均质积分 Brunn-Minkowski 不等式的概率形式

何日高^{①*}, 冷岗松^②

① 湖南工程学院理学院, 湘潭 411104;

② 上海大学理学院, 上海 200444

E-mail: rg@shu.edu.cn, gleng@staff.shu.edu.cn

收稿日期: 2012-12-13; 接受日期: 2013-05-28; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11271244) 和湖南省教育厅 (重点) 科研项目 (批准号: 12A033) 资助项目

摘要 本文运用两种不同的方法建立了一个 L_p 空间中关于 Firey 组合的强大数定理. 进一步, 本文获得了均质积分 Brunn-Minkowski 不等式的概率形式.

关键词 强大数定理 Firey 组合 随机集 选取 p 期望

MSC (2010) 主题分类 60D05, 52A20, 52A22

1 引言

在概率与凸几何^[1-9]之间存在一种非常密切的联系. 很久以前, 人们就开始对此进行探索. 这种重要的关系能够追溯到 Vitale^[10] 的 Brunn-Minkowski 不等式的概率版本. 在过去的 30 年里, 它受到越来越多的关注^[10-16]. 本文为概率论与凸几何之间这种意想不到的联系提供了另外一个证据.

Artstein 和 Vitale^[17] 在探索随机集的一般理论方面得出对于 $\mathbb{R}^d$ 中的紧子集, 存在一个关于随机集的强大数定理, 其暗含着 Brunn-Minkowski 不等式的概率版本. 对于 $\mathbb{R}^d$ 中的某些特例 — 赋值的随机集, Cressie^[18] 获得了一个强大数定理. 后来, Puri 和 Ralescu^[19] 证明了 Banach 空间中随机集的强大数定理. 本文建立下面的 L_p 空间中关于 Firey 组合的强大数定理.

定理 1 如果 $p \geq 1$, X_i ($i \geq 1$) 是一个独立同分布的随机凸体序列, 并且满足 $E\|X_1\| < \infty$, 则

$$\frac{X_1^{\frac{1}{p}} \cdots X_n^{\frac{1}{p}}}{n^{\frac{1}{p}}} \xrightarrow{\text{a.s.}} E_p X_1,$$

其中 $E_p X_1$ 表示随机凸体 X_1 的选取 p 期望 (其定义见第 2 节).

当 $p = 1$, 定理 1 转变成文献 [17] 中定理的凸的情形.

Brunn-Minkowski 理论^[1, 20-23] 有一个自然的推广, 即现在广为人知的 L_p Brunn-Minkowski 理论. 这个理论源于 19 世纪 60 年代的早期, 当 Firey^[23] 引进凸体的 L_p 组合的概念. Lutwak^[24, 25] 表明这些 Firey-Minkowski L_p 组合导致了 L_p Brunn-Minkowski 理论的萌芽. 他建立的所谓 Firey-Brunn-Minkowski 的基本理论涉及 Firey 组合、调和 p 组合、 p 均质积分、 p -Minkowski 问题、 p 仿射表面积、 p 几何表面积和对偶混合体积, 其中 Firey 组合 (对每一个 $p \geq 1$, Firey 组合推广了 Brunn-Minkowski 理论) 和调和 p 组合在 L_p Brunn-Minkowski 理论中扮演了重要的角色. 自从那时起, 有关这方面的文献开始大量出现^[25-49]. 人们已经发现这一开创性的理论在数学和其他科学领域存在着广泛的应用.

若 $K, L \in \mathcal{K}_c^0$, 关于 Firey 组合的均质积分的 Brunn-Minkowski 不等式^[24] 表明,

$$W_i(K \overset{+}{p} L)^{\frac{p}{d-i}} \geq W_i(K)^{\frac{p}{d-i}} + W_i(L)^{\frac{p}{d-i}}, \quad (1.1)$$

其中 $p \geq 1, 0 \leq i < d, K \overset{+}{p} L$ 是 Firey 组合 (其定义及相关研究可参见文献 [26], 关于 Firey 组合的更深入的研究可参见文献 [24, 25, 38, 39, 50]), 均质积分^[23, 51] (混合体积的一种重要情形) 能定义为

$$W_i(K) = \frac{\omega_d}{\omega_{d-i}} \int_{\mathcal{G}(d, d-i)} V_{d-i}(K | S) dS,$$

其中 $\mathcal{G}(d, d-i)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中 $(d-i)$ 维子空间的 Grassmann 流形, ω_j 是单位球 B 在 $\mathbb{R}^j$ 中的体积, V_{d-i} 表示 $d-i$ 维体积. 当 $p=1, i=0$ 时, 上述不等式 (1.1) 是众所周知的 Brunn-Minkowski 不等式.

作为定理 1 的一个应用, 我们提供了关于 Firey 组合的均质积分 Brunn-Minkowski 不等式的概率形式.

定理 2 如果 $p \geq 1, 0 \leq i < d, X: \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c^0$ 是随机凸体, 并且满足 $E\|X\| < \infty$, 则

$$W_i(E_p X)^{\frac{p}{d-i}} \geq E W_i(X)^{\frac{p}{d-i}}.$$

在定理 2 中, 当随机凸体 X 以相同的概率取 K 和 L 两个值时, 我们就得到关于 Firey 组合的均质积分 Brunn-Minkowski 不等式 (1.1).

2 记号和预备知识

本文考虑 d 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^d$ 具有通常的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 、范数 $\|\cdot\|$ 、单位球面 S^{d-1} 和单位球 B .

用 $\mathcal{K}$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的所有非空紧子集, $\mathcal{K}_c$ 表示 $\mathcal{K}$ 中凸的子类, 而 $\mathcal{K}_c^0$ 意味着原点作为内点的紧的凸子集. 为了简化, 除特别说明外, 文中所指的凸体都是包含原点作为内点的凸体.

