体上长方矩阵的图同态 I

黄礼平*, 赵康

长沙理工大学数学与统计学院, 长沙 410114

E-mail: lipingmath@163.com, zhaokangmath@126.com

收稿日期: 2017-08-01; 接受日期: 2017-12-15; 网络出版日期: 2018-05-14; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371072) 和湖南省教育厅 (批准号: 16C0037) 资助项目

摘要 设 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 为体 $\mathbb{D}$ 上 $m \times n$ 矩阵的集合. 两个矩阵 $A, B \in \mathbb{D}^{m \times n}$ 称为邻接的, 如果 $\text{rank}(A - B) = 1$. 按此邻接关系, 以 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 为顶点集, 本文得到一个连通图. 设 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 为两个体, $|\mathbb{D}| \geq 4$, $m, n, m', n' \geq 2$ 为整数. 应用几何方法, 本文刻画了从 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 到 $\mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 的非退化的图同态 φ , 其中 φ 满足条件: $\varphi(0) = 0$ 且 φ 保持 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 中两个不同类型的标准极大邻接集的维数不变. 作为一个推论, 当 $\mathbb{D}$ 为 EAS (every endomorphism to be automatically surjective) 体时, 本文给出了从 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 到 $\mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 的非退化的图同态的代数公式.

关键词 图同态 长方矩阵 体 矩阵几何 保邻接的映射 加权半仿射映射

MSC (2010) 主题分类 15A33, 51A10, 51D20, 05C60

1 引言

本文设 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 为两个体, $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$, m, n, m' 和 n' 为正整数. 用 $\mathbb{F}_q$ 表示由 q 个元素构成的有限域, 其中 q 是一个素数的幂. 用 $|X|$ 表示集合 X 的势. 用 $\mathbb{D}^n$ (${}^n\mathbb{D}$) 表示 $\mathbb{D}$ 上所有 n 维行 (列) 向量构成的左 (右) 向量空间. 关于体上矩阵的基本性质可参见文献 [1, 2].

设 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 为 $\mathbb{D}$ 上 $m \times n$ 矩阵的集合, $\mathbb{D}_r^{m \times n}$ 为 $\mathbb{D}$ 上秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵的集合, $GL_n(\mathbb{D})$ 为 $\mathbb{D}$ 上 n 阶可逆矩阵集合. 用 I_r (简称为 I) 表示 r 阶单位矩阵, $0_{m,n}$ 表示 $m \times n$ 零矩阵 (简称为 0), $0_n = 0_{n,n}$. 用 $E_{ij}^{m \times n}$ (简称为 E_{ij}) 表示 (i, j) 位置元素为 1 而其他位置元素都是 0 的 $m \times n$ 矩阵. 记 A^T 为矩阵 A 的转置矩阵. 如果 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{D}^{m \times n}$, $\sigma: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}'$ 是一个映射, 记 $A^\sigma = (a_{ij}^\sigma)$, $A^{\sigma T} = (A^\sigma)^T$. 用 $(B_1, B_2, \dots, B_k)$ 表示一个 $m \times (n_1 + n_2 + \dots + n_k)$ 矩阵, 其中 B_i 为 $m \times n_i$ 矩阵. 用 $\text{diag}(A_1, \dots, A_k)$ 表示一个分块对角矩阵, 其中 A_i 为 $m_i \times n_i$ 矩阵.

定义 $ad(A, B) := \text{rank}(A - B)$ 是 $A, B \in \mathbb{D}^{m \times n}$ 之间的算术距离. 显然, $ad(A, B) \geq 0$ 且 $ad(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$; $ad(A, B) = ad(B, A)$; $ad(A, B) \leq ad(A, C) + ad(C, B)$. $\mathbb{D}^{m \times n}$ 中的矩阵也称为点. 如果 $ad(A, B) = 1$, 则称两点 $A, B \in \mathbb{D}^{m \times n}$ 是邻接的, 记作 $A \sim B$. 按此邻接关系, 以 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 为顶点集, 我

英文引用格式: Huang L P, Zhao K. Graph homomorphisms on rectangular matrices over division rings I (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1095–1120, doi: 10.1360/N012017-00179

们得到一个图, 称为 $\mathbb{D}$ 上 $m \times n$ 矩阵图, 记作 $\Gamma(\mathbb{D}^{m \times n})$. 众所周知, 对每个矩阵 $A \in \mathbb{D}^{m \times n}$, 存在可逆矩阵 P 和 Q 使得 $A = P \text{diag}(I_r, 0)Q$. 因此, 容易证明 $\Gamma(\mathbb{D}^{m \times n})$ 是一个连通图和距离可迁图^[3]. 当 $\mathbb{D} = \mathbb{F}_q$ 时, $\Gamma(\mathbb{F}_q^{m \times n})$ 在图论中也称为双线性型图^[4].

用 $d(A, B)$ 表示矩阵图 $\Gamma(\mathbb{D}^{m \times n})$ 的两个顶点 A 和 B 之间的距离 (按图论中的定义). 众所周知, 两点之间的距离和算术距离是相等的 (参见文献 [5, 引理 3.3] 或 [2]), 即

$$d(A, B) = \text{ad}(A, B), \quad A, B \in \mathbb{D}^{m \times n}. \quad (1.1)$$

设 $\varphi: \mathbb{D}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{D}^{m' \times n'}$ 是一个映射. 若 $A \sim B$ 推出 $\varphi(A) \sim \varphi(B)$, 则称 φ 为一个图同态. 若 φ 是双射且 $A \sim B \Leftrightarrow \varphi(A) \sim \varphi(B)$, 则称 φ 为一个图同构. 若 $d(A, B) = d(\varphi(A), \varphi(B))$, $\forall A, B \in \mathbb{D}^{m \times n}$, 则称 φ 为一个距离保持映射. 设 k 是正整数, 若 $d(A, B) = k$ 推出 $d(\varphi(A), \varphi(B)) = k$, 则称 φ 为一个距离 k 保持映射. 在矩阵几何中, 图同态 (同构) 又称为保邻接的映射 (双向保邻接的双射). 若 $\varphi: \mathbb{D}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{D}^{m' \times n'}$ 是一个图同态, 则由 (1.1) 可知,

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) \leq d(A, B), \quad A, B \in \mathbb{D}^{m \times n}. \quad (1.2)$$

在矩阵几何^[2]中, 所有形如 $X \mapsto PXQ + A$ 的双射构成矩阵空间 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 的一个变换群, 其中 $P \in GL_m(\mathbb{D})$, $Q \in GL_n(\mathbb{D})$, $A \in \mathbb{D}^{m \times n}$. 矩阵几何的基本问题就是利用尽可能少的几何不变量刻画该变换群. 1951 年, Hua^[6] 指出 “邻接性” 可以用来刻画该变换群, 并证明了体上长方矩阵几何基本定理 (也可参见文献 [7]). 同时, Hua 的定理刻画了长方矩阵图的图同构, 这个工作被许多学者继承和发展 (参见文献 [2, 5, 8–10] 以及 [11–18]). 因此, 矩阵几何的基本问题也是研究矩阵图的图同构与图同态.

图同态是代数图论研究的一个重要课题^[3, 19]. 因此, 刻画矩阵图的图同态是很有意义的. 然而, $\Gamma(\mathbb{D}^{m \times n})$ 到 $\Gamma(\mathbb{D}^{m' \times n'})$ 的图同态仍需进行深入研究. 最近, 文献 [12] 证明了 $\Gamma(\mathbb{F}_q^{m \times n})$ 的每个图自同态是一个自同构或顶点着色. 当 $p, q \geq n \geq 3$ 且 $|\mathbb{D}| \geq 4$ 时, Šemrl^[15] 刻画了图同态 $\phi: \mathbb{D}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{D}^{p \times q}$, 其中 ϕ 满足条件: $\phi(0) = 0$ 并且存在 $A_0 \in \mathbb{D}^{n \times n}$ 使得 $\text{rank}(\phi(A_0)) = n$. Huang 和 Šemrl^[16] 进一步刻画了 $\mathbb{D}^{2 \times 2}$ 到 $\mathbb{D}^{p \times q}$ 的图同态. 最近, 当 $\mathbb{D}$ 为 EAS 体时, Pazzis 和 Šemrl^[17] 指出每一个同态 $\phi: \mathbb{D}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{D}^{p \times q}$ 是 “标准的” 或 “退化的”. 这些工作鼓励我们进一步研究体上长方矩阵的图同态.

设子集 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{D}^{m \times n}$ 非空. 若 $\mathcal{S}$ 中任意两点是邻接的, 则称 $\mathcal{S}$ 为一个邻接集. 若一个邻接集不是另一个邻接集的真子集, 则称它是一个极大邻接集 (简称极大集). 在图论中, 极大集又称为极大团^[3, 4]. 在 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 中存在两类极大集, 并且每个邻接集都可以扩充为一个极大集 (参见文献 [2]).

本文设

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i &= \left\{ \sum_{j=1}^n x_j E_{ij} : x_j \in \mathbb{D} \right\} \subset \mathbb{D}^{m \times n}, \quad i = 1, \dots, m, \\ \mathcal{N}_j &= \left\{ \sum_{i=1}^m y_i E_{ij} : y_i \in \mathbb{D} \right\} \subset \mathbb{D}^{m \times n}, \quad j = 1, \dots, n, \\ \mathcal{M}'_i &= \left\{ \sum_{j=1}^{n'} x_j E_{ij} : x_j \in \mathbb{D}' \right\} \subset \mathbb{D}^{m' \times n'}, \quad i = 1, \dots, m', \\ \mathcal{N}'_j &= \left\{ \sum_{i=1}^{m'} y_i E_{ij} : y_i \in \mathbb{D}' \right\} \subset \mathbb{D}^{m' \times n'}, \quad j = 1, \dots, n'. \end{aligned}$$

$\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{N}_1$ ($\mathcal{M}'_1$ 和 $\mathcal{N}'_1$) 分别称为 $\mathbb{D}^{m \times n}$ ($\mathbb{D}^{m' \times n'}$) 的类型一和类型二的标准极大集.

引理 1.1 (参见文献 [2, 命题 3.8]) 在 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 中, 集合 $\mathcal{M}_i$ 和 $\mathcal{N}_j$ ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) 都是极大集. 每个极大集 $\mathcal{M}$ 必为下列两个形式之一:

(1) (类型一) $\mathcal{M} = P\mathcal{M}_1 + A$, 其中 $P \in GL_m(\mathbb{D})$, $A \in \mathbb{D}^{m \times n}$;

(2) (类型二) $\mathcal{M} = \mathcal{N}_1 Q + A$, 其中 $Q \in GL_n(\mathbb{D})$, $A \in \mathbb{D}^{m \times n}$.

设 $\mathbb{D}_{\leq 1}^{m \times n} = \mathbb{D}_1^{m \times n} \cup \{0_{m,n}\}$, $A \in \mathbb{D}^{m \times n}$, 则称 $\mathbb{D}_{\leq 1}^{m \times n} + A$ 为以 A 为中心的单位球. 若 $f: \mathbb{D}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 是一个图同态, 则 $f(\mathbb{D}_{\leq 1}^{m \times n} + A) \subseteq (\mathbb{D}_{\leq 1}^{m' \times n'} + f(A))$.

图同态 $f: \mathbb{D}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 称为退化的, 如果存在矩阵 $A \in \mathbb{D}_{\leq 1}^{m \times n}$ 以及 $\mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 中两个不同类型的极大集 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 使得 $f(\mathbb{D}_{\leq 1}^{m \times n} + A) \subseteq \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ 且 $f(A) \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$. 注意这个定义与文献 [15, 17] 中“退化”的定义不同. 图同态 $f: \mathbb{D}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 称为一个顶点着色, 如果 $f(\mathbb{D}^{m \times n})$ 是一个邻接集. 每个顶点着色都是退化的. 如果一个图同态 $f: \mathbb{D}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 不是退化的, 则称它是非退化的.

非退化的图同态可能不保持距离 2 (见例 2.1). 如果 f 是退化的 (非退化的) 图同态, 那么映射 $X \mapsto P_1 f(Q_1 X Q_2) P_2$ 也是退化 (非退化) 的图同态, 其中 Q_1, Q_2, P_1 和 P_2 为可逆矩阵.

本文结构如下. 第 2 节给出本文的主要结果和一些图同态的例子. 第 3 节为了证明主要结果, 讨论 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 的极大集和加权半仿射映射. 作为主要结果证明的需要, 第 4 节讨论 Grassmann 空间以及一些相关的引理, 其中的引理在其他一些问题中也有应用前景. 第 5 节给出主要结果的证明.

