) = 1 (\forall x \in X)$. 对于 $f, g \in E^X,$ 若对所有的 $x \in X,$ 有 $f(x) \perp g(x),$ 则定义 $(f \oplus g)(x) = f(x) \oplus g(x) (\forall x \in X)$. 容易验证 $(E^X, \oplus, e_0, e_1)$ 成为一个效应代数. 特别是, $([0, 1]^X, \oplus, e_0, e_1)$ 是凸效应代数, 称之为 X 上的模糊集效应代数.

例 2.4 设 (X, Ω) 是可测空间, $M(X, \Omega)$ 是 X 上的所有 Ω -可测函数 $f : X \rightarrow [0, 1]$ 构成的集合. 对于 $f, g \in M(X, \Omega),$ 若 $f(x) + g(x) \leq 1$ 对所有的 $x \in X$ 成立, 则定义 $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) (\forall x \in X)$. 容易验证 $(M(X, \Omega), \oplus, 0, 1)$ 成为一个凸的格效应代数, 记为 $\mathcal{E}(X, \Omega)$. 显然

$$\mathcal{E}(X, \Omega) \leq [0, 1]^X, \quad \mathcal{E}(X, 2^X) = [0, 1]^X, \quad \mathcal{E}(X, \{\emptyset, X\}) \equiv [0, 1].$$

例 2.5 在集合 $C_3(a) = \{0, a, 1\}$ 上定义运算 $\oplus$ 如表 1,

表 1 $C_3(a)$ 的运算表

$\oplus$	0	a	1
0	0	a	1
a	a	1	\
1	1	\	\

容易看出 $C_3(a)$ 是一个格效应代数, 但不是凸的.

例 2.6 集合 $C_4(a, b) = \{0, a, b, 1\}$ 关于表 2 定义的运算 $\oplus$ 是一个格效应代数, 但不是凸的.

表 2 $C_4(a, b)$ 的运算表

$\oplus$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	1	\	\
b	b	\	1	\
1	1	\	\	\

例 2.7 集合 $C'_4(a, b) = \{0, a, b, 1\}$ 关于表 3 定义的运算 $\oplus$ 是一个效应代数, 但不是凸的.

表 3 $C'_4(a, b)$ 的运算表

$\oplus$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	$\backslash$	1	$\backslash$
b	b	1	$\backslash$	$\backslash$
1	1	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$

例 2.8 对于任意 $n \in \mathbb{N}^+$, 记 $C_n(a) = \{0, a, 2a, 3a, \dots, na\} (na = 1)$. 当 $r + s \leq n$ 时, 定义 $ra \oplus sa = (r + s)a$, 则 $C_n(a)$ 是一个全序的格效应代数, 但不是凸的且不可表示.

例 2.9 设 $E = \{0, a, 2a, \dots\} \cup \{1, a', (2a)', \dots\}$, 定义

$$(ma) \oplus (na) = (m + n)a, \quad 0a = 0, \quad (ma)' \oplus (na) = (na) \oplus (ma)' = ((m - n)a)' \quad (n \leq m),$$

则得到运算 $\oplus$ 如表 4.

表 4 E 的运算表

$\oplus$	0	a	$2a$	$3a$	$\dots$	$(3a)'$	$(2a)'$	a'	1
0	0	a	$2a$	$3a$	$\dots$	$(3a)'$	$(2a)'$	a'	1
a	a	$2a$	$3a$	$4a$	$\dots$	$(2a)'$	a'	1	$\backslash$
$2a$	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$\dots$	$(a)'$	1	$\backslash$	$\backslash$
$3a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$\dots$	1	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(3a)'$	$(3a)'$	$(2a)'$	a'	1	$\dots$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$
$(2a)'$	$(2a)'$	a'	1	$\backslash$	$\dots$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$
a'	a'	1	$\backslash$	$\backslash$	$\dots$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$
1	1	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\dots$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$

容易验证: E 是一个全序的格效应代数且

$$0 \leq a \leq 2a \leq 3a \leq \dots \leq (3a)' \leq (2a)' \leq a' \leq 1.$$

一个 Boolean 代数^[15] 是一个六元组 $(B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$. 其中 B 是一个集合; $0, 1$ 是 B 中的两个不同元素; $\wedge: B \times B \rightarrow B$, $\vee: B \times B \rightarrow B$ 与 $\neg: B \rightarrow B$ 为三个映射 (分别称为交、并与补运算) 使得对于 B 中的任意元素 a, b, c , 下列条件成立:

(B1) 结合律: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$;

(B2) 交换律: $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$;

(B3) 吸收律: $(a \vee b) \wedge a = a$, $(a \wedge b) \vee a = a$;

(B4) 分配律: $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$, $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$;

(B5) 补运算: $a \wedge \neg a = 0$, $a \vee \neg a = 1$.