如果 $K \in \mathcal{K}_c, u \in S^{d-1}$, 那么, K 的支撑函数定义为

$$h(K, u) = \max\{\langle x, u \rangle \mid x \in K\}.$$

对于凸体 K 和 L , 显然, 有

$$K \subseteq L \Leftrightarrow h(K, u) \leq h(L, u).$$

因此, 一个凸体是由它的支撑函数所唯一决定的.

对于 $K, L \in \mathcal{K}_c^0, p \geq 1$, Firey 组合在文献 [16] 中定义为

$$h(K \overset{+}{p} L, u)^p = h(K, u)^p + h(L, u)^p. \quad (2.1)$$

为了表明凸体中的一个序列收敛于另外一个凸体, 需要定义两个凸体的距离. 所以, 介绍如下的定义.

如果 $K, L \in \mathcal{K}_c$, 那么, K 和 L 的 Hausdorff 度量^[23, 51] (Hausdorff 距离) 定义如下:

$$\begin{aligned} \rho(K, L) &= \min\{\lambda \geq 0 \mid K \subseteq L + \lambda B, L \subseteq K + \lambda B\} \\ &= \sup_{u \in S^{n-1}} |h(K, u) - h(L, u)|. \end{aligned} \quad (2.2)$$

因此, $\mathcal{K}_c^0$ 变成了一个可分的紧的度量空间, 即 $\mathcal{K}_c^0$ 是一个 Polish 空间. 接下来, 所有与 $\mathcal{K}_c^0$ 相关的度量和拓扑概念都是指 Hausdorff 度量和它所诱导的拓扑.

如果存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, 使得

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1,$$

则称点 $x \in \mathbb{R}^d$ 是点 $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^d$ 的凸组合^[23, 51]. A 的凸包是指 A 中任何有限元的所有凸组合的集合, 记为 $\text{co}A$.

记 $\mathbb{R}^d$ 中的闭子集为 $\mathcal{F}$. 让我们固定一个完备的概率空间 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 以便来定义随机元^[12, 13, 17].

一个映射 $X: \Omega \rightarrow \mathcal{F}$ 叫作随机闭集, 如果 $K \in \mathcal{K}$ 满足

$$\{\omega: X \cap K \neq \emptyset\} \in \mathfrak{F}.$$

当 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 是一个概率空间时, 映射 $X: \Omega \rightarrow \mathcal{F}$ 叫作多值或集值函数.

一个映射 $Y: \Omega \rightarrow \mathcal{F}$ 叫作随机开集, 如果它的补 $X = Y^c$ 是随机闭集. 因此, 我们能够把随机集 X 看作从抽象的概率空间 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 到 $\mathcal{K}$ 的可测映射. 进一步, 我们能够把随机凸体 X 看作从抽象的概率空间 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 到 $\mathcal{K}_c^0$ 的可测映射. 类似地, 几乎处处取紧值的随机集 X 叫作随机紧集.

一个随机集 X 叫作简单的, 如果 Ω 存在有限可测的剖分 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 和集合 $F_1, F_2, \dots, F_n \in \mathcal{F}$, 使得 $X(\omega) = F_i, \forall \omega \in A_i, 1 \leq i \leq n$.

如果 X 是一个简单随机集的序列的几乎处处极限, 那么随机集 X 叫作可近似的.

随机集 X 的范数 $\|X\|$ 是与原点到每一个 $X(\omega)$ 的距离有关的实随机变量, 即

$$\|X\| = \sup\{\|x\|, x \in X\}.$$

如果 $P(x \in X) = 1$, 那么随机向量 $x: \Omega \rightarrow \mathcal{K}$ 叫作 X 的一个选取.

参照文献 [17, 52], 如果 x 是 X 的一个选取, 我们定义 X 的期望如下:

$$EX = \{Ex \mid E\|x\| < \infty\}.$$

更一般地, 我们定义一个随机凸体 X 的选取 p 期望如下.

定义 3 如果 x 是 X 的一个选取, 一个随机凸体 X 的选取 p 期望定义为

$$E_p X = \left\{ E_p x \mid E_p x = \int_{\Omega} x dP^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

注 1 (1) 在上面的定义中, 有一点滥用记号 $dP^{\frac{1}{p}}$. 上面 Riemann-Stieltjes 积分的近似和是指求凸体 Firey 加 $(\frac{1}{p})$ 的和. 进一步, 我们举一个例子来说明 $dP^{\frac{1}{p}}$ 的意义. 如果 X 是一个简单随机凸体, 即 $X = K_1 \mathcal{X}_{A_1} \overset{+}{\cdot} \dots \overset{+}{\cdot} K_m \mathcal{X}_{A_m}$, 其中 $K_i \in \mathcal{K}_c^0, A_i \in \mathfrak{F}, \mathcal{X}_{A_i}$ 是 A_i 的特征函数 (在定理 1 的证明中, 我们表明对于任意随机凸体都能用像 X 的序列来近似), 那么,

$$E_p X = P(A_1)^{\frac{1}{p}} K_1 \overset{+}{\cdot} \dots \overset{+}{\cdot} P(A_m)^{\frac{1}{p}} K_m.$$

(2) 特别是当 $p = 1$ 时, X 的选取 p 期望是随机凸体 X 的期望.

(3) 选取 p 期望是基于随机凸体的期望的定义和 Firey 组合的属性. 指数 $\frac{1}{p}$ 是由 Firey 组合的属性 (命题 4) 所决定的. 特别地, 如果在上面的等式中取 $K_1 = \dots = K_m$, 则 $E_p X = K_1$.

(4) 应用 $EX \in \mathcal{K}$ 等价于 $E\|X\| < \infty$, 我们能够得出 $E_p X \in \mathcal{K}_c^0$ 当且仅当 $E\|X\| < \infty$. 此外, 我们考虑 $\mathbb{R}^d$ 中紧的, 包含原点在其内部的凸子集, 因此, $E_p X$ 是有意义的.

如果 $P(A) > 0$ 并且对任意 $A' \in \mathfrak{F}$ 满足 $A' \subseteq A$, 则要么 $P(A') = P(A)$, 要么 $P(A') = 0$, 那么, $A \in \mathfrak{F}$ 叫作概率空间 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 的一个原子. 概率空间是非原子的, 如果这样的 A 不存在.