2 主要结果与例子

维数是几何的一个基本概念. 定义邻接集的维数如下. 设 $\mathcal{S}$ 为 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 的一个包含 0 的邻接集且 $|\mathcal{S}| \geq 2$, 则存在一个极大集 $\mathcal{M}$ 使得 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$. 由引理 1.1 可知, $\mathcal{M} = P\mathcal{M}_1$ 或 $\mathcal{M} = \mathcal{N}_1 Q$, 其中 P 和 Q 为可逆矩阵, 从而, $P^{-1}\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_1$ 或 $\mathcal{S}Q^{-1} \subseteq \mathcal{N}_1$. 注意到 $\mathcal{M}_1$ (或 $\mathcal{N}_1$) 是 $\mathbb{D}$ 上左 (或右) 线性空间. 当 $P^{-1}\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_1$ (或 $\mathcal{S}Q^{-1} \subseteq \mathcal{N}_1$) 时, $P^{-1}\mathcal{S}$ (或 $\mathcal{S}Q^{-1}$) 中的极大左 (或右) 线性无关集中的矩阵个数称为 $\mathcal{S}$ 的维数, 记为 $\dim(\mathcal{S})$. $\dim(\mathcal{S})$ 由 $\mathcal{S}$ 唯一确定且 $\dim(\mathcal{S}) \leq \max\{m, n\}$. 而且,

$$\dim(\mathcal{S}) = \dim(P_1 \mathcal{S} Q_1), \quad \text{其中 } P_1 \in GL_m(\mathbb{D}), \quad Q_1 \in GL_n(\mathbb{D}). \quad (2.1)$$

本文的主要结果如下:

定理 2.1 设 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 是两个体, $|\mathbb{D}| \geq 4$, $m, n, m', n' \geq 2$ 是整数. 设 $\varphi: \mathbb{D}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 是非退化的图同态且 $\varphi(0) = 0$. 进一步, 假设 $\dim(\varphi(\mathcal{M}_1)) = n$ 且 $\dim(\varphi(\mathcal{N}_1)) = m$, 则存在矩阵 $P \in GL_{m'}(\mathbb{D}')$ 、 $Q \in GL_{n'}(\mathbb{D}')$ 和一个非零的环同态 $\tau: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}'$, 以及满足条件 $I_m + X^\tau L \in GL_m(\mathbb{D}')$ ($\forall X \in \mathbb{D}^{m \times n}$) 的矩阵 $L \in \mathbb{D}'^{n \times m}$, 使得 $m' \geq m, n' \geq n$,

$$\varphi(X) = P \begin{pmatrix} (I_m + X^\tau L)^{-1} X^\tau & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q, \quad X \in \mathbb{D}^{m \times n}; \quad (2.2)$$

或者存在矩阵 $P \in GL_{m'}(\mathbb{D}')$ 、 $Q \in GL_{n'}(\mathbb{D}')$ 和一个非零的环反同态 $\sigma: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}'$, 以及满足条件 $I_m + LX^{\sigma T} \in GL_m(\mathbb{D}')$ ($\forall X \in \mathbb{D}^{m \times n}$) 的矩阵 $L \in \mathbb{D}'^{m \times n}$, 使得 $m' \geq n, n' \geq m$,

$$\varphi(X) = P \begin{pmatrix} X^{\sigma T} (I_m + LX^{\sigma T})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q, \quad X \in \mathbb{D}^{m \times n}. \quad (2.3)$$

特别地, 如果 τ (或 σ) 是满射, 则 $L = 0$ 且 τ 是环同构 (或 σ 是环反同构).

如果体 $\mathbb{D}$ 的每个非零自同态都是满射, 则称 $\mathbb{D}$ 为一个 EAS 体. 下列体都是 EAS 体: 实数域、复数域和有限域. 下面是定理 2.1 的一个重要推论.

推论 2.1 ^[15,17] 设 $\mathbb{D}$ 是 EAS 体, $|\mathbb{D}| \geq 4$, $m, n, m', n' \geq 2$ 是整数. 假设 $\varphi: \mathbb{D}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{D}^{m' \times n'}$ 是一个非退化的图同态且 $\varphi(0) = 0$, 则存在 $P \in GL_{m'}(\mathbb{D})$ 、 $Q \in GL_{n'}(\mathbb{D})$ 和 $\mathbb{D}$ 的一个环自同构 τ , 使得 $m' \geq m$, $n' \geq n$ 且

$$\varphi(X) = P \begin{pmatrix} X^\tau & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q, \quad X \in \mathbb{D}^{m \times n}; \quad (2.4)$$

或者存在 $P \in GL_{m'}(\mathbb{D})$ 、 $Q \in GL_{n'}(\mathbb{D})$ 和 $\mathbb{D}$ 的一个环反自同构 σ , 使得 $m' \geq n$, $n' \geq m$ 且

$$\varphi(X) = P \begin{pmatrix} X^{\sigma^T} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q, \quad X \in \mathbb{D}^{m \times n}. \quad (2.5)$$

下面给出几个图同态的例子.

例 2.1 存在不保持距离 2 的非退化的图同态. 设 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 是两个体且存在 $0 \neq \xi \in \mathbb{D}' \setminus \mathbb{D}$. 令

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \xi \\ 0 & 1 & \xi \end{pmatrix}.$$

定义映射

$$\varphi(X) = \begin{pmatrix} P_1 X \\ 0 \end{pmatrix},$$

$X \in \mathbb{D}^{3 \times n}$ ($n \geq 2$), 则有

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \xi z \\ y + \xi z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{D}^n. \quad (2.6)$$

这个映射 φ 既是加法映射又是图同态. 因为

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \xi z \\ x + \xi z \\ 0 \end{pmatrix},$$

所以, φ 不保持距离 2. 下面说明 φ 是非退化的. 事实上, 因为 φ 是加法映射, 所以, $\varphi(\mathbb{D}_{\leq 1}^{3 \times n} + A) = \varphi(\mathbb{D}_{\leq 1}^{3 \times n}) + \varphi(A)$. 同时, 有 $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\mathcal{M}_i) \subseteq \mathcal{M}'_i$ ($i = 1, 2$), $\varphi(\mathcal{N}_j) \subseteq \mathcal{N}'_j$ ($j = 1, \dots, n$). 因此, $\mathbb{D}^{3 \times n}$ 中不存在不同类型的极大集 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 使得 $0 \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ 且 $\varphi(\mathbb{D}_{\leq 1}^{3 \times n}) \subseteq \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$. 由此可知, φ 是不保持距离 2 的非退化的图同态.

例 2.2 设 $m, n, m', n' \geq 2$ 是整数, $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 是两个体, $|\mathbb{D}| \leq |\mathbb{D}'|$ 且 $|\mathbb{D}|$ 是无限的, 则存在从 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 到 $\mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 的顶点着色. 事实上, 由势的理论^[1]可知, $|\mathbb{D}| = |\mathbb{D}^{m \times n}| \leq |\mathbb{D}'|$, 并且存在一个单射 $f: \mathbb{D}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{D}'^{1 \times 1}$ 是顶点着色. 因为存在一个映射 $\mathbb{D}'^{1 \times 1} \rightarrow \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 是嵌入映射 (或包含映射) 又是图同态, 因此存在从 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 到 $\mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 的顶点着色. 然而, 在这种情形下无法写出这种图同态的代数公式.

例 2.3 ^[6, 7, 15] 设 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 是两个体, $m, n, m', n' \geq 2$ 是整数. 设映射 $\varphi: \mathbb{D}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 保持距离 k , 其中 $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$, 并且存在一个矩阵 $L \in \mathbb{D}'^{n' \times m'}$ 使得 $I_{m'} + \varphi(X)L \in GL_{m'}(\mathbb{D}')$, $\forall X \in \mathbb{D}^{m \times n}$. 令

$$\theta(X) = (I_{m'} + \varphi(X)L)^{-1}\varphi(X), \quad X \in \mathbb{D}^{m \times n}, \quad (2.7)$$

则映射 $\theta: \mathbb{D}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 保持距离 k .

证明 设 $X, Y \in \mathbb{D}^{m \times n}$ 满足 $d(X, Y) = k$, 则有

$$k = \text{rank}(X - Y) = d(\varphi(X), \varphi(Y)) = \text{rank}(\varphi(X) - \varphi(Y)).$$

从而,

$$\begin{aligned} m' + \text{rank}(\varphi(X) - \varphi(Y)) &= \text{rank} \left[\begin{pmatrix} I_{m'} & \varphi(X) \\ I_{m'} & \varphi(Y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{m'} & 0 \\ L & I_{n'} \end{pmatrix} \right] \\ &= \text{rank} \begin{pmatrix} I_{m'} + \varphi(X)L & \varphi(X) \\ I_{m'} + \varphi(Y)L & \varphi(Y) \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} I_{m'} & \theta(X) \\ I_{m'} & \theta(Y) \end{pmatrix} \\ &= m' + d(\theta(X), \theta(Y)). \end{aligned}$$

因此, $d(X, Y) = d(\theta(X), \theta(Y)) = k$. 由此可知 θ 保持距离 k . $\square$

类似地, 我们有下面的例子.

例 2.4 ^[6, 7, 15] 设 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 是两个体, $m, n, m', n' \geq 2$ 是整数. 设映射 $\varphi: \mathbb{D}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 保持距离 k , 其中 $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$, 并且存在一个矩阵 $L \in \mathbb{D}'^{m' \times m'}$ 使得 $I_{n'} + L\varphi(X) \in GL_{n'}(\mathbb{D}')$, $\forall X \in \mathbb{D}^{m \times n}$. 令

$$\theta(X) = \varphi(X)(I_{n'} + L\varphi(X))^{-1}, \quad X \in \mathbb{D}^{m \times n}, \quad (2.8)$$

则映射 $\theta: \mathbb{D}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 保持距离 k .

3 极大集与加权半仿射映射

本节将讨论 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 的极大集及其仿射几何.

引理 3.1 (参见文献 [5, 引理 3.2]) 设 m, n, r 和 s 是整数且 $1 \leq r, s < \min\{m, n\}$. 假设 $\alpha = \{i_1, \dots, i_r\}$, $\beta = \{j_1, \dots, j_s\}$, 其中 $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m$, $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n$. 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{D}^{m \times n}$, $B_i = \sum_{t=1}^r \sum_{k=1}^s b_{i_t j_k}^{(i)} E_{i_t j_k} \in \mathbb{D}^{m \times n}$, 其中 $b_{i_t j_k}^{(i)} \in \mathbb{D}$, $i = 1, 2$, 且 $B_1 \neq B_2$. 如果 $A \sim B_i$, $i = 1, 2$, 则 $a_{ij} = 0, \forall i \notin \alpha$, 或者 $a_{ij} = 0, \forall j \notin \beta$.

由引理 3.1 和 1.1 可证如下结论.

推论 3.1 (参见文献 [2, 推论 3.10]) 设 $A, B \in \mathbb{D}^{m \times n}$ 是两个邻接的点, 则仅存在两个不同类型的极大集包含 A 和 B .

推论 3.2 ^[2, 5, 10] 如果 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 中两个不同的同类型 (或不同类型) 的极大集且 $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$, 则 $|\mathcal{M} \cap \mathcal{N}| = 1$ (或 $|\mathcal{M} \cap \mathcal{N}| = |\mathbb{D}| \geq 2$).

引理 3.2 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 为 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 中两个不同的极大集且 $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$, 则

(1) 如果 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是不同类型的, 则对任意矩阵 $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$, 存在 $P \in GL_m(\mathbb{D})$ 和 $Q \in GL_n(\mathbb{D})$ 使得 $\mathcal{M} = PM_1Q + A = PM_1 + A$, $\mathcal{N} = PN_1Q + A = N_1Q + A$;

(2) 如果 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 都是类型一 (或类型二) 的, 则存在一个可逆矩阵 P (或 Q) 使得 $\mathcal{M} = P\mathcal{M}_1 + A$, $\mathcal{N} = P\mathcal{M}_2 + A$ (或 $\mathcal{M} = \mathcal{N}_1Q + A$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}_2Q + A$), 其中 $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{A\}$.

证明 (1) 由引理 1.1 知, (1) 显然成立.

(2) 假设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 都是类型一的极大集且 $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$. 由推论 3.2 可得 $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{A\}$. 由引理 1.1 可知, 存在 $P_1, P_2 \in GL_m(\mathbb{D})$ 使得 $\mathcal{M} = P_1\mathcal{M}_1 + A$, $\mathcal{N} = P_2\mathcal{M}_1 + A$. 令 $Q_1 = P_1^{-1}P_2$, 则 $\mathcal{N} = P_1Q_1\mathcal{M}_1 + A$. 因为 $\mathcal{M} \neq \mathcal{N}$, 所以, $\mathcal{M}_1 \neq Q_1\mathcal{M}_1$. 显然,

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{D}^n \right\}, \quad Q_1\mathcal{M}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} q_1x \\ \vdots \\ q_mx \end{pmatrix} : x \in \mathbb{D}^n \right\},$$

其中 $(q_1, \dots, q_m)^T \in {}^m\mathbb{D}$ 且 $(q_2, \dots, q_m)^T \neq 0$. 因此, 存在 $Q_2 \in GL_m(\mathbb{D})$ 使得 $Q_2Q_1\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$, $Q_2\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1$. 令 $P = P_1Q_2^{-1}$, 则有 $\mathcal{M} = P\mathcal{M}_1 + A$, $\mathcal{N} = P\mathcal{M}_2 + A$.

类似地, 若 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 都是类型二的极大集且 $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{A\}$, 则存在一个可逆矩阵 Q 使得 $\mathcal{M} = \mathcal{N}_1Q + A$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}_2Q + A$. $\square$

现在简介仿射几何的概念. 设 V 是 $\mathbb{D}^n$ 的一个 r -维左向量空间且 $a \in \mathbb{D}^n$, 则称 $V+a$ 为一个 $\mathbb{D}$ 上 r -维左仿射平面 (简称平面). 当 $r \geq 2$ 时, $V+a$ 中所有平面的集合称为关于 $V+a$ 的左仿射几何, 记作 $AG(V+a)$, 其维数为 $r := \dim(AG(V+a))$. $AG(V+a)$ 中维数为 0、1 和 2 的平面分别称为点、线和面. 类似地, 可定义右仿射几何. 关于仿射几何的一般公理化定义可参见文献 [20, 21].

在左或右仿射几何中, 两个平面 M_1 与 M_2 的联 (记作 $M_1 \vee M_2$) 是同时包含 M_1 和 M_2 的维数最小的平面. $M_1 \vee M_2$ 也是同时包含 M_1 和 M_2 的所有平面的交集. 因此, 仿射几何中的一条线 ℓ 可表示为 $\ell = b \vee c$, 其中 $b, c \in V$ 为两个不同的点.