例 2.10 对任一集合 X , 定义

$$A \wedge B = A \cap B, \quad A \vee B = A \cup B, \quad \neg A = X \setminus A, \quad 0 = \emptyset, \quad 1 = X, \quad \forall A, B \in 2^X = P(X).$$

则集合 2^X 成为一个 Boolean 代数, 记为 $\mathcal{B}_X$.

例 2.11 设 B 是一个 Boolean 代数, 当 $a \wedge b = 0$ 时, 定义 $a \oplus b = a \vee b$, 则 $(B, \oplus, 0, 1)$ 成为一个效应代数.

例 2.12 设 (V, P) 是实的有序线性空间, P 是其正锥, $V = P - P$ 且 $u \in P \setminus \{0\}$, $[0, u] = \{x \in V : 0 \leq x \leq u\}$. 当 $x + y \leq u$ 时, 定义 $x \oplus y = x + y$. 容易验证 $([0, u], \oplus, 0, u)$ 是一个效应代数, 称之为线性效应代数. 显然, $([0, u], \oplus, 0, u)$ 是凸的, 其凸结构为 $(t, x) \mapsto tx$.

3 效应代数的表示

为了定义效应代数的表示, 我们需要下面的概念 [2, 10].

对于两个效应代数 E 和 F , 如果映射 $\varphi: E \rightarrow F$ 使得当 $a, b \in E$ 且 $a \perp b$ 时, 有 $\varphi(a) \perp \varphi(b)$ 且 $\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$ 成立, 那么称映射 $\varphi: E \rightarrow F$ 是可加的 (additive). 若 $\varphi: E \rightarrow F$ 是一个可加映射且满足 $\varphi(1) = 1$, 则称 $\varphi: E \rightarrow F$ 为态射 (morphism). 若 $\varphi: E \rightarrow F$ 为一个态射且当 $a, b \in E$, $\varphi(a) \perp \varphi(b)$ 时, 有 $a \perp b$, 则称 φ 为单态射 (monomorphism). 一个满的单态射 $\varphi: E \rightarrow F$ 称为从 E 到 F 上的同构 (isomorphism). 如果存在同构 $\varphi: E \rightarrow F$, 则 E 与 F 是同构的 (isomorphic). 若 E 和 F 是凸的效应代数, $\varphi: E \rightarrow F$ 为态射, 且对所有的 $x \in E$ 和所有的 $t \in [0, 1]$, 都有 $\varphi(tx) = t\varphi(x)$, 则称 $\varphi: E \rightarrow F$ 为一个仿射 (affine). 如果存在仿射同构 $\varphi: E \rightarrow F$, 则称 E 和 F 是仿射同构的 (affine isomorphic).

容易看出: 一个态射 $\varphi: E \rightarrow F$ 是同构当且仅当 φ 是双射且其逆映射 φ^{-1} 是从 F 到 E 的态射. 对于单态射的更多性质, 请参考文献 [10].

定义 3.1 设 E 是效应代数. 若存在 Hilbert 空间 H 和单态射 $\varphi: E \rightarrow \mathcal{E}(H)$, 则称 E 是可表示的 (representable), 且称 (φ, H) 是 E 的一个表示 (representation). 否则, 称 E 是不可表示的 (unrepresentable).

定理 3.1 效应代数 E 是可表示的当且仅当它同构于某个 Hilbert 空间效应代数 $\mathcal{E}(H)$ 的一个子效应代数.

证明 设 E 是可表示的效应代数, 则存在一个 Hilbert 空间 H 及一个单态射 $\varphi: E \rightarrow \mathcal{E}(H)$. 下面证明 $F := \varphi(E)$ 是 $\mathcal{E}(H)$ 的一个子效应代数. 显然, $I = \varphi(1) \in F$. 设 $a, b \in E$, 且 $\varphi(a) \leq \varphi(b)$, 则由 [10, 定理 3.2] 知, $a \leq b$. 再根据 [10, 引理 2.1] 知, $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(b - a) \in F$. 故由命题 2.3 知: F 是 $\mathcal{E}(H)$ 的一个子效应代数. 显然, $\varphi: E \rightarrow F$ 是同构, 从而 E 同构于 F .

设 E 是同构于某个 Hilbert 空间效应代数 $\mathcal{E}(H)$ 的一个子效应代数 F , 则存在同构 $\varphi: E \rightarrow F$. 显然, $\varphi: E \rightarrow \mathcal{E}(H)$ 为单态射. 从而, E 是可表示的.