3 均质积分 Brunn-Minkowski 不等式的概率形式

根据 (2.1), 我们能够获得下面关于 Firey 组合的有用属性.

命题 4 如果 $K, K_1, K_2, K_3 \in \mathcal{K}_c^0$, $p \geq 1$ 以及 $a, b > 0$, 那么,

(1) 分配律: $a(K_1 \overset{+}{p} K_2) = aK_1 \overset{+}{p} aK_2$, $aK \overset{+}{p} bK = (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} K$;

(2) 交换律: $K_1 \overset{+}{p} K_2 = K_2 \overset{+}{p} K_1$;

(3) 结合律: $(K_1 \overset{+}{p} K_2) \overset{+}{p} K_3 = K_1 \overset{+}{p} (K_2 \overset{+}{p} K_3)$;

(4) 单调性: $K_1(K_2) \subseteq K_1 \overset{+}{p} K_2 \subseteq K_1 + K_2$.

下面的引理是证明 Firey 组合的强大数定理的主要工具之一.

引理 5 [23, 第 28 页] 如果 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个次线性函数, 则存在唯一的一个以 f 作为支撑函数的凸体 K .

接下来证明本节的主要结果.

定理 1 的证明 如果两个概率空间中的一个包含原子, 那么可能导致两个独立同分布的随机凸体可能有不同的选取 p 期望. 因此, 如果 X_i ($i \geq 1$) 是非常数的, 我们能够选取恰当的概率空间使其为非原子的.

注意到如果 X 是一个随机凸体, 那么, $h(X, u)^p$ 是一个随机变量. 我们首先需要表明,

$$Eh(X_1, u)^p = h(E_p X_1, u)^p,$$

其中 X_1 是随机凸体.

Molchanov [12] 证明了在一个 Polish 空间的 Hausdorff 逼近, 即每一个随机紧集都可 Hausdorff 近似. 因此, 对于 $X_1: \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c^0$, 存在一个简单随机凸体序列

$$Y_n = L_1^n \mathcal{X}_{B_1^n} + \cdots + L_{m_n}^n \mathcal{X}_{B_{m_n}^n},$$

使得 $Y_n \rightarrow X_1$, 其中 $L_i^n \in \mathcal{K}_c^0$, $B_i^n \in \mathfrak{F}$, $\mathcal{X}_{B_i^n}$ 是 B_i^n ($1 \leq i \leq m_n$) 的特征函数.

显然, 根据支撑函数的定义和 (2.1), 如果一个序列 $K_1^n + K_2^n \rightarrow K$ ($K_i^n \in \mathcal{K}_c^0$, $i = 1, 2$), 则存在 $L_1^n, L_2^n \in \mathcal{K}_c^0$, 使得 $L_1^n \overset{+}{p} L_2^n \rightarrow K$ ($n \geq 1$).

这些表明, 对任意 $X_1: \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c^0$, 存在一个简单随机凸体序列

$$Y_n = K_1^n \mathcal{X}_{A_1^n} \overset{+}{p} \cdots \overset{+}{p} K_{m_n}^n \mathcal{X}_{A_{m_n}^n},$$

使得 $Y_n \rightarrow X_1$, 其中 $K_i^n \in \mathcal{K}_c^0$, $A_i^n \in \mathfrak{F}$, $\mathcal{X}_{A_i^n}$ 是 A_i^n ($1 \leq n, 1 \leq i \leq m_n$) 的特征函数.

我们能够推断出,

$$E_p Y_n \rightarrow E_p X_1. \quad (3.1)$$

事实上, 假设 $Y_n' = K_1^n \mathcal{X}_{A_1^n} + \cdots + K_{m_n}^n \mathcal{X}_{A_{m_n}^n}$ 收敛于 X_0 , 根据文献 [12, 定理 1.38], 有

$$EY_n' = P(A_1^n)K_1^n + \cdots + P(A_{m_n}^n)K_{m_n}^n \rightarrow EX_0.$$

我们引进记号 E' , 使得选取期望的 Minkowski 加变为 Firey 加 $(+)_p$. 由命题 6 知,

$$E'Y'_n = P(A_1^n)K_{1/p}^n + \cdots + P(A_{m_n}^n)K_{m_n}^n \rightarrow E'X_0.$$

这结合选取 p 期望的定义产生了

$$E_pY_n = P(A_1^n)^{\frac{1}{p}}K_{1/p}^n + \cdots + P(A_{m_n}^n)^{\frac{1}{p}}K_{m_n}^n \rightarrow E_pX_1.$$

通过应用 Hausdorff 度量的定义、 $h(K, u)$ 的定义、选取 p 期望的定义、(2.1) 和 (3.1), 能够发现

$$\begin{aligned} Eh(X_1, u)^p &\leftarrow Eh(Y_n, u)^p \\ &= Eh(K_1^n \mathcal{X}_{A_1^n} + \cdots + K_{m_n}^n \mathcal{X}_{A_{m_n}^n}, u)^p \\ &= h[P(A_1^n)^{\frac{1}{p}}K_1^n, u]^p + \cdots + h[P(A_{m_n}^n)^{\frac{1}{p}}K_{m_n}^n, u]^p \\ &= h(E_pY_n, u)^p \rightarrow h(E_pX_1, u)^p. \end{aligned}$$

根据极限的唯一性, 我们得到了想要的结果.