设 $\mathcal{M} = P\mathcal{M}_1 + A$ 为 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 中类型一的极大集, 其中 $P \in GL_m(\mathbb{D})$, $A \in \mathbb{D}^{m \times n}$, 则存在一个左仿射几何 $AG(P\mathcal{M}_1 + A)$ 使得 $AG(P\mathcal{M}_1 + A)$ 和 $AG(\mathbb{D}^n)$ 仿射同构. 类似地, 右仿射几何 $AG(\mathcal{N}_1Q + A)$ 和 $AG({}^m\mathbb{D})$ 是仿射同构的. 在 $AG(P\mathcal{M}_1 + A)$ 中, 一条线 ℓ 的参数方程有如下形式:

$$\ell = P \begin{pmatrix} \mathbb{D}\alpha + \beta \\ 0 \end{pmatrix} + A, \quad \text{其中 } \alpha, \beta \in \mathbb{D}^n \text{ 且 } \alpha \neq 0.$$

引理 3.3^[2] 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 中的一个极大集, 则 ℓ 是 $AG(\mathcal{M})$ 中的一条线当且仅当 $\ell = \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$, 其中 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是两个不同类型的极大集且 $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$. 而且, $|\ell| = |\mathcal{M} \cap \mathcal{N}| = |\mathbb{D}|$.

引理 3.4 设 $m, n, m', n' \geq 2$ 是整数, $\varphi: \mathbb{D}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 是非退化的图同态且 $\varphi(0) = 0$, 则

(1) 如果 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 中包含 0 的类型一 (或类型二) 的极大集且 $\varphi(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}'$, 其中 $\mathcal{M}'$ 是 $\mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 中的极大集, 则对任意 $A \in \mathcal{M}$, 存在类型一 (或类型二) 的极大集 $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{D}^{m \times n}$, 使得 $\varphi(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}'$ 且 $\mathcal{R} \cap \mathcal{M} = \{A\}$, 其中 $\mathcal{R}'$ 和 $\mathcal{M}'$ 是 $\mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 中两个同类型的不同的极大集;

(2) 如果 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 中两个同类型 (或不同类型) 的不同的极大集, $0 \in \mathcal{M}$ 且 $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$, 则存在 $\mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 中的两个同类型 (或不同类型) 的极大集 $\mathcal{M}'$ 和 $\mathcal{N}'$, 使得 $\varphi(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}'$ 且 $\varphi(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}'$;

(3) 如果 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 中的包含 0 的极大集且 $\varphi(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}'$, 其中 $\mathcal{M}'$ 是 $\mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 中的极大集, 则 $\mathcal{M}'$ 是唯一的包含 $\varphi(\mathcal{M})$ 的极大集, 并且 $\varphi(\mathcal{M})$ 不包含在 $AG(\mathcal{M}')$ 中的任一条线之中.

证明 (1) 设 $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{D}^{m \times n}$ 是包含 0 的类型一 (或类型二) 的极大集且 $\varphi(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}'$, 其中 $\mathcal{M}' \subseteq \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 是极大集. 不失一般性, 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$ 都是类型一的.

设 $A \in \mathcal{M}$, 则 $A \in \mathbb{D}_{\leq 1}^{m \times n}$. 由引理 1.1 知, $\mathcal{M} = P\mathcal{M}_1 + A$, 其中 $P \in GL_m(\mathbb{D})$. 存在一个包含 A 的类型一的极大集 $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{D}^{m \times n}$ 使得 $\mathcal{R} \neq \mathcal{M}$, $\varphi(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}'$, 其中 $\mathcal{R}' \subseteq \mathbb{D}^{m' \times n'}$ 是极大集且 $\mathcal{R}' \neq \mathcal{M}'$. 否则, 对包含 A 的任意类型一的极大集 $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{D}^{m \times n}$, 有 $\varphi(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{M}'$. 因为 $\mathbb{D}_{\leq 1}^{m \times n} + A$ 中每个矩阵必属于某个包含 A 的类型一的极大集, 所以必有 $\varphi(\mathbb{D}_{\leq 1}^{m \times n} + A) \subseteq \mathcal{M}'$. 这与 φ 非退化矛盾.

下面证明 $\mathcal{R}'$ 是类型一的极大集. 假设 $\mathcal{R}'$ 是类型二的. 设 $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{D}^{m \times n}$ 是一个包含 A 的类型二的极大集且 $\varphi(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}'$, 其中 $\mathcal{N}'$ 是 $\mathbb{D}^{m' \times n'}$ 中的一个极大集. 由推论 3.2 可得 $|\mathcal{N} \cap \mathcal{R}| \geq 2$ 和 $|\mathcal{N} \cap \mathcal{M}| \geq 2$, 从而, $|\mathcal{N}' \cap \mathcal{R}'| \geq 2$ 和 $|\mathcal{N}' \cap \mathcal{M}'| \geq 2$. 再次应用推论 3.2, 有 $\mathcal{N}' = \mathcal{R}'$ 或 $\mathcal{N}' = \mathcal{M}'$. 因此, $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{M}' \cup \mathcal{R}'$. 由此可知, 对于 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 中任意一个包含 A 的类型二的极大集 $\mathcal{N}$ 必有 $\varphi(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{M}' \cup \mathcal{R}'$. 因为 $\mathbb{D}_{\leq 1}^{m \times n} + A$ 中每个矩阵必属于某个包含 A 的类型二的极大集, 所以, $\varphi(\mathbb{D}_{\leq 1}^{m \times n} + A) \subseteq \mathcal{M}' \cup \mathcal{R}'$. 这与 φ 非退化矛盾. 因此, $\mathcal{R}'$ 是类型一的极大集.

(2) 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是 $\mathbb{D}^{m \times n}$ 中两个同类型 (或不同类型) 的不同的极大集, $0 \in \mathcal{M}$ 且 $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$, 则存在极大集 $\mathcal{M}', \mathcal{N}' \subseteq \mathbb{D}^{m' \times n'}$ 使得 $\varphi(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}'$, $\varphi(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}'$. 不失一般性, 假设 $\mathcal{M}$ 是类型一的. 取 $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$. 由 $0 \in \mathcal{M}$ 可得 $A \in \mathbb{D}_{\leq 1}^{m \times n}$. 下面证明 $\mathcal{M}'$ 和 $\mathcal{N}'$ 是同类型 (或不同类型) 的.

情形 1 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是同类型的极大集, 即类型一的.

由 (1) 和引理 1.1 可知, 存在两个类型二的不同的极大集 $\mathcal{L}, \mathcal{T} \subseteq \mathbb{D}^{m \times n}$ 使得 $0 \in \mathcal{L}$, $\mathcal{L} \cap \mathcal{T} = \{A\}$, $\varphi(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}'$ 且 $\varphi(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}'$, 其中 $\mathcal{L}'$ 和 $\mathcal{T}'$ 为同类型的不同的极大集. 因为 $|\mathcal{N} \cap \mathcal{L}| \geq 2$ 和 $|\mathcal{N} \cap \mathcal{T}| \geq 2$, 所以, $|\mathcal{N}' \cap \mathcal{L}'| \geq 2$ 和 $|\mathcal{N}' \cap \mathcal{T}'| \geq 2$. 由 $\mathcal{L}' \neq \mathcal{T}'$ 和推论 3.2 可知, $\mathcal{N}'$ 和 $\mathcal{L}'$ 是不同类型的极大集. 类似可证, $\mathcal{M}'$ 和 $\mathcal{L}'$ 是不同类型的极大集. 因此, $\mathcal{M}'$ 和 $\mathcal{N}'$ 是同类型的.

情形 2 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是不同类型的极大集.

显然, $\mathcal{N}$ 是类型二的极大集. 由 (1) 可知, 存在一个包含 A 的类型一的极大集 $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{D}^{m \times n}$, 使得 $\varphi(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}'$, $\mathcal{R} \neq \mathcal{M}$, 其中 $\mathcal{R}'$ 和 $\mathcal{M}'$ 是同类型的不同的极大集. 因为 $|\mathcal{N} \cap \mathcal{R}| \geq 2$ 和 $|\mathcal{N} \cap \mathcal{M}| \geq 2$, 所以, $|\mathcal{N}' \cap \mathcal{R}'| \geq 2$ 和 $|\mathcal{N}' \cap \mathcal{M}'| \geq 2$. 由推论 3.2 可得 $\mathcal{N}'$ 和 $\mathcal{M}'$ 是不同类型的极大集.

由情形 1 和 2 知 (2) 成立.

(3) 设 $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{D}^{m \times n}$ 是包含 0 的极大集且 $\varphi(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}'$, 其中 $\mathcal{M}' \subseteq \mathbb{D}^{m' \times n'}$ 为极大集. 不失一般性, 假设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$ 都是类型一的. 由 (1) 和引理 1.1 知, 存在两个不同的类型二的极大集 $\mathcal{L}, \mathcal{T} \subseteq \mathbb{D}^{m \times n}$, 使得 $\mathcal{M} \cap \mathcal{L} \cap \mathcal{T} = \{0\}$, $\varphi(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}'$ 且 $\varphi(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}'$, 其中 $\mathcal{L}'$ 和 $\mathcal{T}'$ 为同类型的不同的极大集.

因为 $|\mathcal{M} \cap \mathcal{L}| \geq 2$ 和 $|\mathcal{M} \cap \mathcal{T}| \geq 2$, 所以, $|\mathcal{M}' \cap \mathcal{L}'| \geq 2$ 和 $|\mathcal{M}' \cap \mathcal{T}'| \geq 2$. 故由推论 3.2 可得 $\mathcal{L}'$ 和 $\mathcal{T}'$ 都是类型二的极大集. 由引理 3.3 可知, $\ell_1 := \mathcal{M} \cap \mathcal{L}$ 和 $\ell_2 := \mathcal{M} \cap \mathcal{T}$ 为 $\text{AG}(\mathcal{M})$ 中的两条线; $\ell'_1 := \mathcal{M}' \cap \mathcal{L}'$ 和 $\ell'_2 := \mathcal{M}' \cap \mathcal{T}'$ 为 $\text{AG}(\mathcal{M}')$ 中的两条线. 显然, $\varphi(\ell_i) \subseteq \ell'_i$, $i = 1, 2$, $\ell'_1 \neq \ell'_2$. 因为两条不同的线最多有一个交点, 所以, $\varphi(\mathcal{M})$ 不包含在 $\text{AG}(\mathcal{M}')$ 中的任一条线之中. 由引理 3.3 和推论 3.2 可知, $\mathcal{M}'$ 是包含 $\varphi(\mathcal{M})$ 的唯一的极大集. $\square$

设 V 是 $\mathbb{D}$ 上左向量空间, V' 是 $\mathbb{D}'$ 上左 (或右) 向量空间. 一个映射 $f: V \rightarrow V'$ 称为半仿射映射, 如果存在从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}'$ 的环同态 τ (或环反同态 σ) 使得 $f(\alpha x + \beta y + \gamma z) = \alpha^\tau f(x) + \beta^\tau f(y) + \gamma^\tau f(z)$ (或 $f(\alpha x + \beta y + \gamma z) = f(x)\alpha^\sigma + f(y)\beta^\sigma + f(z)\gamma^\sigma$) 对任取的 $x, y, z \in V$ 和所有满足 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ 的 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{D}$ 都成立 (参见文献 [21, 定义 12.5.1]). 类似地, 对于体上两个右向量空间, 或者一个左向量空间和一个右向量空间, 我们可类似定义半仿射映射.

设 V 和 V' 分别是 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 上两个左 (或右) 向量空间. 一个加法映射 $f: V \rightarrow V'$ 称为半线性映射, 如果存在从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}'$ 的环同态 τ 使得对任取的 $x \in V$ 和 $\lambda \in \mathbb{D}$ 有 $f(\lambda x) = \lambda^\tau f(x)$ (或 $f(x\lambda) = f(x)\lambda^\tau$). 类似地, 对于 $\mathbb{D}$ 上左 (或右) 向量空间 V 以及 $\mathbb{D}'$ 上右 (或左) 向量空间 V' , 我们可

定义从 V 到 V' 的半线性映射.

注 3.1 设 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 是两个体, n 和 m 是正整数且 $n \geq 2$, 则

(1) 如果 $V = \mathbb{D}^n$, $V' = \mathbb{D}^m$ (或 $V = {}^n\mathbb{D}$, $V' = {}^m\mathbb{D}$), $f: V \rightarrow V'$ 是一个半线性映射, 则 $f(x) = x^\tau P$ (或 $f(x) = Qx^\tau$), $x \in V$, 其中 τ 是从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}'$ 的环同态, $P \in \mathbb{D}'^{n \times m}$ (或 $Q \in \mathbb{D}'^{m \times n}$) 是固定的;

(2) 如果 $V = \mathbb{D}^n$, $V' = {}^m\mathbb{D}$ (或 $V = {}^n\mathbb{D}$, $V' = \mathbb{D}^m$), $f: V \rightarrow V'$ 是一个半线性映射, 则 $f(x) = Px^{\sigma T}$ (或 $f(x) = x^{\sigma T}Q$), $x \in V$, 其中 σ 是从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}'$ 的环反同态, $P \in \mathbb{D}'^{m \times n}$ (或 $Q \in \mathbb{D}'^{n \times m}$) 是固定的.

引理 3.5 (参见文献 [21, 命题 12.5.2]) 设 V 和 V' 分别为体 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 上的左或右向量空间, $f: V \rightarrow V'$ 是一个映射, 则 f 是半仿射映射当且仅当 $g(x) := f(x) - f(0)$ 是半线性映射.

设 V 和 V' 是体上维数 ≥ 2 的左或右向量空间. 一个映射 $f: V \rightarrow V'$ 称为仿射映射, 如果 $a \in b \vee c$ 推出 $f(a) \in f(b) \vee f(c)$, 对所有的 $a, b, c \in V$ 成立 (即 f 将线映到线). 一个仿射映射称为非退化的, 如果它的像不包含在 $\text{AG}(V')$ 中的任一条线之中.

下面是加权半仿射映射的一个简化的定义 (参见文献 [21, 定义 12.5.6]).