例 3.1 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{B}(H)$, $A \geq 0$, $[0, A] := \{T \in \mathcal{B}(H) : 0 \leq T \leq A\}$, $0 = 0, 1 = A$, 当 $S + T \leq A$ 时, 定义 $T \oplus S = T + S$. 容易看出, 关于算子的数乘运算, $[0, A]$ 是一个凸效应代数. 当 A 可逆时, 定义映射 $\varphi: [0, A] \rightarrow \mathcal{E}(H)$ 为

$$\varphi(T) = A^{-\frac{1}{2}}TA^{-\frac{1}{2}}.$$

显然 φ 是从 $[0, A]$ 到 $\mathcal{E}(H)$ 的一个双射且

$$(1) \varphi(A) = I;$$

$$(2) \forall T_1, T_2 \in [0, A], \varphi(T_1) \perp \varphi(T_2) \Leftrightarrow T_1 \perp T_2;$$

$$(3) \text{ 当 } T_1, T_2 \in [0, A] \text{ 且 } T_1 \perp T_2 \text{ 时, 有 } \varphi(T_1 \oplus T_2) = \varphi(T_1) \oplus \varphi(T_2).$$

因此, φ 是一个同构且 (φ, H) 是 $[0, A]$ 的一个表示. 这说明: 若 A 是可逆的, 则 $[0, A]$ 是可表示的凸效

应代数.

例 3.2 对于格效应代数 $C_3(a) = \{0, a, 1\}$, 定义映射 $\varphi: C_3(a) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{C}) = [0, 1]$ 为

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(a) = \frac{1}{2}, \quad \varphi(1) = 1,$$

则 φ 是从 $C_3(a)$ 到 $\mathcal{E}(\mathbb{C})$ 的单态射. 这表明: $C_3(a)$ 是可表示的且 $(\varphi, \mathbb{C})$ 是 $C_3(a)$ 的一个表示.

例 3.3 效应代数 $C_4(a, b) = \{0, a, b, 1\}$ 是不可表示的.

假定 $C_4(a, b)$ 是可表示的, 则存在一个 Hilbert 空间 H 和一个从 E 到 $\mathcal{E}(H)$ 的单态射 φ . 因为 $2a = 2b = 1$, 即 $a \oplus a = b \oplus b = 1$, 所以 $2\varphi(a) = 2\varphi(b) = I$, 即 $\varphi(a) = \varphi(b) = \frac{1}{2}I$. 但是, $a \neq b$. 这与 φ 是单射 (参见 [10, 定理 3.1]) 矛盾.

对于效应代数 $C'_4(a, b) = \{0, a, b, 1\}$, 任取一个非 0 的 Hilbert 空间 H , 令 $T \in \mathcal{E}(H)$, $0 < T < I$ 且 $T \neq \frac{1}{2}I$. 定义

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(a) = T, \quad \varphi(b) = I - T, \quad \varphi(1) = I.$$

则 (φ, H) 是 $C'_4(a, b)$ 的一个表示.

例 3.4 设 E 为例 2.9 给出的效应代数, E 是不可表示的.

事实上, 假定 E 是可表示的, 则存在一个 Hilbert 空间 H 及一个从 E 到 $\mathcal{E}(H)$ 的单态射 φ . 令 $\varphi(a) = A$, 则对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 有 $nA = n\varphi(a) = \varphi(na) \in \mathcal{E}(H)$. 因此, $A = 0$, 从而 $a = 0$, 矛盾.

例 3.5 设 $X \neq \phi$ 和 $\mathcal{F} \subset [0, 1]^X$. 如果

- (1) $0, 1 \in \mathcal{F}$,
- (2) 当 $f \in \mathcal{F}$ 时, 有 $1 - f \in \mathcal{F}$,
- (3) 当 $f, g \in \mathcal{F}$ 且 $f + g \leq 1$ 时, 有 $f + g \in \mathcal{F}$,

则称 $\mathcal{F}$ 是 X 上的一个模糊集系统 (fuzzy set system).

例如, $\mathcal{F} = \{0, 1\}$, $\mathcal{F} = \{0, 1\}^X$ 及 $\mathcal{F} = [0, 1]^X$ 都是 X 上的模糊集系统, 后者称为 X 上的全模糊集系统 (full fuzzy set system), 记为 $\mathcal{F}_X$. 对于 X 上的任一模糊集系统 $\mathcal{F}$, 当 $f + g \leq 1$ 时, 定义 $f \oplus g = f + g$. 容易验证 $(\mathcal{F}, 0, 1, \oplus)$ 是一个效应代数. 下面讨论模糊集系统的可表示性.