进一步, 根据 (2.1) 和 Kolmogorov 强大数定理, 能够获得

$$h\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{\frac{1}{p}}}, u\right)^p = \frac{1}{n}[h(X_1, u)^p + \cdots + h(X_n, u)^p] \xrightarrow{\text{a.s.}} Eh(X_1, u)^p.$$

这结合 $Eh(X_1, u)^p = h(E_pX_1, u)^p$ 表明,

$$h\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{\frac{1}{p}}}, u\right) \xrightarrow{\text{a.s.}} h(E_pX_1, u). \quad (3.2)$$

接下来表明 E_pX_1 是凸的. 根据

$$Y_n = K_1^n \mathcal{X}_{A_1^n} + \cdots + K_{m_n}^n \mathcal{X}_{A_{m_n}^n}$$

($K_i^n \in \mathcal{K}_c^0$, $A_i^n \in \mathfrak{F}$, $\mathcal{X}_{A_i^n}$ 是 A_i^n ($1 \leq n$, $1 \leq i \leq m_n$) 的特征函数) 和选取 p 期望的定义, 我们有

$$E_pY_n = P(A_1^n)^{\frac{1}{p}}K_{1/p}^n + \cdots + P(A_{m_n}^n)^{\frac{1}{p}}K_{m_n}^n,$$

这结合支撑函数的定义、(2.1)、引理 5 和 Minkowski 不等式表明 E_pY_n 是凸的. 因为 $E_pY_n \in \mathcal{K}_c^0$ ($\mathcal{K}_c^0$ 是紧的), 这结合 (3.1) 表明 E_pX_1 是凸的.

为了完成证明, 需要说明 $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{\frac{1}{p}}}$ 也是凸的.

显然, 我们有 $o \in \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{\frac{1}{p}}}$ 和 $h(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{\frac{1}{p}}}, u)$ 是正齐次的. 我们将进一步表明它是次可加. 事实上, 根据 (2.1) 和 Minkowski 不等式, 得

$$\begin{aligned} h\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{\frac{1}{p}}}, u+v\right) &= \left[h\left(\frac{X_1}{n^{\frac{1}{p}}}, u+v\right)^p + \cdots + h\left(\frac{X_n}{n^{\frac{1}{p}}}, u+v\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left[h\left(\frac{X_1}{n^{\frac{1}{p}}}, u\right)^p + \cdots + h\left(\frac{X_n}{n^{\frac{1}{p}}}, u\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[h\left(\frac{X_1}{n^{\frac{1}{p}}}, v\right)^p + \cdots + h\left(\frac{X_n}{n^{\frac{1}{p}}}, v\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= h\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{\frac{1}{p}}}, u\right) + h\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{\frac{1}{p}}}, v\right). \end{aligned}$$

因此, $h(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n^{\frac{1}{p}}}, u)$ 是次可加函数, 根据引理 5, 显然有 $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n^{\frac{1}{p}}}$ 是凸的.

因为 $u \in S^{d-1}$ 是任意的, $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n^{\frac{1}{p}}}$ 和 $E_p X_1$ 是凸的以及 (3.2), 应用反证法, 有

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n^{\frac{1}{p}}} \xrightarrow{\text{a.s.}} E_p X_1.$$

定理 1 证毕. $\square$

注 2 (1) 定理 1 等价于文献 [11, 推论 1] (其度量是 p -Hausdorff 度量, 采用的是对偶的证明方法).

(2) 当 $p = 1$ 时, $K + L = K + L$, 定理 1 变成了文献 [17] 中定理的凸的情形.

(3) 从 $h(K + L, u)^p = h(K, u)^p + h(L, u)^p$, 我们知道 $K + L$ 是根据 K 和 L 的边界来定义的, 因此不可能定义

$$K +_p L = \{x +_p y \mid x \in K, y \in L\},$$

使得 $K_i +_p K_j = \{x +_p y \mid x \in K_i, y \in K_j\}$, 其中 $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 3)\}$. 所以, Firey 组合的强大数定理的证明方法与 $p = 1$ 时的情形是不同的.

(4) 定理 1 的结果跟随机变量的结果十分类似.

上面定理 1 的证明运用了概率和几何的知识. 为了更好地理解 $E_p X_1$, 接下来给出定理 1 的另外一个证明, 分为下面三种情况:

(1) X_1 有有限数目的实现;

(2) X_1 有可数数目的实现;

(3) $X_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_c^0$ 是一个连续映射, $(\mathbb{R}, \mathfrak{F}, P)$ 是一个概率空间 ($\mathfrak{F}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 集).

下面的命题 6 虽然简单而且没有给出证明, 但它是后面证明的主要依据.

命题 6 如果序列 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 分别收敛于 A 和 B , 则 $A_n +_p B_n \rightarrow A +_p B$, $n \rightarrow \infty$, 其中 $A_n, B_n \in \mathcal{K}_c^0$ ($n \geq 1$).

下面描述和证明主要结果. 首先考虑 X_1 有一个有限数目的实现.

命题 7 如果 X_i ($i \geq 1$) 是一个独立同分布的随机凸体序列, 并且满足 $E\|X_1\| < \infty$. X_1 的实现属于 $\mathcal{K}_c^0$, $X_1 = K_j$ 的概率为 P_j ($j = 1, \dots, m$), 其中 $K_j \in \mathcal{K}_c^0$, $\sum_{j=1}^m P_j = 1$, 则

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n^{\frac{1}{p}}} \xrightarrow{\text{a.s.}} P_1^{\frac{1}{p}} K_1 + \dots + P_m^{\frac{1}{p}} K_m = E_p X_1.$$

证明 假设 S_j 是 $X_1, \dots, X_n$ 的实现等于 K_j ($j = 1, \dots, m$) 的数目, 则 $\sum_{j=1}^m S_j = n$.

这结合命题 4, 事实上, $\frac{S_j}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} P_j$, $j = 1, \dots, m$. 命题 6 表明,

$$\begin{aligned} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n^{\frac{1}{p}}} &= \frac{\overbrace{K_1 + \dots + K_1}^{S_1} + \dots + \overbrace{K_m + \dots + K_m}^{S_m}}{n^{\frac{1}{p}}} \\ &= \frac{S_1^{\frac{1}{p}} K_1 + \dots + S_m^{\frac{1}{p}} K_m}{n^{\frac{1}{p}}} \\ &\xrightarrow{\text{a.s.}} P_1^{\frac{1}{p}} K_1 + \dots + P_m^{\frac{1}{p}} K_m \\ &= E_p X_1. \end{aligned}$$

命题 7 证毕. $\square$

其次考虑 X_1 有可数个数目的实现.