设 V 是体 $\mathbb{D}$ 上左向量空间, V' 是体 $\mathbb{D}'$ 上左 (或右) 向量空间, 且 $\dim(V) \geq 2$ 和 $\dim(V') \geq 2$. 一个映射 $g: V \rightarrow V'$ 称为加权半仿射映射, 如果存在一个半仿射映射 $(k, h): V \rightarrow \mathbb{D}' \times V'$ (或 $(h, k): V \rightarrow V' \times \mathbb{D}'$), 使得对所有的 $x \in V$ 有 $k(x) \neq 0$ 且

$$g(x) = (k(x))^{-1}h(x) \quad (\text{或 } g(x) = h(x)(k(x))^{-1}), \quad x \in V, \quad (3.1)$$

其中 h 是从 V 到 V' 的半仿射映射, k 是从 V 到 $\mathbb{D}'$ 的半仿射映射. 注意在 (k, h) (或 (h, k)) 中, 半仿射映射 h 和 k 的相伴的从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}'$ 的环同态 (或环反同态) 是相同的.

类似地, 对于体上两个右向量空间, 或一个右向量空间和一个左向量空间, 可以定义两个向量空间之间的加权半仿射映射. 每个加权半仿射映射是一个仿射映射 (参见文献 [21, 命题 12.5.7]).

引理 3.6 设 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 是两个体, $m, n \geq 2$ 为整数, 则

(1) 如果 $V = \mathbb{D}^n$, $V' = \mathbb{D}'^m$ (或 $V = {}^n\mathbb{D}$, $V' = {}^m\mathbb{D}'$), $g: V \rightarrow V'$ 是一个加权半仿射映射且 $g(0) = 0$, 那么,

$$g(x) = (k(x))^{-1}x^\tau P \quad (\text{或 } g(x) = Qx^\tau(k'(x))^{-1}), \quad x \in V,$$

其中 τ 是从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}'$ 的环同态, $P \in \mathbb{D}'^{m \times n}$ (或 $Q \in \mathbb{D}'^{n \times m}$), $k(x) = \sum_{i=1}^n x_i^\tau a_i + b$ 且 $k(x) \neq 0$ 对所有的 $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$ (或 $k'(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^\tau + b$, $k'(x) \neq 0$ 对所有的 $x = (x_1, \dots, x_n)^\tau \in V$) 成立;

(2) 如果 $V = \mathbb{D}^n$, $V' = {}^m\mathbb{D}'$ (或 $V = {}^n\mathbb{D}$, $V' = \mathbb{D}'^m$), $g: V \rightarrow V'$ 是一个加权半仿射映射且 $g(0) = 0$, 那么,

$$g(x) = Px^{\sigma T}(k(x))^{-1} \quad (\text{或 } g(x) = (k'(x))^{-1}x^{\sigma T}Q), \quad x \in V,$$

其中 σ 是从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}'$ 的环反同态, $P \in \mathbb{D}'^{m \times n}$ (或 $Q \in \mathbb{D}'^{n \times m}$), $k(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^\sigma + b$ 且 $k(x) \neq 0$ 对所有的 $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$ (或 $k'(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^\sigma + b$, $k'(x) \neq 0$ 对所有的 $x = (x_1, \dots, x_n)^\tau \in V$) 成立.

证明 (1) 设 $V = \mathbb{D}^n$, $V' = \mathbb{D}'^m$, $g: V \rightarrow V'$ 是一个加权半仿射映射且 $g(0) = 0$. 由加权半仿射映射的定义可知, 存在半仿射映射 $(k, h): V \rightarrow \mathbb{D}' \times V'$, 使得 $k(x) \neq 0$ 且 $g(x) = (k(x))^{-1}h(x)$, $x \in V$, 其中 h 是从 V 到 V' 的半仿射映射, k 是从 V 到 $\mathbb{D}'$ 的半仿射映射. 设 $\tau: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}'$ 是与 (k, h) 相伴的环同态.

由引理 3.5 知, $k'(x) := k(x) - k(0)$ 是从 $\mathbb{D}^n$ 到 $\mathbb{D}'$ 的半线性映射, 且 $h'(x) := h(x) - h(0)$ 是从 $\mathbb{D}^n$ 到 $\mathbb{D}'^m$ 的半线性映射. 由 $g(0) = 0$ 可得 $h(0) = 0$. 从而, $h(x) = h'(x)$ 为半线性映射. 设 e_i 为 I_n 的第 i

($i = 1, \dots, n$) 行. 对任意 $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$ (其中 $x_i \in \mathbb{D}$), 有 $k'(x) = k'(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i^T k'(e_i)$. 因此, $k(x) = \sum_{i=1}^n x_i^T k'(e_i) + k(0)$. 设 $a_i = k'(e_i)$, $b = k(0)$, 则 $k(x) = \sum_{i=1}^n x_i^T a_i + b$. 由注 3.1 可知, $h(x) = x^T P$, 其中 $P \in \mathbb{D}^{n \times m}$ 是固定的. 由此可知, $g(x) = (k(x))^{-1} x^T P$, $x \in V$.

对于 $V = {}^n\mathbb{D}$, $V' = {}^m\mathbb{D}'$, 类似可证 $g(x) = Qx^T(k'(x))^{-1}$ ($x \in V$), 其中 $Q \in \mathbb{D}'^{m \times n}$ 是固定的, $k'(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^T + b$ 且 $k'(x) \neq 0$ 对所有的 $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in V$ 成立.

(2) 类似可证明. $\square$

我们有如下的向量空间的仿射几何基本定理.

定理 3.1 (参见文献 [21, 定理 12.6.7]) 设 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 是两个体且 $|\mathbb{D}| \geq 4$. 假设 V 和 V' 分别为 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 上维数 ≥ 2 的左或右向量空间, 则每个非退化的仿射态射 $f: V \rightarrow V'$ 是加权半仿射映射.

设 $\varphi: \mathbb{D}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 是一个图同态且 $\varphi(0) = 0$. 如果 $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{D}^{m \times n}$ 是包含 0 的类型一的极大集且 $\varphi(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}'$, 其中 $\mathcal{M}' \subseteq \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 是包含 0 的类型一的极大集, 则存在 $P \in GL_m(\mathbb{D})$ 和 $P' \in GL_{m'}(\mathbb{D}')$, 使得 $\mathcal{M} = PM_1$, $\mathcal{M}' = P'M'_1$. 设

$$\varphi \left(P \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right) = P' \begin{pmatrix} x^\rho \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{D}^n,$$

其中 $\rho: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}'$ 为单射, $0^\rho = 0$, 则限制映射 $\varphi|_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ 诱导出一个映射 $\varphi'(x) = x^\rho$, $x \in \mathbb{D}^n$. 如果 φ' 是一个加权半仿射映射 (或非退化的仿射态射), 则这个限制映射 $\varphi|_{\mathcal{M}}$ 称为一个加权半仿射映射 (或非退化的仿射态射).

类似地, 若 $\varphi(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{N}'$, 其中 $\mathcal{N}'$ 是包含 0 的类型二的极大集, 或者 $\mathcal{M}$ 是包含 0 的类型二的极大集, 对于限制映射 $\varphi|_{\mathcal{M}}$, 我们可类似定义加权半仿射映射 (或非退化的仿射态射).

引理 3.7 设 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 是两个体, $|\mathbb{D}| \geq 4$, $m, n, m', n' \geq 2$ 是整数, $\varphi: \mathbb{D}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 是非退化的图同态且 $\varphi(0) = 0$. 设 $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{D}^{m \times n}$ 是包含 0 的极大集且 $\varphi(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}'$, 其中 $\mathcal{M}' \subseteq \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 是包含 0 的极大集, 则限制映射 $\varphi|_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ 是一个单的加权半仿射映射. 若 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{D}^{m \times n}$ 是一个包含 0 的邻接集且 $|\mathcal{S}| \geq 2$, 则 $\dim(\varphi(\mathcal{S})) \leq \dim(\mathcal{S})$.

证明 不失一般性, 假设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$ 都是类型一的极大集. 设 ℓ 是 $\text{AG}(\mathcal{M})$ 中的一条线. 由引理 3.3 可知, $\ell = \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$, 其中 $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{D}^{m \times n}$ 是类型二的极大集. 由引理 3.4(2) 知, 存在一个类型二的极大集 $\mathcal{N}' \subseteq \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 使得 $\varphi(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}'$ 且 $|\mathcal{M}' \cap \mathcal{N}'| \geq 2$. 因此, 由引理 3.3 可得 $\ell' = \mathcal{M}' \cap \mathcal{N}'$ 是 $\text{AG}(\mathcal{M}')$ 的一条线且 $\varphi(\ell) \subseteq \ell'$. 从而, φ 将 $\text{AG}(\mathcal{M})$ 中的线映到 $\text{AG}(\mathcal{M}')$ 中的线. 由引理 3.4(3) 可知, $\varphi(\mathcal{M})$ 不包含在 $\text{AG}(\mathcal{M}')$ 中的任一条线之中. 因此, 限制映射 $\varphi|_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ 为非退化的仿射态射. 由定理 3.1 知 $\varphi|_{\mathcal{M}}$ 为加权半仿射映射. 显然, $\varphi|_{\mathcal{M}}$ 是单射.

设 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{D}^{m \times n}$ 是一个包含 0 的邻接集且 $|\mathcal{S}| \geq 2$. 由引理 1.1 可知, $\mathcal{S} \subseteq PM_1$ 或 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{N}_1 Q$, 其中 $P \in GL_m(\mathbb{D})$, $Q \in GL_n(\mathbb{D})$. 因此, $\varphi(\mathcal{S}) \subseteq \varphi(PM_1)$ 或 $\varphi(\mathcal{S}) \subseteq \varphi(\mathcal{N}_1 Q)$. 不失一般性, 假设 $\varphi(\mathcal{S}) \subseteq \varphi(PM_1)$ 且 $\varphi(PM_1) \subseteq P'M'_1$, 其中 $P' \in GL_{m'}(\mathbb{D}')$, 则由上面的结果可知, 映射 $\varphi|_{PM_1}: PM_1 \rightarrow P'M'_1$ 是加权半仿射映射. 故由引理 3.6 可知, 映射 $\varphi|_{PM_1}$ 有如下形式:

$$\varphi \left(P \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right) = P' \begin{pmatrix} (k(x))^{-1} x^\tau T \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{D}^n,$$

其中 $\tau: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}'$ 为非零的环同态, $T \in \mathbb{D}'^{n \times n'}$, 且 $k(x) = \sum_{j=1}^n x_{1j}^\tau a_{j1} + b \neq 0$ 对所有的 $x = (x_{11}, \dots, x_{1n}) \in \mathbb{D}^n$ 成立. 因此, 不难看出 $\dim(\varphi(\mathcal{S})) \leq \dim(\mathcal{S})$ 成立. $\square$

4 Grassmann 空间与相关的引理

设 $n \geq 3$ 是整数, $\mathcal{P}(\mathbb{D}^n)$ (或 $\mathcal{P}(^n\mathbb{D})$) 是关于 $\mathbb{D}^n$ (或 $^n\mathbb{D}$) 的 $(n-1)$ - 维左 (或右) 射影几何. 在 $\mathcal{P}(\mathbb{D}^n)$ (或 $\mathcal{P}(^n\mathbb{D})$) 中, 一个 $(r+1)$ - 维向量空间 $W := [v_1, \dots, v_{r+1}]$ 称为一个 r - 维射影平面 (简称 r - 平面), 其中 $\{v_1, \dots, v_{r+1}\}$ 为 W 的一组基. 称矩阵

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{r+1} \end{pmatrix} \quad (\text{或 } (v_1, \dots, v_{r+1}))$$

为 W 的一个矩阵表示, 为简明起见仍记作 W . 注意一个 r - 平面的矩阵表示不是唯一的.

设 $n, m \geq 2$, $\mathcal{P}(\mathbb{D}^{m+n})$ (或 $\mathcal{P}(^{m+n}\mathbb{D})$) 中所有 $(m-1)$ - 维平面的集合称为 $\mathbb{D}$ 上 $(m-1)$ - 维左 (或右) Grassmann 空间, 记作 $\mathcal{G}_{m+n-1, m-1}^l(\mathbb{D})$ (或 $\mathcal{G}_{m+n-1, m-1}^r(\mathbb{D})$). Grassmann 空间中的 $(m-1)$ - 维平面称为点. 两个秩为 m 的 $m \times (m+n)$ 矩阵 (或 $(m+n) \times m$ 矩阵) W 和 W' 为 $\mathcal{G}_{m+n-1, m-1}^l(\mathbb{D})$ (或 $\mathcal{G}_{m+n-1, m-1}^r(\mathbb{D})$) 中同一个点的两个矩阵表示当且仅当存在 $G \in GL_m(\mathbb{D})$ 使得 $W' = GW$ (或 $W' = WG$).

在 Grassmann 空间 $\mathcal{G}_{m+n-1, m-1}^l(\mathbb{D})$ (或 $\mathcal{G}_{m+n-1, m-1}^r(\mathbb{D})$) 中, 如果点 W_1 和 W_2 满足条件: $W_1 \cap W_2$ 是一个 $(m-r-1)$ - 平面, 则称 W_1 和 W_2 的算术距离为 r , 记作 $\text{ad}(W_1, W_2) = r$. 若 $\text{ad}(W_1, W_2) = 1$, 则称点 W_1 与 W_2 邻接. 对于点 W_1 和 W_2 的矩阵表示, 有 (参见文献 [2, 10])

$$\text{ad}(W_1, W_2) = \text{rank} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} - m \quad (\text{或 } \text{ad}(W_1, W_2) = \text{rank}(W_1, W_2) - m). \quad (4.1)$$

体 $\mathbb{D}$ 上阶为 $m+n$ 的射影一般线性群是 $PGL_{m+n}(\mathbb{D}) = GL_{m+n}(\mathbb{D})/Z_{m+n}$, 其中 Z 是 $\mathbb{D}$ 的中心, $Z_{m+n} = \{\lambda I_{m+n} : \lambda \in Z^*\}$. $PGL_{m+n}(\mathbb{D})$ 可看成为 $\mathcal{G}_{m+n-1, m-1}^l(\mathbb{D})$ (或 $\mathcal{G}_{m+n-1, m-1}^r(\mathbb{D})$) 的变换群, 并且这个群的每个元素都保持 Grassmann 空间中两点之间的算术距离.