当 $X = \{x_0\}$ 时, 定义 $\varphi: [0, 1]^X \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{C}) \equiv [0, 1]$ 为

$$\varphi(f) = f(x_0), \quad \forall f \in [0, 1]^X,$$

则 φ 是单态射. 这表明 $[0, 1]^X$ 是可表示的.

当 $X = \{\alpha, \beta\}$ ($\alpha \neq \beta$) 时, 定义

$$\varphi(f) = \begin{pmatrix} f(\alpha) & 0 \\ 0 & f(\beta) \end{pmatrix}, \quad \forall f \in [0, 1]^X.$$

则得到映射 $\varphi: [0, 1]^X \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{C}^2) = M_2(\mathbb{C})$. 显然,

$$f \perp g \Leftrightarrow f(\alpha) + g(\alpha) \leq 1 \quad \text{且} \quad f(\beta) + g(\beta) \leq 1 \Leftrightarrow \varphi(f) \perp \varphi(g).$$

因此, $\varphi: [0, 1]^X \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{C}^2)$ 是一个单态射, 从而 $[0, 1]^X$ 是可表示的.

当 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ 且 $x_i \neq x_j$ ($i \neq j$) 时, 定义 $\varphi: [0, 1]^X \rightarrow \mathcal{E}(\ell^2(\mathbb{N}))$ 为

$$\varphi(f) = \begin{pmatrix} f(x_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & f(x_n) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

即 $\varphi(f)(\{\xi_n\}_{n=1}^\infty) = \{f(x_n)\xi_n\}_{n=1}^\infty$. 容易看出 φ 是一个单态射. 因此, $[0, 1]^X$ 是可表示的.

一般地, 设 X 是任意非空集. 我们考虑 Hilbert 空间

$$\ell^2(X) = \left\{ \{\xi_x\}_{x \in X} : \xi_x \in \mathbb{C} (\forall x \in X), \sum_{x \in X} |\xi_x|^2 < +\infty \right\}.$$

对于 X 上的任一模糊集系统 $\mathcal{F}$, 定义 $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}(\ell^2(X))$ 为

$$\varphi(f)(\{\xi_x\}_{x \in X}) = \{f(x)\xi_x\}_{x \in X}.$$

容易验证 φ 是一个单态射. 因此, $\mathcal{F}$ 是可表示的. 根据以上讨论, 我们得到下面的结果.

定理 3.2 任意非空集 X 上的每一个模糊集系统 $\mathcal{F}$ 构成的效应代数 $(\mathcal{F}, 0, 1, \oplus)$ 都是可表示的. 特别地, 全模糊集系统 $[0, 1]^X$ 是可表示的效应代数.

定理 3.3 设 X 是非空集, 则 Boolean 代数 2^X 是可表示的效应代数.

证明 设 $e_i = \{\delta_{i,j}\}_{j \in X}$, 则 $\{e_i\}_{i \in X}$ 是 Hilbert 空间 $\ell^2(X)$ 的一个正规正交基. $\forall A \in 2^X$, 当 $A = \emptyset$ 时, 记 $H_A = 0$; 否则, 记

$$H_A = \overline{\text{span}}\{e_i : i \in A\}, \quad P_A = P_{H_A}.$$

定义 $\varphi : 2^X \rightarrow \mathcal{E}(\ell^2(X))$ 为 $\varphi(A) = P_A$. 下面, 我们将证明 φ 是一个单态射.

(1) 设 $A, B \in 2^X$ 且 $A \perp B$, 则 $A \cap B = \emptyset$ 且 $A \oplus B = A \cup B$. 因为

$$\varphi(A \oplus B) = \varphi(A \cup B) = P_{A \cup B} = P_A + P_B = \varphi(A) + \varphi(B) \leq I,$$

可以看出 $\varphi(A) \perp \varphi(B)$, 因此 φ 是可加的, 且 $\varphi(X) = P_X = P_H = I$, 从而 φ 是态射.

(2) 设 $A, B \in 2^X$ 且 $\varphi(A) \perp \varphi(B)$, 则 $0 \leq P_A + P_B \leq I$, 因此

$$0 \leq P_A(P_A + P_B)P_A \leq P_A, \quad \text{即 } 0 \leq P_A + P_AP_BP_A \leq P_A,$$

这表明 $P_AP_BP_A = 0$, 即 $P_AP_B = 0$. 因此 $A \cap B = \emptyset$, 即 $A \perp B$. 于是, φ 是单态射. 故 2^X 是可表示的效应代数.