命题 8 如果 X_i ($i \geq 1$) 是一个独立同分布的随机凸体序列, 并且满足 $E\|X_1\| < \infty$. X_1 的实现属于 $\mathcal{K}_c^0$, $X_1 = K_j$ 的概率为 P_j , $j = 1, 2, \dots$, 其中 $K_j \in \mathcal{K}_c^0$, $\sum_{j=1}^{\infty} P_j = 1$, 则

$$\frac{X_1 \overset{+}{p} \dots \overset{+}{p} X_n}{n^{\frac{1}{p}}} \xrightarrow{\text{a.s.}} P_1^{\frac{1}{p}} K_1 \overset{+}{p} P_2^{\frac{1}{p}} K_2 \overset{+}{p} \dots = E_p X_1.$$

证明 假设 $X_{i,m} = X_i$, $i = 1, \dots, n$. 如果 $X_i = K_j$ 的概率是 P_j , $j = 1, \dots, m$, 则 $X_{i,m} \rightarrow X_i$, $m \rightarrow \infty$. 显然, 有

$$\sum_{j=1}^m P_j \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty.$$

我们首先表明 $P_1^{\frac{1}{p}} K_1 \overset{+}{p} \dots \overset{+}{p} P_m^{\frac{1}{p}} K_m$ 在 Hausdorff 度量下是收敛的.

假设 $h(K_i, u) \leq M$ ($M > 0$). 这结合 (2.1) 表明,

$$\begin{aligned} & \sup_{u \in S^{n-1}} \{ |h(P_1^{\frac{1}{p}} K_1 \overset{+}{p} \dots \overset{+}{p} P_m^{\frac{1}{p}} K_m, u)^p - h(P_1^{\frac{1}{p}} K_1 \overset{+}{p} P_2^{\frac{1}{p}} K_2 \overset{+}{p} \dots, u)^p| \} \\ &= \sup_{u \in S^{n-1}} \{ |P_{m+1} h(K_{m+1}, u)^p + P_{m+2} h(K_{m+2}, u)^p + \dots| \} \\ &\leq (P_{m+1} + P_{m+2} + \dots) M^p \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

因此, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$ 使得对任意 $m > N$ 有

$$\rho(P_1^{\frac{1}{p}} K_1 \overset{+}{p} \dots \overset{+}{p} P_m^{\frac{1}{p}} K_m, P_1^{\frac{1}{p}} K_1 \overset{+}{p} P_2^{\frac{1}{p}} K_2 \overset{+}{p} \dots) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.3)$$

令 S_i 表示 $X_{1,m}, \dots, X_{n,m}$ 的实现等于 K_j ($j = 1, \dots, m$) 的数目. 类似于命题 7, 我们能够推断出,

$$\frac{X_{1,m} \overset{+}{p} \dots \overset{+}{p} X_{n,m}}{n^{\frac{1}{p}}} \xrightarrow{\text{a.s.}} P_1^{\frac{1}{p}} K_1 \overset{+}{p} \dots \overset{+}{p} P_m^{\frac{1}{p}} K_m, \quad m, n \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

因此, 结合 Hausdorff 距离的定义以及命题 4, (2.1), (3.3), (3.4) 和事实

$$\rho(K_1 \overset{+}{p} K_2, L_1 \overset{+}{p} L_2) \leq \rho(K_1, L_1) + \rho(K_2, L_2), \quad K_i, L_j \in \mathcal{K}_c^0, \quad i, j = 1, 2,$$

我们有

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{X_1 \overset{+}{p} \dots \overset{+}{p} X_n}{n^{\frac{1}{p}}}, E_p X_1\right) &\leq \rho\left(\frac{X_1 \overset{+}{p} \dots \overset{+}{p} X_n}{n^{\frac{1}{p}}}, \frac{X_{1,m} \overset{+}{p} \dots \overset{+}{p} X_{n,m}}{n^{\frac{1}{p}}}\right) \\ &\quad + \rho\left(\frac{X_{1,m} \overset{+}{p} \dots \overset{+}{p} X_{n,m}}{n^{\frac{1}{p}}}, P_1^{\frac{1}{p}} K_1 \overset{+}{p} \dots \overset{+}{p} P_m^{\frac{1}{p}} K_m\right) \\ &\quad + \rho(P_1^{\frac{1}{p}} K_1 \overset{+}{p} \dots \overset{+}{p} P_m^{\frac{1}{p}} K_m, P_1^{\frac{1}{p}} K_1 \overset{+}{p} P_2^{\frac{1}{p}} K_2 \overset{+}{p} \dots) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho(X_i, X_{i,m}) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

命题 8 证毕. $\square$

在最后一种情形中, 假设 X_1 是从紧空间 $[a, b]$ 到 $\mathcal{K}_c^0$ 上的一个连续映射, F 是 $[a, b]$ 上的累积分布函数, 则 X_1 是一个包含原点在它的内部的一个随机凸体.

如实值连续函数的 Riemann-Stieltjes 积分的定义一样, 我们定义 Stieltjes-Firey 积分如下:

$$\int_a^b X_1(t) d_p F(t) = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \{X_1(\xi_1)[F(t_1) - F(t_0)]^{\frac{1}{p}} + \cdots + X_1(\xi_n)[F(t_n) - F(t_{n-1})]^{\frac{1}{p}}\},$$

其中 $\pi = \{a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b\}$ 是区间 $[a, b]$ 的一个剖分, $|\pi| = \sup_{i=1, \dots, n} \{t_i - t_{i-1}\}$, $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ($i = 1, \dots, n$).