设 $m, n \geq 2$, k 和 r 是整数且 $1 \leq r \leq k \leq \max\{m, n\}$. 定义下列记号:

(1) 用 $\mathcal{M}_{k,r}(\mathbb{D}^{m \times n})$ 表示 $\mathbb{D}_r^{m \times n}$ 中恰有 k 个非零行的矩阵集合. 记 $\alpha = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, 其中 $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$. 用 $\mathcal{M}_{k,r}^\alpha(\mathbb{D}^{m \times n})$ 表示 $\mathbb{D}_r^{m \times n}$ 中恰有 k 个非零行是第 $i_1, i_2, \dots, i_k$ 行的矩阵集合.

(2) 用 $\mathcal{N}_{k,r}(\mathbb{D}^{m \times n})$ 表示 $\mathbb{D}_r^{m \times n}$ 中恰有 k 个非零列的矩阵集合. 记 $\beta = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$, 其中 $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$. 用 $\mathcal{N}_{k,r}^\beta(\mathbb{D}^{m \times n})$ 表示 $\mathbb{D}_r^{m \times n}$ 中恰有 k 个非零列是第 $j_1, j_2, \dots, j_k$ 列的矩阵的集合.

为了证明主要结论, 我们需要下面的引理 (当 $m = n$ 时参见文献 [15]).

引理 4.1 设 $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{D}$ 是两个体, $|\mathbb{E}| > 2$, $m, n \geq k \geq 2$ 是整数. 设 (X, Y) 是 $\mathcal{G}_{m+n-1, m-1}^l(\mathbb{D})$ 中一个点的矩阵表示, 其中 $X \in \mathbb{D}^{m \times m}$, $Y \in \mathbb{D}^{m \times n}$. 进一步, 设 $A \in \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{E}^{m \times n})$ 且 $\text{ad}((X, Y), (I_m, B)) = 1$, $\forall B \in \mathcal{M}_{k-1, k-1}(\mathbb{E}^{m \times n})$ 且满足 $\text{rank}(B - A) = 1$, 则 X 可逆. 当 $k \geq 3$ 时 $Y = XA$; 当 $k = 2$ 时, $Y = XA$ 或 $Y = 0$.

证明 步 1 由体上矩阵论知, 存在 $\mathbb{E}$ 上置换矩阵 P 与可逆阵 Q 使得 $PAQ = \text{diag}(I_k, 0)$. 设 $B \in \mathcal{M}_{k-1, k-1}(\mathbb{E}^{m \times n})$, 则 $B \sim A$ 当且仅当 $PBQ \sim PAQ$ 并且 $PBQ \in \mathcal{M}_{k-1, k-1}(\mathbb{E}^{m \times n})$. 由 (4.1) 知, $\text{ad}((X, Y), (I_m, B)) = 1$ 当且仅当 $\text{ad}((PXP^{-1}, PYQ), (I_m, PBQ)) = 1$. 而且, $Y = XA$ 当且仅当 $PYQ = (PXP^{-1})(PAQ)$. 因此, 不失一般性, 设 $A = \text{diag}(I_k, 0)$.

因为对任意满足 $B \sim A$ 的矩阵 $B \in \mathcal{M}_{k-1,k-1}(\mathbb{E}^{m \times n})$ 都有 $\text{ad}((X, Y), (I_m, B)) = 1$, 所以, 由 (4.1) 可知,

$$\text{rank} \begin{pmatrix} X & Y \\ I_m & B \end{pmatrix} - m = 1,$$

从而有

$$Y - XB \sim 0, \quad \forall B \in \mathcal{M}_{k-1,k-1}(\mathbb{E}^{m \times n}) \text{ 且满足 } B \sim A. \quad (4.2)$$

因此, 对每个满足 $B \sim A$ 的矩阵 $B \in \mathcal{M}_{k-1,k-1}(\mathbb{E}^{m \times n})$, 有

$$m = \text{rank}(X, Y) = \text{rank}(X, Y - XB) \leq \text{rank}(X) + \text{rank}(Y - XB),$$

故由 (4.2) 可得 $\text{rank}(X) \geq m - 1$.

我们仅证明 $2 \leq k < m$ 的情形, $k = m$ 的情形类似可证. 以下设 $2 \leq k < m$. 记 $X = (X_1, X_2)$, 其中 $X_1 \in \mathbb{D}^{m \times k}$, $X_2 \in \mathbb{D}^{m \times (m-k)}$. 由 $k \geq 2$ 可知 $X_1 \neq 0$. 设 $s = \text{rank}(X_1)$, 其中 $1 \leq s \leq k$, 则存在 $P_1 \in GL_m(\mathbb{D})$ 使得

$$X_1 = P_1 \begin{pmatrix} X_{11} \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中 $X_{11} \in \mathbb{D}_s^{s \times k}$. 不失一般性, 设 $P_1 = I_m$, 则

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{pmatrix} = X_2.$$

对每个满足 $B \sim A = \text{diag}(I_k, 0)$ 的矩阵 $B \in \mathcal{M}_{k-1,k-1}(\mathbb{E}^{m \times n})$, 有 $B = \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 $C \in \mathcal{M}_{k-1,k-1}(\mathbb{E}^{k \times n})$ 且 $C \sim (I_k, 0)$. 记

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix},$$

其中 $Y_1 \in \mathbb{D}^{s \times n}$, $Y_2 \in \mathbb{D}^{(m-s) \times n}$, 则由 (4.2) 可推出

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} X_{11}C \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall C \in \mathcal{M}_{k-1,k-1}(\mathbb{E}^{k \times n}) \text{ 且满足 } C \sim (I_k, 0). \quad (4.3)$$

对任意矩阵 $Z, W \in \mathbb{E}^{(k-1) \times 1}$, 令

$$C_Z = \begin{pmatrix} I_{k-1} & Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C'_W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ W & I_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k-1,k-1}(\mathbb{E}^{k \times n}).$$

记 $X_{11} = (x_{ij})_{s \times k}$, $Z = (z_1, \dots, z_{k-1})^T$, $W = (w_2, \dots, w_k)^T$, 则有

$$X_{11}C_Z = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1,k-1} & \sum_{j=1}^{k-1} x_{1j}z_j & 0 & \dots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2,k-1} & \sum_{j=1}^{k-1} x_{2j}z_j & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{s,k-1} & \sum_{j=1}^{k-1} x_{sj}z_j & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_{11}C'_W = \begin{pmatrix} \sum_{j=2}^k x_{1j}w_j & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \sum_{j=2}^k x_{2j}w_j & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=2}^k x_{sj}w_j & x_{s2} & x_{s3} & \dots & x_{sk} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $C_Z \sim (I_k, 0)$ 和 $C'_W \sim (I_k, 0)$, 由 (4.3) 可得

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} X_{11}C_Z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} X_{11}C'_W \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z, W \in \mathbb{E}^{(k-1) \times 1}. \quad (4.4)$$

步 2 首先用反证法证明 $X_{11}C_Z \neq 0$, $X_{11}C'_W \neq 0$, $\forall Z, W \in \mathbb{E}^{(k-1) \times 1}$. 假设 $X_{11}C_Z = 0$, 则由 $X_{11} \neq 0$ 可得

$$X_{11}C'_W = \begin{pmatrix} x_{1k}w_k & 0 & \dots & 0 & x_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ x_{2k}w_k & 0 & \dots & 0 & x_{2k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{sk}w_k & 0 & \dots & 0 & x_{sk} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad w_k \in \mathbb{E}.$$

由 (4.4) 显然有 $Y \sim 0$. 取不同的 w_k , 由 (4.4) 和引理 3.1 知 $Y_2 = 0$, 从而有 $\text{rank}(X_1, Y) = \text{rank}(X_{11}, Y_1) = s$. 因此, $m = \text{rank}(X, Y) \leq s + \text{rank}(X_2) \leq s + m - k$, 由此可知 $k \leq s$. 由 $k \geq s$ 可得 $k = s$. 因此, X_{11} 是可逆矩阵, 这与 $X_{11}C_Z = 0$ 矛盾. 因此, $X_{11}C_Z \neq 0$, $\forall Z \in \mathbb{E}^{(k-1) \times 1}$. 类似可证, $X_{11}C'_W \neq 0$, $\forall W \in \mathbb{E}^{(k-1) \times 1}$.

显然, 存在不同的 Z_i 和 $W_i \in \mathbb{E}^{(k-1) \times 1}$ ($i = 1, 2$) 使得 $X_{11}C_{Z_1} \neq X_{11}C_{Z_2}$ 且 $X_{11}C'_{W_1} \neq X_{11}C'_{W_2}$. 应用 (4.4) 和引理 3.1 易知 $Y_2 = 0$. 因此,

$$\text{rank}(X_1, Y) = \text{rank}(X_{11}, Y_1) = s.$$

由 $m = \text{rank}(X, Y) \leq s + \text{rank}(X_2) \leq s + m - k$ 可知, $k \leq s$, 从而, $k = s$. 由 $k = s$ 和 $Y_2 = 0$ 知,

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{21} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}$$

可逆. 不失一般性, 设 $X_{11} = I_k$. 因此, 由 (4.4) 和 $Y_2 = 0$ 可推出

$$Y_1 \sim C_Z, \quad Y_1 \sim C'_W, \quad \forall Z, W \in \mathbb{E}^{(k-1) \times 1}. \quad (4.5)$$

当 $k \geq 3$ 时, 应用 (4.5) 和引理 3.1, 不难证明 $Y = \text{diag}(I_k, 0) = A$, 从而, $Y = XA$. 当 $k = 2$ 时, 同理可知, $Y = XA$ 或 $Y = 0$. $\square$

引理 4.2 设 $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{D}$ 是两个体, $|\mathbb{E}| > 2$, m, n, k 和 r 是整数, $m \geq k > r \geq 1$ 且 $n > r$. 设 (X, Y) 是 $\mathcal{G}_{m+n-1, m-1}^l(\mathbb{D})$ 中一个点的矩阵表示, 其中 $X \in \mathbb{D}^{m \times m}$, $Y \in \mathbb{D}^{m \times n}$. 进一步, 假设 $A \in \mathcal{M}_{k, r}(\mathbb{E}^{m \times n})$ 且 $\text{ad}((X, Y), (I_m, B)) = 1, \forall B \in \mathcal{M}_{k, r+1}(\mathbb{E}^{m \times n})$ 且满足 $\text{rank}(B - A) = 1$, 则 X 可逆且 $Y = XA$.

证明 步 1 类似于引理 4.1 的证明, 不妨设

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k, r}(\mathbb{E}^{k \times n}),$$

其中 $A_2 \in \mathbb{E}^{(k-r) \times r}$ 没有零行.

因为

$$\text{ad}((X, Y), (I_m, B)) = \text{rank} \begin{pmatrix} X & Y \\ I_m & B \end{pmatrix} - m = 1, \quad \forall B \in \mathcal{M}_{k, r+1}(\mathbb{E}^{m \times n}) \quad \text{且} \quad B \sim A,$$

故有

$$Y - XB \sim 0, \quad \forall B \in \mathcal{M}_{k, r+1}(\mathbb{E}^{m \times n}) \quad \text{且} \quad B \sim A. \quad (4.6)$$

对 $\mathcal{M}_{k, r+1}(\mathbb{E}^{m \times n})$ 中满足 $B \sim A$ 的任意矩阵 B , 有

$$m = \text{rank}(X, Y) = \text{rank}(X, Y - XB) \leq \text{rank}(X) + \text{rank}(Y - XB).$$

因此, 由 (4.6) 可得 $\text{rank}(X) \geq m - 1$.

我们仅证明 $2 \leq k < m$ 的情形, $k = m$ 的情形类似可证. 以下设 $2 \leq k < m$. 设 $X = (X_1, X_2)$, 其中 $X_1 \in \mathbb{D}^{m \times k}$, $X_2 \in \mathbb{D}^{m \times (m-k)}$, 则由 $k \geq 2$ 可得 $X_1 \neq 0$. 设 $s = \text{rank}(X_1)$, 则 $1 \leq s \leq k$, 并且存在 $P_1 \in GL_m(\mathbb{D})$ 使得

$$X_1 = P_1 \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $X_{11} \in \mathbb{D}^{s \times r}$, $X_{12} \in \mathbb{D}^{s \times (k-r)}$. 不失一般性, 设 $P_1 = I_m$, 则

$$X = (X_1, X_2) = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{21} \\ 0 & 0 & X_{22} \end{pmatrix}$$

且 $\text{rank}(X) \leq s + m - k$, 其中 $X_{22} \in \mathbb{D}^{(m-s) \times (m-k)}$. 记

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix},$$

其中 $Y_1 \in \mathbb{D}^{s \times n}$, $Y_2 \in \mathbb{D}^{(m-s) \times n}$.