注 3.1 对于所有的 $A \in 2^X$, 定义 $\varphi(A) = \chi_A$ (A 的特征函数), 则得到一个效应代数同构

$$\varphi : 2^X \rightarrow \mathcal{F} := \{0, 1\}^X.$$

由定理 3.2 可知, $\mathcal{F}$ 是可表示的, 因此存在 Hilbert 空间 H 及单态射 $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}(H)$. 显然, $\psi \circ \varphi : 2^X \rightarrow \mathcal{E}(H)$ 是单态射. 故 2^X 是可表示的. 由此可见, 定理 3.3 其实是定理 3.2 的一个推论.

问题 3.1 例 2.3, 2.4 及 2.10 中的效应代数是可以表示的吗?

问题 3.2 如何刻画效应代数的可表示性?

在文献 [15] 中, Gudder 证明了凸效应代数的一个“仿射表示定理”.

定理 3.2^[15] 每一个凸效应代数 E 都仿射同构于一个实有序线性空间 (V, P) 中的线性效应代数 $[0, u]$. 又若 E 仿射同构于另一实有序线性空间 (V_1, P_1) 中的线性效应代数 $[0, u_1]$, 则 (V, P) 与 (V_1, P_1) 是序同构的.

受此启示, 我们提出以下两个问题.

问题 3.3 每一个凸效应代数都是可表示的吗?

问题 3.4 每一个线性效应代数 $[0, u]$ 都是可表示的吗?

致谢 作者衷心感谢审稿人提出的宝贵修改意见.

参考文献

- 1 Foulis D J, Bennett M K. Effect algebras and unsharp quantum logics. *Found Phys*, 1994, 24: 1331–1352
- 2 Gudder S. Examples, problems and results in effect algebras. *Internat J Theoret Phys*, 1996, 35: 2365–2376
- 3 杜鸿科, 邓春源, 李启慧. 量子效应的下确界问题. *中国科学 A 辑*, 2006, 36: 320–332
- 4 Gheondea A, Gudder S, Jonas P. On the infimum of quantum effects. *J Math Phys*, 2005, 46: 062102 (1–11)
- 5 Gheondea A, Gudder S. Sequential product of quantum effect. *Proc Amer Math Soc*, 2004, 132: 503–512
- 6 Gudder S. Lattice properties of quantum effects. *J Math Phys*, 1996, 37: 2637–2642
- 7 Bugajski S, Gudder S, Pulmannova S. Convex effect algebras, state ordered effect algebras, and ordered linear spaces. *J Math Phys*, 2000, 45: 371–388
- 8 Moreland T, Gudder S. Infima of Hilbert space effects. *Linear Algebra Appl*, 1999, 286: 1–17
- 9 Li Y, Du H K. A note on the infimum problem of Hilbert space effects. *J Math Phys*, 2006, 47: 102103
- 10 Lu L, Cao H X, Chen Z L, et al. A note on morphisms on effect algebras (in Chinese). *Acta Math Sinica (Chin Ser)*, 2009, 52: 957–960
- 11 Kopka F. D-posets and fuzzy sets. *Tatra Mt Math Publ*, 1992, 1: 83–87
- 12 Riečanová Z, Wu J D. States on sharply dominating effect algebras. *Sci China Ser A*, 2008, 51: 907–914
- 13 Lei Q, Wu J D, Li R L. Order topology and Frink ideal topology of effect algebras. *Internat J Theoret Phys*, 2010, 49: 3166–3175
- 14 Gudder S, Pulmannová S. Representation theorem for convex effect algebras. *Comment Math Univ Carolin*, 1989, 30: 645–650
- 15 Riečanová Z. Sub-effect algebras and sub-Boolean algebras. *Soft Computing*, 2001, 5: 400–403

Representations of effect algebras

CAO HuaiXin, CHEN ZhengLi, GUO ZhiHua & ZHANG QiaoWei

Abstract This note is devoted to introducing and discussing the representations of abstract effect algebras. An abstract effect algebra $(E, \oplus, 0, 1)$ is said to be representable if there exists a Hilbert space H and a monomorphism $\varphi : E \rightarrow \mathcal{E}(H)$, where $\mathcal{E}(H)$ denotes the effect algebra consisting of all positive contractions on H . Such a pair (φ, H) is called a representation of $(E, \oplus, 0, 1)$. Many examples of effect algebras are given, some of which are representable and the others are not. It is also proved that every fuzzy set system $\mathcal{F}$ and Boolean algebra $\mathcal{B}_X$ on a nonempty set X are representable effect algebras.

Keywords: representation, effect algebra, Hilbert space effect algebra

MSC(2000): 47A53, 47A55

doi: 10.1360/012010-767