命题 9 如果 X_i ($i \geq 1$) 是一个独立同分布的随机凸体序列, 则

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{\frac{1}{p}}} \xrightarrow{\text{a.s.}} \int_a^b X_1(t) d_p F(t) = E_p X_1.$$

证明 X_1 在 $[a, b]$ 上是连续的, 因此, 是一致连续的, 则

$$E_p X_1 = \int_a^b X_1(t) d_p F(t) < \infty.$$

选取 t_i ($0 \leq i \leq m$), 使得 $\pi = \{a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = b\}$, $|\pi| < \eta$. 对 $i = 1, \dots, m$, 令

$$X_{i,\pi}(t) = \begin{cases} X_i(t_1), & t \in [t_0, t_1], \\ X_i(t_j), & t \in (t_{j-1}, t_j], \quad j = 2, \dots, m, \end{cases}$$

则 $X_{1,\pi}, \dots, X_{m,\pi}$ 是独立同分布的, 且满足

$$X_{1,\pi} = \begin{cases} X_1(t_1), & P(X_{1,\pi} = X_1(t_1)) = F(t_1) - F(t_0), \\ X_1(t_j), & P(X_{1,\pi} = X_1(t_j)) = F(t_j) - F(t_{j-1}), \quad j = 2, \dots, m. \end{cases}$$

X_1 在 $[a, b]$ 上是连续的, 因此, 是一致连续的, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 若 $|t - t'| < \delta$, 则 $\rho(X_1(t), X_1(t')) < \frac{\varepsilon}{3}$. 进一步, 如果 $|\pi| < \eta \leq \delta$, 则 $\rho(X_i(t), X_{i,\pi}(t)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

为了便利, 我们令

$$E_{p,\pi} X_1(t) = X_1(t_1)[F(t_1) - F(t_0)]^{\frac{1}{p}} + \cdots + X_1(t_m)[F(t_m) - F(t_{m-1})]^{\frac{1}{p}}.$$

这结合 Hausdorff 距离的定义、Stieltjes-Firey 积分的定义、(2.1)、(2.2)、命题 4 和 7 表明, 对上面的 ε 和 δ , 如果 $|\pi| < \delta$, 则

$$\begin{aligned} & \rho\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{\frac{1}{p}}}, \int_a^b X_1(t) d_p F(t)\right) \\ & \leq \rho\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{\frac{1}{p}}}, \frac{X_{1,\pi} + \cdots + X_{n,\pi}}{n^{\frac{1}{p}}}\right) + \rho\left(\frac{X_{1,\pi} + \cdots + X_{n,\pi}}{n^{\frac{1}{p}}}, E_{p,\pi} X_1(t)\right) \\ & \quad + \rho\left(E_{p,\pi} X_1(t), \int_a^b X_1(t) d_p F(t)\right) \\ & \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho(X_i, X_{i,\pi}) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

命题 9 证毕. □

此外, 如果 a 和 b 中有一个或两个等于 ∞ , 例如, 若 a 和 b 都是 ∞ , 则 X_1 是 $(-\infty, \infty)$ 到 $\mathcal{K}_c^0$ 上的连续映射. 注意到当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\int_{-N}^N X_1(t) d_p F(t)$ 收敛于 $\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(t) d_p F(t)$. 类似命题 9 的证明方法,

使用前面的定义和记号, 结合 Hausdorff 距离的定义、Stieltjes-Firey 积分的定义、(2.1), (2.2) 命题 4 和 8, 以及事实

$$\begin{aligned} & \rho\left(\frac{X_1^+ \cdots^+ X_n}{n^{\frac{1}{p}}}, \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(t) d_p F(t)\right) \\ & \leq \rho\left(\frac{X_1^+ \cdots^+ X_n}{n^{\frac{1}{p}}}, \frac{X_{1,\pi}^+ \cdots^+ X_{n,\pi}}{n^{\frac{1}{p}}}\right) + \rho\left(\frac{X_{1,\pi}^+ \cdots^+ X_{n,\pi}}{n^{\frac{1}{p}}}, E_{p,\pi} X_1(t)\right) \\ & \quad + \rho\left(E_{p,\pi} X_1(t), \int_{-N}^N X_1(t) d_p F(t)\right) + \rho\left(\int_{-N}^N X_1(t) d_p F(t), \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(t) d_p F(t)\right), \end{aligned}$$

我们能够获得下面所需的结果.

命题 10 如果 X_i ($i \geq 1$) 是一个独立同分布的序列, X_1 是 $(-\infty, \infty)$ 到 $\mathcal{K}_c^0$ 上的连续映射, F 是 $(-\infty, \infty)$ 上的累积分布函数以及 $\int_{-\infty}^{\infty} \|X_1(t)\| d_p F(t) < \infty$, 则

$$\frac{X_1^+ \cdots^+ X_n}{n^{\frac{1}{p}}} \xrightarrow{\text{a.s.}} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(t) d_p F(t) = E_p X_1.$$

Vitale^[10] 证明了随机集的 Brunn-Minkowski 不等式. 类似地, 我们将提供关于 Firey 组合的均质积分 Brunn-Minkowski 不等式的概率版本.

定理 2 的证明 下面的定义将有助于完成定理的证明.

如果一个随机凸体 X 是从 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 到 $\mathcal{K}_c^0$ 上的可测映射, 它的约化定义如下:

$$X_{\text{redu}} : (\mathcal{K}_c^0, \mathfrak{F}_{\mathcal{K}_c^0}, P_X) \rightarrow \mathcal{K}_c^0,$$

其中 $X_{\text{redu}}(K) = K$ ($K \in \mathcal{K}_c^0$), P_X 是被 X 诱导的 $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}_c^0}$ 上的概率测度.