令

$$C_Z = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ A_2 & Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $Z \in \mathbb{E}_1^{(k-r) \times (n-r)}$, 则 $C_Z \in \mathcal{M}_{k,r+1}(\mathbb{E}^{m \times n})$ 且 $C_Z \sim A$. 故由 (4.6) 知 $Y - XC_Z \sim 0$, 从而有

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} X_{11} + X_{12}A_2 & X_{12}Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z \in \mathbb{E}_1^{(k-r) \times (n-r)}. \quad (4.7)$$

因为 $A_2 = (a_{ij})$ 没有零行, 不妨设 $a_{11} \neq 0$, 则 $(a_{11}, \dots, a_{1r})(I_r - \lambda E_{11}^{r \times r})^{-1} E_{11}^{r \times (n-r)} \neq 0$ 对所有满足 $\lambda \neq 1$ 的 $\lambda \in \mathbb{E}$ 成立. 由此可知, $A_2(I_r - \lambda E_{11}^{r \times r})^{-1} E_{11}^{r \times (n-r)} \neq 0$ 对所有满足 $\lambda \neq 1$ 的 $\lambda \in \mathbb{E}$ 成立. 因此, 对任意满足 $\lambda \neq 1$ 的 $\lambda \in \mathbb{E}$, 有

$$E_\lambda := \begin{pmatrix} I_r - \lambda E_{11}^{r \times r} & E_{11}^{r \times (n-r)} \\ A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,r+1}(\mathbb{E}^{m \times n}),$$

并且 $E_\lambda \sim A$. 故由 (4.6) 可知, $Y - XE_\lambda \sim 0$, 从而有

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} X_{11}(I_r - \lambda E_{11}^{r \times r}) + X_{12}A_2 & X_{11}E_{11}^{r \times (n-r)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{E} \quad \text{且} \quad \lambda \neq 1. \quad (4.8)$$

对任意的 $\lambda \in \mathbb{E}$, 令

$$C'_\lambda = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ A_2 - \lambda E_{11}^{(k-r) \times r} & E_{11}^{(k-r) \times (n-r)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,r+1}(\mathbb{E}^{m \times n}),$$

则 $C'_\lambda \sim A$. 因此, 由 (4.6) 可推出 $Y - XC'_\lambda \sim 0$. 因此,

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} X_{11} + X_{12}(A_2 - \lambda E_{11}^{(k-r) \times r}) & X_{12}E_{11}^{(k-r) \times (n-r)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{E}. \quad (4.9)$$

步 2 下面用反证法证明 $X_{12} \neq 0$. 假设 $X_{12} = 0$, 则 $s \leq r$. 由 (4.7) 可得 $Y - XA \sim 0$. 因此,

$$m = \text{rank}(X, Y) = \text{rank}(X, Y - XA) \leq \text{rank}(X) + \text{rank}(Y - XA) \leq s + m - k + 1,$$

故 $r \geq s \geq k - 1 \geq r$. 因此, $s = r = k - 1$ 且 X_{11} 可逆. 不失一般性, 设 $X_{11} = I_r$, 则

$$X = (X_1, X_2) = \begin{pmatrix} I_r & 0 & X_{21} \\ 0 & 0 & X_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $X_{22} \in \mathbb{D}^{(m-r) \times (m-k)}$. 由 (4.8) 可知,

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I_r - \lambda E_{11}^{r \times r} & E_{11}^{r \times (n-r)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{E} \quad \text{且} \quad \lambda \neq 1. \quad (4.10)$$

因此, 由引理 3.1、(4.10) 和 (4.7) 可证明 $Y_2 = 0$. 由此可知, $\text{rank}(X_1, Y) = r$. 由 $m = \text{rank}(X, Y) \leq r + \text{rank}(X_2) \leq r + m - k$ 可得 $k \leq r$, 这与条件 $k > r$ 矛盾. 因此, 我们证明了 $X_{12} \neq 0$.

接下来证明 $Y_2 = 0$ 且 X 可逆. 显然, 存在两个不同的矩阵 $Z_1, Z_2 \in \mathbb{E}_1^{(k-r) \times (n-r)}$ 使得 $X_{12}Z_1 \neq X_{12}Z_2$. 由 (4.7) 有

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} X_{11} + X_{12}A_2 & X_{12}Z_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

因此, 由引理 3.1 可知, $Y_2 = 0$, 或

$$Y = \begin{pmatrix} X_{11} + X_{12}A_2 & Y_{12} \\ 0 & Y_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $Y_{22} \in \mathbb{D}^{(m-s) \times (n-r)}$, $(0, Y_{22}) = Y_2$ 和 $(X_{11} + X_{12}A_2, Y_{12}) = Y_1$.

另一方面, $X_{11}\lambda E_{11}^{r \times r} \neq 0$ 或 $X_{12}\lambda E_{11}^{(k-r) \times r} \neq 0, \forall \lambda \in \mathbb{E}^*$. 否则, X_{11} 的第一列与 X_{12} 的第一列都是零, 从而, $m-1 \leq \text{rank}(X) \leq m-2$, 这是一个矛盾. 由 (4.8) 和 (4.9), 不妨设 $X_{11}\lambda E_{11}^{r \times r} \neq 0, \lambda \in \mathbb{E}^*$. 假设

$$Y = \begin{pmatrix} X_{11} + X_{12}A_2 & Y_{12} \\ 0 & Y_{22} \end{pmatrix}.$$

应用 (4.8), 对所有满足 $\lambda \neq 1$ 的 $\lambda \in \mathbb{E}^*$, 有

$$\begin{pmatrix} X_{11} + X_{12}A_2 & Y_{12} \\ 0 & Y_{22} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} X_{11}(I_r - \lambda E_{11}^{r \times r}) + X_{12}A_2 & X_{11}E_{11}^{r \times (n-r)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $X_{11} + X_{12}A_2 \neq X_{11}(I_r - \lambda E_{11}^{r \times r}) + X_{12}A_2, \forall \lambda \in \mathbb{E}^*$ 且 $\lambda \neq 1$, 所以, $Y_{22} = 0$. 因此, 总有 $Y_2 = 0$. 由

$$(X, Y) = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{21} & Y_1 \\ 0 & 0 & X_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

可知, $\text{rank}(X_{22}) = m - s \leq m - k$, 因此, $s \geq k$. 因为已知 $s \leq k$, 所以有 $s = k$ 和 $X_{22} \in \mathbb{D}^{(m-k) \times (m-k)}$, 从而 X_{22} 可逆. 因此, 由 $\text{rank}(X_1) = s = k$ 可知, X 可逆, $X_{11} \in \mathbb{D}^{k \times r}$ 和 $X_{12} \in \mathbb{D}^{k \times (k-r)}$. 不失一般性, 设 $X = I_m$, 则

$$X_{11} = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{k-r} \end{pmatrix},$$

$X_{21} = 0$ 和 $X_{22} = I_{m-k}$.

最后证明 $Y = XA$. 由 (4.7) 可得

$$Y - A \sim \begin{pmatrix} 0_r & 0 \\ 0 & Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z \in \mathbb{E}_1^{(k-r) \times (n-r)}.$$

故由引理 3.1 知,

$$Y - A = \begin{pmatrix} 0_r & W_1 \\ 0 & W_3 \\ 0 & W_4 \end{pmatrix}$$

或

$$Y - A = \begin{pmatrix} 0_r & 0 \\ W_2 & W_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $W_3 \in \mathbb{D}^{(k-r) \times (n-r)}$. 由 (4.8) 可得

$$Y - A \sim \begin{pmatrix} -\lambda E_{11}^{r \times r} & E_{11}^{r \times (n-r)} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{E} \quad \text{且} \quad \lambda \neq 1.$$

由此可知,

$$Y - A = \begin{pmatrix} 0_r & W_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

或 $Y - A = 0$. 假设前一个式子成立, 则由 (4.9) 可知, 对任意 $\lambda \in \mathbb{E}$, 有

$$Y - A = \begin{pmatrix} 0_r & W_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0_r & 0 \\ -\lambda E_{11}^{(k-r) \times r} & E_{11}^{(k-r) \times (n-r)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此 $W_1 = 0$. 从而证明了 $Y = A = XA$. □

类似地, 我们可以证明下列引理.

引理 4.3 设 $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{D}$ 是两个体, $|\mathbb{E}| > 2$, $m, n \geq k \geq 2$ 是整数. 设 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ 是 $\mathcal{G}_{m+n-1, n-1}^r(\mathbb{D})$ 中一个点的矩阵表示, 其中 $X \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{D}^{m \times n}$. 进一步, 假设 $A \in \mathcal{N}_{k, k}(\mathbb{E}^{m \times n})$ 且

$$\text{ad} \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_n \\ B \end{pmatrix} \right) = 1$$

对所有满足 $\text{rank}(B - A) = 1$ 的 $B \in \mathcal{N}_{k-1, k-1}(\mathbb{E}^{m \times n})$ 成立, 则 X 可逆. 当 $k \geq 3$ 时, $Y = AX$; 当 $k = 2$ 时, $Y = AX$ 或 $Y = 0$.

引理 4.4 设 $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{D}$ 是两个体, $|\mathbb{E}| > 2$, m, n, k 和 r 是整数, $n \geq k > r \geq 1$ 且 $m > r$. 设 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ 是 $\mathcal{G}_{m+n-1, n-1}^r(\mathbb{D})$ 中一个点的矩阵表示, 其中 $X \in \mathbb{D}^{n \times n}$ 且 $Y \in \mathbb{D}^{m \times n}$. 进一步, 假设 $A \in \mathcal{N}_{k, r}(\mathbb{E}^{m \times n})$, 并且

$$\text{ad} \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_n \\ B \end{pmatrix} \right) = 1$$

对所有满足 $\text{rank}(B - A) = 1$ 的 $B \in \mathcal{N}_{k, r+1}(\mathbb{E}^{m \times n})$ 成立, 则 X 可逆且 $Y = AX$.

5 主要结果的证明

引理 5.1 设 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 是两个体并且存在从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}'$ 的一个非零的环同态 τ . 设 $m, n \geq 2$ 是整数, $L \in \mathbb{D}'^{n \times m}$, 则 $I_m + X^\tau L \in GL_m(\mathbb{D}')$ ($\forall X \in \mathbb{D}^{m \times n}$) 当且仅当 $I_n + LX^\tau \in GL_n(\mathbb{D}')$ ($\forall X \in \mathbb{D}^{m \times n}$). 若 $I_m + X^\tau L \in GL_m(\mathbb{D}')$ ($\forall X \in \mathbb{D}^{m \times n}$), 则

$$(I_m + X^\tau L)^{-1} X^\tau = X^\tau (I_n + LX^\tau)^{-1}, \quad X \in \mathbb{D}^{m \times n}. \quad (5.1)$$

证明 对于任意 $X \in \mathbb{D}^{m \times n}$, 有

$$(I_m + X^\tau L)X^\tau = X^\tau (I_n + LX^\tau). \quad (5.2)$$

令 $G_X = I_m + X^\tau L$, $X \in \mathbb{D}^{m \times n}$. 如果 $G_X \in GL_m(\mathbb{D}')$, 则由 (5.2) 有 $X^\tau = G_X^{-1} X^\tau (I_n + LX^\tau)$, 因此, $I_n = (I_n - LG_X^{-1} X^\tau)(I_n + LX^\tau)$, 从而有 $I_n + LX^\tau \in GL_n(\mathbb{D}')$, $X \in \mathbb{D}^{m \times n}$. 类似地, 如果 $I_n + LX^\tau \in GL_n(\mathbb{D}')$, $X \in \mathbb{D}^{m \times n}$, 则 $I_m + X^\tau L \in GL_m(\mathbb{D}')$, $X \in \mathbb{D}^{m \times n}$. 因此, $I_m + X^\tau L \in GL_m(\mathbb{D}')$ ($\forall X \in \mathbb{D}^{m \times n}$) 当且仅当 $I_n + LX^\tau \in GL_n(\mathbb{D}')$ ($\forall X \in \mathbb{D}^{m \times n}$). 如果 $I_m + X^\tau L \in GL_m(\mathbb{D}')$, $X \in \mathbb{D}^{m \times n}$, 则由 (5.2) 可知 (5.1) 成立. $\square$

类似地, 我们有如下引理.

引理 5.2 设 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 是两个体并且存在从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}'$ 的一个非零的环反同态 σ , 设 $m, n \geq 2$ 是整数, $L \in \mathbb{D}'^{m \times n}$, 则 $I_m + LX^{\sigma T} \in GL_m(\mathbb{D}')$ ($\forall X \in \mathbb{D}^{m \times n}$) 当且仅当 $I_n + X^{\sigma T} L \in GL_n(\mathbb{D}')$ ($\forall X \in \mathbb{D}^{m \times n}$). 如果 $I_m + LX^{\sigma T} \in GL_m(\mathbb{D}')$ ($\forall X \in \mathbb{D}^{m \times n}$), 则

$$X^{\sigma T} (I_m + LX^{\sigma T})^{-1} = (I_n + X^{\sigma T} L)^{-1} X^{\sigma T}, \quad X \in \mathbb{D}^{m \times n}.$$

命题 5.1 设 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 是两个体且 $|\mathbb{D}| \geq 4$. 设 $m, n, m', n' \geq 2$ 是整数, $m' \geq m$ 且 $n' \geq n$. 设 $\theta: \mathbb{D}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 是一个非退化的图同态且 $\theta(0) = 0$. 进一步, 假设 $\theta(\mathcal{M}_i) \subseteq \mathcal{M}'_i$, $i = 1, \dots, m$, $\theta(\mathcal{N}_j) \subseteq \mathcal{N}'_j$, $j = 1, \dots, n$, 则存在两个可逆的对角矩阵 $P \in GL_{m'}(\mathbb{D}')$ 、 $Q \in GL_{n'}(\mathbb{D}')$ 和一个非零的环同态 $\tau: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}'$, 以及满足条件 $I_m + X^\tau L \in GL_m(\mathbb{D}')$ ($\forall X \in \mathbb{D}^{m \times n}$) 的矩阵 $L \in \mathbb{D}'^{n \times m}$, 使得

$$\theta(X) = P \begin{pmatrix} (I_m + X^\tau L)^{-1} X^\tau & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q, \quad X \in \mathbb{D}^{m \times n}. \quad (5.3)$$

特别地, 如果 τ 是满射, 则 $L = 0$ 且 τ 是环同构.