如果 x 是 X_{redu} 的一个选取, 则对 $\forall K \in \mathcal{K}_c^0$, 有 $x(K) \in K$. 进一步, $x \circ X$ 是 X 的一个选取并且与 x 的分布相同, 因此, $E_p(x \circ X) = E_p(x)$. 由此得到

$$E_p X_{\text{redu}} \subseteq E_p X.$$

定理 2 的一个充分条件是

$$W_i(E_p X_{\text{redu}})^{\frac{p}{d-i}} \geq E W_i(X)^{\frac{p}{d-i}}. \quad (3.5)$$

因为 X_{redu} 和 X 有相同的分布, 所以, (3.5) 等价于

$$W_i(E_p X_{\text{redu}})^{\frac{p}{d-i}} \geq E W_i(X_{\text{redu}})^{\frac{p}{d-i}}.$$

为了完成定理的证明, 根据上面的不等式, 只需要考虑 X 定义在 $(\mathcal{K}_c^0, \mathfrak{B}_{\mathcal{K}_c^0}, P)$ 上以及对 $\forall K \in \mathcal{K}_c^0$ 有 $X(K) = K$.

假设 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 = \{K_1, K_2, \dots\}$, $\Omega_2 = \mathcal{K}_c^0 / \Omega_1$, $P(X(K_j) = K_j) = P_j$, $0 \leq \lambda = \sum_{j=1}^{\infty} P_j \leq 1$. 让 X_1 是定义在 Ω_1 上, 其分布等于 X 在 Ω_1 上的分布. 类似的定义 X_2 . 根据选取 p 期望的定义, 我们有

$$E_p X = \lambda^{\frac{1}{p}} E_p X_1^+ (1 - \lambda)^{\frac{1}{p}} E_p X_2.$$

这结合 (1.1) 给出了

$$W_i(E_p X)^{\frac{p}{d-i}} = W_i(\lambda^{\frac{1}{p}} E_p X_1^+ (1 - \lambda)^{\frac{1}{p}} E_p X_2)^{\frac{p}{d-i}}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \lambda W_i(E_p X_1)^{\frac{p}{d-i}} + (1-\lambda) W_i(E_p X_2)^{\frac{p}{d-i}} \\
&\geq \lambda E W_i(X_1)^{\frac{p}{d-i}} + (1-\lambda) E W_i(X_2)^{\frac{p}{d-i}} \\
&= E W_i(X)^{\frac{p}{d-i}}.
\end{aligned}$$

为了说明第二个不等式, 我们将 Ω 分成原子情形和非原子情形.

对于非原子情形, X_i ($i \geq 1$) 是一个独立同分布的随机凸体序列并且使得 $E\|X_1\| < \infty$. 根据 (1.1), 我们有

$$W_i\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{p}{d-i}} \geq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W_i(X_j)^{\frac{p}{d-i}}.$$

这结合定理 1 和 Kolmogorov 强大数定理表明,

$$W_i(E_p X)^{\frac{p}{d-i}} \geq E W_i(X)^{\frac{p}{d-i}}.$$

对于原子情形, 假设 $P(X = K_j) = P_j$, $\sum_{j=1}^{\infty} P_j = 1$, 则

$$E_p X = P_1^{\frac{1}{p}} K_1 + P_2^{\frac{1}{p}} K_2 + \dots + P_n^{\frac{1}{p}} K_n + \dots.$$

应用 (1.1), 我们能够推断出,

$$W_i(P_1^{\frac{1}{p}} K_1 + P_2^{\frac{1}{p}} K_2 + \dots + P_n^{\frac{1}{p}} K_n)^{\frac{p}{d-i}} \geq P_1 W_i(K_1)^{\frac{p}{d-i}} + \dots + P_n W_i(K_n)^{\frac{p}{d-i}}.$$

让 $n \rightarrow \infty$, 则完成了定理的证明. $\square$

注 3 (1) 定理 2 暗含了 Firey 组合的均质积分 Brunn-Minkowski 不等式 — 随机凸体 X 以相同的概率取 K 和 L 两个值.

(2) 当 $p = 1$, $i = 0$, 定理 2 转变成文献 [10] 中定理的凸的情形.

下面的推论是定理 2 的一个结果.

推论 11 如果 $a > 0$, $p \geq 1$, $0 \leq i < d$, $X : \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c^0$ 是一个随机凸体使得 $E\|X\| < \infty$, 则

$$P\{W_i(X) \geq a\}^{\frac{d-i}{p}} \leq \frac{W_i(E_p X)}{a}.$$

证明 根据 Markov 不等式和定理 2, 我们能够推断出,

$$P\{W_i(X) \geq a\} = P\{W_i(X)^{\frac{p}{d-i}} \geq a^{\frac{p}{d-i}}\} \leq \frac{E W_i(X)^{\frac{p}{d-i}}}{a^{\frac{p}{d-i}}} \leq \left[\frac{W_i(E_p X)}{a} \right]^{\frac{p}{d-i}}.$$

推论得证. $\square$

致谢 对审稿人付出的辛勤劳动在此表示深深的感谢.

参考文献

- 1 Gruber P M. Convex and Discrete Geometry (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften). Berlin: Springer, 2007
- 2 Li M, Zhou J. An isoperimetric deficit upper bound of the convex domain in a surface of constant curvature. Sci China Math, 2010, 53: 1941–1946
- 3 Thompson A C. Minkowski Geometry, Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1996

- 4 周家足. $\mathbb{R}^4$ 中的 Willmore 泛函与包含问题. 中国科学 A 辑, 2007, 37: 249–256
- 5 Zeng C, Ma L, Zhou J, et al. The Bonnesen isoperimetric inequality in a surface of constant curvature. *Sci China Math*, 2012, 55: 1913–1919
- 6 Zong C. What is known about unit cubes. *Bull Amer Math Soc*, 2005, 42: 181–211
- 7 Zong C. *The Cube: a Window to Convex and Discrete Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006
- 8 Zong C. The simultaneous packing and covering constants in the plane. *Adv Math*, 2008, 218: 653–672
- 9 Zong C. A quantitative program for Hadwiger’s covering conjecture. *Sci China Math*, 2010, 53: 2551–2560
- 10 Vitale R A. The Brunn-Minkowski inequality for random sets. *J Multivariate Anal*, 1990, 33: 286–293
- 11 He R, Leng G. A strong law of large numbers on the harmonic p -combination. *Geom Dedicata*, 2011, 154: 103–116
- 12 Molchanov I S. *Theory of Random Sets*. London: Springer, 2005
- 13 Schneider R, Weil W. *Stochastic and Integral Geometry (Probability and its Applications)*. Berlin: Springer, 2008
- 14 Vitale R A. Expected absolute random determinants and zonoids. *Ann Appl Probab*, 1991, 1: 293–300
- 15 Vitale R A. On the volume of parallel bodies: a probabilistic derivation of the Steiner formula. *Adv Appl Probab*, 1995, 27: 97–101
- 16 Vitale R A. The Wills functional and Gaussian processes. *Ann Probab*, 1996, 24: 2172–2178
- 17 Artstein Z, Vitale R A. A strong law of large numbers for random compact sets. *Ann Probab*, 1975, 5: 879–882
- 18 Cressie N. A strong limit theorem for random sets. *Suppl Adv Appl Probab*, 1978, 10: 36–46
- 19 Puri M L, Ralescu D A. Strong law of large numbers for Banach space valued random sets. *Ann Probab*, 1983, 1: 222–224
- 20 Gardner R J. The Brunn-Minkowski inequality. *Bull Amer Math Soc*, 2002, 39: 355–405
- 21 Gupta S D. Brunn-Minkowski inequality and its aftermath. *J Multivariate Anal*, 1980, 10: 296–318
- 22 McCann R J. A convexity principle for interacting gases. *Adv Math*, 1997, 128: 153–179
- 23 Schneider R. *Convex Bodies: the Brunn-Minkowski Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993
- 24 Lutwak E. The Brunn-Minkowski-Firey theory I: mixed volumes and the Minkowski problem. *J Differential Geom*, 1993, 38: 131–150
- 25 Lutwak E. The Brunn-Minkowski-Firey theory II: affine and geominimal surface areas. *Adv Math*, 1996, 118: 244–294
- 26 Firey W J. P -means of convex bodies. *Math Scand*, 1962, 10: 17–24
- 27 何斌吾, 冷岗松. 迷向体与 Bourgain 问题. 中国科学 A 辑, 2005, 35: 450–462
- 28 He B, Leng G, Li H. Projection problems for symmetric polytopes. *Adv Math*, 2006, 207: 73–90
- 29 何日高, 冷岗松. Shapley-Folkman-Starr 定理的推广. 中国科学: 数学, 2012, 42: 681–688
- 30 Huang Q, He B, Wang G. The Busemann theorem for complex p -convex bodies. *Arch Math (Basel)*, 2012, 99: 289–299
- 31 Huang Q, He B. On the Orlicz Minkowski problem for polytopes. *Discrete Comput Geom*, 2012, 48: 281–297
- 32 Li A, Leng G. Brascamp-Lieb inequality for positive double John basis and its reverse. *Sci China Math*, 2011, 54: 399–410
- 33 Li A, Leng G. Mean width inequalities for isotropic measures. *Math Z*, 2012, 270: 1089–1110
- 34 Li J, Yuan S, Leng G. L_p -Blaschke valuations. *Trans Amer Math Soc*, in press, 2013
- 35 Lin Y, Leng G. Convex bodies with minimal volume product in $\mathbb{R}^2$ — a new proof. *Discrete Math*, 2010, 310: 3018–3025
- 36 Lutwak E, Lv S, Yang D, et al. Extensions of Fisher information and Stam’s inequality. *IEEE Trans Inform Theory*, 2012, 58: 1319–1327
- 37 Lutwak E, Lv S, Yang D, et al. Affine moments of a random vector. *IEEE Trans Inform Theory*, in press, 2013
- 38 Lutwak E, Yang D, Zhang G. L_p affine isoperimetric inequalities. *J Differential Geom*, 2000, 1: 111–132
- 39 Lutwak E, Yang D, Zhang G. Sharp affine L_p Sobolev inequalities. *J Differential Geom*, 2002, 62: 17–38
- 40 Lv S, Leng G. Cross i -sections of star bodies and dual mixed volumes. *Proc Amer Math Soc*, 2007, 135: 3367–3373
- 41 吕松军, 冷岗松. 关于广义 Busemann-Petty 问题. 中国科学 A 辑, 2007, 37: 796–808
- 42 Wang W, He B. L_p -dual affine surface area. *J Math Anal Appl*, 2008, 348: 746–751
- 43 Wang W. L_p Brunn-Minkowski type inequalities for Blaschke-Minkowski homomorphisms. *Geom Dedicata*, 2013, 164: 273–285
- 44 Wang W, He R. Inequalities for mixed complex projection bodies. *Taiwanese J Math*, in press, 2013
- 45 Wang W D, Leng G. Some affine isoperimetric inequalities associated with L_p -affine surface area. *Houston J Math*, 2008, 34: 443–453
- 46 Xiong G. Extremum problems for the cone volume functional of convex polytopes. *Adv Math*, 2010, 225: 3214–3228
- 47 Yuan J, Zhao L, Leng G. Inequalities for L_p centroid body. *Taiwanese J Math*, 2007, 11: 1315–1325
- 48 赵长健. L_p -混合相交体. 中国科学 A 辑, 2008, 38: 687–702
- 49 Zhao C, Cheung W. Radial Blaschke-Minkowski homomorphisms and volume differences. *Geom Dedicata*, 2011, 154:

81–91

- 50 Fedotov V P. Geometric mean of convex sets, questions of global geometry. Zap Nauchn Sem LOMI, 1974, 45: 113–116
- 51 Gardner R J. Geometric Tomography. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- 52 Aumann R J. Integrals of set-valued functions. J Math Anal Appl, 1965, 12: 1–12

A probabilistic version of quermassintegrals' Brunn-Minkowski inequality

HE RiGao & LENG GangSong

Abstract In this paper, we establish a strong law of large numbers on Firey combination in L_p space with two different methods. By applying this theorem, we provide the probabilistic version of quermassintegrals' Brunn-Minkowski inequality.

Keywords strong law of large numbers, Firey combination, random set, selection p -expectation

MSC(2010) 60D05, 52A20, 52A22

doi: 10.1360/012012-582