证明 我们仅证明 $m \leq n$ 的情形. 当 $m > n$ 时, 由矩阵的行与列的对称性, 我们类似可证明

$$\theta(X) = P \begin{pmatrix} X^\tau (I_n + LX^\tau)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q, \quad X \in \mathbb{D}^{m \times n},$$

其中 $P \in GL_{m'}(\mathbb{D}')$ 和 $Q \in GL_{n'}(\mathbb{D}')$ 均为可逆的对角矩阵, $\tau: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}'$ 为非零的环同态, $L \in \mathbb{D}'^{n \times m}$ 且满足条件 $I_n + LX^\tau \in GL_n(\mathbb{D}')$, $\forall X \in \mathbb{D}^{m \times n}$. 故由引理 5.1 知 (5.3) 成立. 以下假设 $m \leq n$.

步 1 对 $1 \leq i \leq m$, 由定理条件和引理 3.7 知, 限制映射 $\theta|_{\mathcal{M}_i}: \mathcal{M}_i \rightarrow \mathcal{M}'_i$ 是一个单的加权半仿射映射. 由引理 3.6 有

$$\theta \begin{pmatrix} 0_{i-1, n} \\ x_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{i-1, n} \\ (k_i(x_i))^{-1} x_i^{\sigma_i} Q_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{D}^n, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (5.4)$$

其中 $\sigma_i: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}'$ 是非零的环同态, $Q_i \in \mathbb{D}'^{n \times n'}$, $k_i(x_i) = \sum_{j=1}^n x_{ij}^\sigma a_{ji} + b_i \neq 0$, $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}) \in \mathbb{D}^n$ 且 $a_{ji}, b_i \in \mathbb{D}'$ ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$). 在 (5.4) 中, 当 $i = 1$ 或 $i = m$ 时, 矩阵中某些位置的零元素不存在.

设 $E_{ij} = E_{ij}^{m \times n}$, $E'_{ij} = E_{ij}^{m' \times n'}$. 注意 $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{N}_j = \mathbb{D}E_{ij}$. 因为 $\theta(\mathcal{M}_i) \subseteq \mathcal{M}'_i$ 且 $\theta(\mathcal{N}_j) \subseteq \mathcal{N}'_j$, 所以有

$$\theta(E_{ij}) = e_{ij}E'_{ij}, \quad \text{其中 } e_{ij} \in \mathbb{D}'^*, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.5)$$

故易知 $Q_i = (T_i, 0)$, 其中 $T_i = \text{diag}(q_{i1}, \dots, q_{in})$ 是可逆的对角矩阵, $i = 1, \dots, m$. 因此,

$$\theta \begin{pmatrix} 0_{i-1,n} \\ x_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{i-1,n} & 0 \\ (k_i(x_i))^{-1}x_i^{\sigma_i}T_i & 0 \\ 0 & 0_{m'-i, n'-n} \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{D}^n, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.6)$$

用映射 $X \mapsto \theta(X)\text{diag}(T_1^{-1}, I_{n'-n})$ 置换映射 θ 后, 有 $T_1 = I_n$.

对非零向量 $x_1 = (x_{11}, \dots, x_{1n}) \in \mathbb{D}^n$ 以及 $2 \leq i \leq m$, 因为

$$\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \theta \begin{pmatrix} 0_{i-1,n} \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

故由 (5.6) 可得

$$\begin{pmatrix} (k_1(x_1))^{-1}x_1^{\sigma_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0_{i-1,n} \\ (k_i(x_1))^{-1}x_1^{\sigma_i}T_i \\ 0 \end{pmatrix},$$

从而有

$$\begin{pmatrix} x_1^{\sigma_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0_{i-1,n} \\ x_1^{\sigma_i}T_i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因此, 存在一个非零元 $c_i \in \mathbb{D}'$ 使得 $c_i x_1^{\sigma_1} = x_1^{\sigma_i}T_i$, 从而有

$$c_i(x_{11}^{\sigma_1}, \dots, x_{1n}^{\sigma_1}) = (x_{11}^{\sigma_i}q_{i1}, \dots, x_{1n}^{\sigma_i}q_{in}), \quad x_{1j} \in \mathbb{D}.$$

取 $x_{11} = \dots = x_{1n} = 1$, 有 $c_i = q_{i1} = \dots = q_{in} =: q_i$. 因此, $x_1^{\sigma_1} = x_1^{\sigma_i}$, $x_1 \in \mathbb{D}^n$, $i = 1, \dots, m$. 令 $\tau = \sigma_1$, 则 $\tau = \sigma_2 = \dots = \sigma_m$, $T_i = q_i I_n$ 且 $x^\tau T_i = x^\tau q_i$, $x \in \mathbb{D}^n$, $i = 2, \dots, m$. 注意到映射 $x \mapsto q_i^{-1}x^\tau q_i =: x^{\tau'}$ ($x \in \mathbb{D}$) 是从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}'$ 的非零的环同态. 而且, $(k_i(x_i))^{-1}x_i^{\sigma_i}T_i = (k_i(x_i))^{-1}x_i^{\tau}q_i = (k'_i(x_i))^{-1}x_i^{\tau'}$, 其中 $k'_i(x_i) = \sum_{j=1}^n x_{ij}^{\tau'}q_i^{-1}a_{ji} + q_i^{-1}b_i$. 因此, 不失一般性, 假设 (5.6) 中的 $T_i = I_n$, $i = 1, \dots, m$. 因此, (5.6) 成为

$$\theta \begin{pmatrix} 0_{i-1,n} \\ x_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{i-1,n} & 0 \\ (k_i(x_i))^{-1}x_i^{\tau} & 0 \\ 0 & 0_{m'-i, n'-n} \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{D}^n, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.7)$$

注意到 $(k_i(x_i))^{-1} = b_i^{-1}(\sum_{j=1}^n x_{ij}^T a_{ji} b_i^{-1} + 1)^{-1}$. 用映射 $X \mapsto \text{diag}(b_1, \dots, b_m, 1, \dots, 1)\theta(X)$ 置换映射 θ 后, 在 $k_i(x_i)$ 中, 有 $b_i = 1$ ($i = 1, \dots, m$). 因此,

$$k_i(x_i) = \sum_{j=1}^n x_{ij}^T a_{ji} + 1 \neq 0, \quad x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}) \in \mathbb{D}^n, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.8)$$

步 2 这一步将证明

$$\text{rank}(\theta(A)) = 2, \quad A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{D}^{m \times n}). \quad (5.9)$$

不失一般性, 可设 $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{D}^{m \times n}) = \mathcal{M}_{2,2}^\alpha(\mathbb{D}^{m \times n})$, 其中 $\alpha = \{1, 2\}$. 设

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}^\alpha(\mathbb{D}^{m \times n}),$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{D}^n$ 左线性无关. 记 $\theta(A) = ((\alpha_1^*)^T, (\alpha_2^*)^T, (0^*)^T)^T$, 其中 $\alpha_1^*, \alpha_2^* \in \mathbb{D}'^{n'}$. 我们分两种情形证明 (5.9).

情形 2.1 $\begin{pmatrix} \alpha_2^* \\ 0^* \end{pmatrix} \neq 0$. 我们证明 $\text{rank}(\theta(A)) = 2$ 如下. 不妨设 $\alpha_2^* \neq 0$. 令 $\alpha_\lambda = \alpha_1 + \lambda\alpha_2$, 其中 $\lambda \in \mathbb{D}$. 因为

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \lambda\alpha_2 \\ 0_{m-1,n} \end{pmatrix} \sim A,$$

由 (5.7) 可知,

$$\theta \begin{pmatrix} \alpha_1 + \lambda\alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_1(\alpha_\lambda))^{-1}(\alpha_1^T + \lambda^T \alpha_2^T) & 0_{1,n'-n} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \\ 0^* \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

因此,

$$\text{rank} \begin{pmatrix} (k_1(\alpha_\lambda))^{-1}(\alpha_1^T + \lambda^T \alpha_2^T, 0_{1,n'-n}) - \alpha_1^* \\ -\alpha_2^* \\ -0^* \end{pmatrix} = 1, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

由此可得 $(k_1(\alpha_\lambda))^{-1}(\alpha_1^T + \lambda^T \alpha_2^T, 0_{1,n'-n}) = \alpha_1^* + \lambda^\rho \alpha_2^*$, $\lambda \in \mathbb{D}$, 其中 $\rho: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}'$ 是一个映射. 因为 $\theta|_{\mathcal{M}_1}: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1'$ 为单射, 所以 ρ 是单射. 存在不同的 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{D}$ 使得 $\alpha_1 + \lambda_1 \alpha_2$ 与 $\alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2$ 左线性无关. 显然, $(k_1(\alpha_{\lambda_1}))^{-1}(\alpha_1^T + \lambda_1^T \alpha_2^T, 0_{1,n'-n}) = \alpha_1^* + \lambda_1^\rho \alpha_2^*$ 与 $(k_1(\alpha_{\lambda_2}))^{-1}(\alpha_1^T + \lambda_2^T \alpha_2^T, 0_{1,n'-n}) = \alpha_1^* + \lambda_2^\rho \alpha_2^*$ 也左线性无关. 从而, α_1^* 和 α_2^* 左线性无关. 因此, $\text{rank}(\theta(A)) = 2$.

情形 2.2 $\begin{pmatrix} \alpha_2^* \\ 0^* \end{pmatrix} = 0$, 则 $\theta(A) = ((\alpha_1^*)^T, 0^T, 0^T)$. 我们将指出这种情形不能发生. 令 $\beta_\lambda = \alpha_2 + \lambda\alpha_1$, $\lambda \in \mathbb{D}$. 因为

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 + \lambda\alpha_1 \\ 0_{m-2,n} \end{pmatrix} \sim A,$$

由 (5.7) 可得

$$\theta \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 + \lambda \alpha_1 \\ 0_{m-2,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (k_2(\beta_\lambda))^{-1}(\alpha_2^\tau + \lambda^\tau \alpha_1^\tau, 0_{1,n'-n}) \\ 0_{m'-2,n'} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

因此,

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ (k_2(\beta_\lambda))^{-1}(\alpha_2^\tau + \lambda^\tau \alpha_1^\tau, 0_{1,n'-n}) \end{pmatrix} = 1, \quad \lambda \in \mathbb{D}. \quad (5.10)$$

注意到 $k_2(\beta_\lambda) = k_2(\alpha_2) + \lambda^\tau k_2(\alpha_1) - \lambda^\tau$ 且 $\theta|_{\mathcal{M}_2}: \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}'_2$ 为单射. 如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则 $(k_2(\beta_{\lambda_1}))^{-1}(\alpha_2^\tau + \lambda_1^\tau \alpha_1^\tau) \neq (k_2(\beta_{\lambda_2}))^{-1}(\alpha_2^\tau + \lambda_2^\tau \alpha_1^\tau)$, 从而, $\lambda_1^\tau \neq \lambda_2^\tau$. 存在两个不同的 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{D}$ 使得 $\alpha_2 + \lambda_1 \alpha_1$ 和 $\alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1$ 左线性无关. 显然, $(k_2(\beta_{\lambda_1}))^{-1}(\alpha_2^\tau + \lambda_1^\tau \alpha_1^\tau)$ 和 $(k_2(\beta_{\lambda_2}))^{-1}(\alpha_2^\tau + \lambda_2^\tau \alpha_1^\tau)$ 也左线性无关. 因此, 由 (5.10) 有 $\alpha_1^* = 0$. 从而, $\theta(A) = 0$.

因为 $(\alpha_2^\tau, \alpha_1^\tau, 0^\tau)^\tau \sim A$, 所以,

$$\theta \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0' \end{pmatrix} \sim \theta(A) = 0,$$

其中 $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{D}'^{m'}$, 故

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0' \end{pmatrix} = 1.$$

由 $\text{rank}(\alpha_2^\tau, \alpha_1^\tau, 0^\tau)^\tau = 2$ 可知 $\begin{pmatrix} \beta_2 \\ 0' \end{pmatrix} = 0$. 否则, 若 $\begin{pmatrix} \beta_2 \\ 0' \end{pmatrix} \neq 0$, 类似于情形 2.1 的证明知,

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0' \end{pmatrix} = 2,$$

矛盾. 因此,

$$\theta \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

另一方面,

$$\theta \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 + \lambda \alpha_2 \\ 0_{m-2,n} \end{pmatrix} \sim \theta \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

类似于 $\theta(A) = 0$ 的证明可知,

$$\theta \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

这是一个矛盾. 因此, 情形 2.2 不能发生.

综合情形 2.1 和 2.2, (5.9) 成立.

步 3 这一步将证明 θ 的公式为 $\theta(X) = \text{diag}((I_m + X^\tau L)^{-1} X^\tau, 0)$, $X \in \mathbb{D}^{m \times n}$, 其中 $L \in \mathbb{D}^{n \times m}$ 是固定的且满足条件 $I_m + X^\tau L \in GL_m(\mathbb{D}')$, $\forall X \in \mathbb{D}^{m \times n}$.

令 $L = (a_{ij}) \in \mathbb{D}^{n \times m}$, 其中 a_{ij} 由 (5.8) 确定. 对于任意 $x_i \in \mathbb{D}^n$, 有

$$I_m + X^\tau L = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ * & k_i(x_i) & * \\ 0 & 0 & I_{m-i} \end{pmatrix} \in GL_m(\mathbb{D}'), \quad X = \begin{pmatrix} 0_{i-1, n} \\ x_i \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}^{m \times n}.$$

因此, (5.7) 可写为

$$\theta(X) = \text{diag}((I_m + X^\tau L)^{-1} X^\tau, 0), \quad X \in \mathcal{M}_i, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.11)$$

令 $\mathcal{L} = \{X \in \mathbb{D}^{m \times n} : I_m + X^\tau L \text{ 可逆}\}$. 令 $\mathcal{L}_0 = \{0\} \subset \mathcal{L}$, $\mathcal{L}_k = \bigcup_{j=1}^k \mathcal{M}_{k,j}(\mathbb{D}^{m \times n})$, $k = 1, \dots, m$. 注意 $\mathcal{L}_1 = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{M}_i \setminus \{0\}$. 显然, $\bigcup_{k=0}^m \mathcal{L}_k = \mathbb{D}^{m \times n}$. 定义映射

$$\psi(X) = \text{diag}((I_m + X^\tau L)^{-1} X^\tau, 0_{n'-n, m'-m}), \quad X \in \mathcal{L}.$$

我们将证明 $\mathcal{L} = \mathbb{D}^{m \times n}$ 且 $\theta(X) = \psi(X)$, $X \in \mathbb{D}^{m \times n}$. 由 (5.11) 可知, $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}$ 且 $\theta(X) = \psi(X)$, $X \in \mathcal{L}_1$. 假设 $\mathcal{L}_{k-1} \subset \mathcal{L}$ 且 $\theta(X) = \psi(X)$, $X \in \mathcal{L}_{k-1}$, $2 \leq k \leq m$. 下面用数学归纳法证明 $\mathcal{L}_k \subset \mathcal{L}$ 且 $\theta(X) = \psi(X)$, $X \in \mathcal{L}_k$.

令 $\mathbb{E} = \tau(\mathbb{D})$, 则 $\mathbb{E}$ 为 $\mathbb{D}'$ 的子体且 $|\mathbb{E}| \geq 4$, 并且映射 τ 是从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{E}$ 的一个环同构. 而且, 我们有 $\tau(\mathbb{D}^{m \times n}) = \mathbb{E}^{m \times n}$ 且 $\tau(\mathcal{M}_{k,j}(\mathbb{D}^{m \times n})) = \mathcal{M}_{k,j}(\mathbb{E}^{m \times n})$. 设 $A \in \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{D}^{m \times n})$, 其中 $2 \leq k \leq m$, 则 $A^\tau \in \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{E}^{m \times n})$. 显然, $B \in \mathcal{M}_{k-1,k-1}(\mathbb{D}^{m \times n})$ 且 $B \sim A$ 的充要条件是 $B^\tau \in \mathcal{M}_{k-1,k-1}(\mathbb{E}^{m \times n})$ 且 $B^\tau \sim A^\tau$.

设 $B \in \mathcal{M}_{k-1,k-1}(\mathbb{D}^{m \times n})$ 且 $B \sim A$, 则 $\theta(A) \sim \theta(B)$ 和 $B^\tau \sim A^\tau$. 由归纳假设可知, $B \in \mathcal{L}$ 且 $\theta(B) = \text{diag}((I_m + B^\tau L)^{-1} B^\tau, 0)$. 显然, 存在两个矩阵 $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{k-1,k-1}(\mathbb{D}^{m \times n})$ 使得 $\text{rank}(B_1 - B_2) \geq 2$ 且 $A \sim B_i$, $i = 1, 2$. 由例 2.3 可知, $\text{rank}(\theta(B_1) - \theta(B_2)) \geq 2$, 从而,

$$\text{rank}((I_m + B_1^\tau L)^{-1} B_1^\tau - (I_m + B_2^\tau L)^{-1} B_2^\tau) \geq 2. \quad (5.12)$$

令

$$\theta(A) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

其中 $A_1 \in \mathbb{D}^{m \times n}$. 因为 $\theta(A) \sim \theta(B_i)$, $i = 1, 2$, 所以有

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A_1 - (I_m + B_i^\tau L)^{-1} B_i^\tau & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = 1, \quad i = 1, 2.$$

由引理 3.1 和 (5.12) 知, $A_4 = 0$, $A_2 = 0$ 且 $A_3 = 0$. 因此,

$$\theta(A) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

对满足 $B^\tau \sim A^\tau$ 的任意矩阵 $B^\tau \in \mathcal{M}_{k-1,k-1}(\mathbb{E}^{m \times n})$, 有 $\theta(A) \sim \theta(B)$. 因此,

$$(A_1, I_m) \sim ((I_m + B^\tau L)^{-1} B^\tau, I_m), \quad (5.13)$$

其中矩阵 (A_1, I_m) 和 $((I_m + B^\tau L)^{-1} B^\tau, I_m)$ 是 Grassmann 空间 $\mathcal{G}_{m+n-1, m-1}^l(\mathbb{D}')$ 中两个点的矩阵表示. 从 Grassmann 空间的观点看, 由 (4.1) 知, $\text{ad}((A_1, I_m), ((I_m + B^\tau L)^{-1} B^\tau, I_m)) = 1$ 对所有满足 $B^\tau \sim A^\tau$ 的 $B^\tau \in \mathcal{M}_{k-1,k-1}(\mathbb{E}^{m \times n})$ 成立. 因为 $((I_m + B^\tau L)^{-1} B^\tau, I_m)$ 和 $(B^\tau, I_m + B^\tau L)$ 是 Grassmann 空间中同一个点的两个矩阵表示, 所以,

$$\text{ad}((A_1, I_m), (B^\tau, I_m + B^\tau L)) = 1$$

对所有满足 $B^\tau \sim A^\tau$ 的 $B^\tau \in \mathcal{M}_{k-1,k-1}(\mathbb{E}^{m \times n})$ 成立. 因为

$$(A_1, I_m) \begin{pmatrix} -L & I_n \\ I_m & 0 \end{pmatrix} = (I_m - A_1 L, A_1), \quad (B^\tau, I_m + B^\tau L) \begin{pmatrix} -L & I_n \\ I_m & 0 \end{pmatrix} = (I_m, B^\tau),$$

所以, 由 (4.1) 知, $\text{ad}((I_m - A_1 L, A_1), (I_m, B^\tau)) = 1$ 对所有满足 $B^\tau \sim A^\tau$ 的 $B^\tau \in \mathcal{M}_{k-1,k-1}(\mathbb{E}^{m \times n})$ 成立. 令 $W = I_m - A_1 L$. 由引理 4.1 和 (5.9) 可知, W 可逆且 $A_1 = W A^\tau$. 因为

$$(A_1, I_m) = (A_1, W + A_1 L) = (W A^\tau, W + W A^\tau L) = W(A^\tau, I_m + A^\tau L),$$

所以, $I_m = W(I_m + A^\tau L)$. 因此, $W = (I_m + A^\tau L)^{-1}$ 且 $A_1 = (I_m + A^\tau L)^{-1} A^\tau$. 从而,

$$\theta(A) = \text{diag}((I_m + A^\tau L)^{-1} A^\tau, 0), \quad A \in \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{D}^{m \times n}).$$

由此可知,

$$\mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{D}^{m \times n}) \subset \mathcal{L} \quad \text{且} \quad \theta(X) = \psi(X), \quad X \in \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{D}^{m \times n}).$$

由引理 4.2 类似可证 $\mathcal{M}_{k,k-1}(\mathbb{D}^{m \times n}) \subset \mathcal{L}$ 且 $\theta(X) = \psi(X)$, $X \in \mathcal{M}_{k,k-1}(\mathbb{D}^{m \times n})$. 应用这种方法, 我们可证明 $\mathcal{M}_{k,j}(\mathbb{D}^{m \times n}) \subset \mathcal{L}$ 且 $\theta(X) = \psi(X)$, $X \in \mathcal{M}_{k,j}(\mathbb{D}^{m \times n})$, $j = k-2, \dots, 1$. 因此, $\mathcal{L}_k \subset \mathcal{L}$ 且 $\theta(X) = \psi(X)$, $X \in \mathcal{L}_k$. 故由数学归纳法得到 $\mathcal{L} = \mathbb{D}^{m \times n}$ 且

$$\theta(X) = \psi(X) = \text{diag}((I_m + X^\tau L)^{-1} X^\tau, 0), \quad X \in \mathbb{D}^{m \times n}.$$

故初始的 θ 形如 (5.3).

注意从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}'$ 的每个环满同态都是环同构. 如果 τ 是满射, 则 $L = 0$. 否则, 若 $L \neq 0$, 则存在矩阵 $X_0 \in \mathbb{D}^{m \times n}$ 使得 $I_m + X_0^\tau L$ 不可逆, 矛盾. 因此, 如果 τ 是满射, 则 $L = 0$ 且 τ 是环同构. $\square$

类似地, 由引理 4.3 和 4.4 我们可证如下命题.

命题 5.2 设 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 是两个体且 $|\mathbb{D}| \geq 4$. 设 $m, n, m', n' \geq 2$ 是整数, $m' \geq n$ 且 $n' \geq m$. 设 $\theta : \mathbb{D}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 是非退化的图同态且 $\theta(0) = 0$. 进一步, 假设 $\theta(\mathcal{M}_i) \subseteq \mathcal{N}'_i$, $i = 1, \dots, m$,

$\theta(\mathcal{N}_j) \subseteq \mathcal{M}'_j, j = 1, \dots, n$, 则存在两个可逆的对角矩阵 $P \in GL_{n'}(\mathbb{D}')$ 、 $Q \in GL_{m'}(\mathbb{D}')$ 和一个非零的环反同态 $\sigma: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}'$, 以及满足条件 $I_m + LX^{\sigma T} \in GL_m(\mathbb{D}')$ ($\forall X \in \mathbb{D}^{m \times n}$) 的矩阵 $L \in \mathbb{D}'^{m \times n}$, 使得

$$\theta(X) = P \begin{pmatrix} X^{\sigma T}(I_m + LX^{\sigma T})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q, \quad X \in \mathbb{D}^{m \times n}. \quad (5.14)$$

特别地, 若 σ 是满射, 则 $L = 0$ 且 σ 是环反同构.

现在给出定理 2.1 和推论 2.1 的证明如下.

定理 2.1 的证明 假设 $\varphi: \mathbb{D}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{D}'^{m' \times n'}$ 是一个非退化的图同态且 $\varphi(0) = 0$. 进一步, 假设 $\dim(\varphi(\mathcal{M}_1)) = n$ 且 $\dim(\varphi(\mathcal{N}_1)) = m$. 我们分为如下两种情形证明.

情形 1 $\varphi(\mathcal{M}_1)$ 包含在一个类型一的极大集之中.

由引理 1.1 和 3.4(2) 知, 存在矩阵 $P_0 \in GL_{m'}(\mathbb{D}')$ 和 $Q_0 \in GL_{n'}(\mathbb{D}')$ 使得 $\varphi(\mathcal{M}_1) \subseteq P_0 \mathcal{M}'_1 Q_0$ 且 $\varphi(\mathcal{N}_1) \subseteq P_0 \mathcal{N}'_1 Q_0$. 用映射 $X \mapsto P_0^{-1} \varphi(X) Q_0^{-1}$ 置换映射 φ 后, 有

$$\varphi(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathcal{M}'_1, \quad \varphi(\mathcal{N}_1) \subseteq \mathcal{N}'_1. \quad (5.15)$$

令 $E_{ij} = E_{ij}^{m \times n}, E'_{ij} = E_{ij}^{m' \times n'}$. 由 (5.15) 知,

$$\varphi(E_{11}) = d_{11} E'_{11}, \quad \text{其中 } d_{11} \in \mathbb{D}'^*. \quad (5.16)$$

应用引理 3.7, 限制映射 $\varphi|_{\mathcal{M}_1}: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}'_1$ 是一个单的加权半仿射映射. 由引理 3.6 可得

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ 0_{m-1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_1(x_1))^{-1} x_1^\delta Q_1 \\ 0_{m'-1,n'} \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{D}^n, \quad (5.17)$$

其中 $\delta: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}'$ 是非零的环同态, $Q_1 \in \mathbb{D}'^{n \times n'}$, $k_1(x_1) = \sum_{j=1}^n x_{1j}^\delta a_{j1} + b_1 \neq 0$, $x_1 = (x_{11}, \dots, x_{1n}) \in \mathbb{D}^n$.

由 (5.16) 和 (5.17) 知 Q_1 形如

$$Q_1 = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

因为 $n = \dim(\varphi(\mathcal{M}_1)) \leq \text{rank}(Q_1)$, 所以, $n' \geq n$ 且 $\text{rank}(Q_1) = n$. 显然, 存在矩阵

$$Q_2 = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \in GL_{n'}(\mathbb{D}')$$

使得 $Q_1 = (I_n, 0)Q_2$. 因此, (5.17) 可写为

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ 0_{m-1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_1(x_1))^{-1} x_1^\delta & 0 \\ 0_{m'-1,n} & 0 \end{pmatrix} Q_2, \quad x_1 \in \mathbb{D}^n. \quad (5.18)$$

由引理 3.7 知, 限制映射 $\varphi|_{\mathcal{N}_1}: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}'_1$ 是一个单的加权半仿射. 故由引理 3.6 有

$$\varphi(y_1, 0, \dots, 0) = (P_1 y_1^\mu (k'_1(y_1))^{-1}, 0, \dots, 0), \quad y_1 \in {}^m \mathbb{D}, \quad (5.19)$$

其中 $\mu: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}'$ 为非零的环同态, $P_1 \in \mathbb{D}'^{m' \times m}$, 且 $k'_1(y_1) = \sum_{i=1}^m c_{i1} x_{i1}^\mu + d_1 \neq 0$, $y_1 = (x_{11}, \dots, x_{m1})^T \in {}^m\mathbb{D}$. 由 (5.16) 和 (5.19) 知 P_1 形如

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

因为 $m = \dim(\varphi(\mathcal{N}_1)) \leq \text{rank}(P_1)$, 所以有 $m' \geq m$ 且 $\text{rank}(P_1) = m$. 显然, 存在一个矩阵

$$P_2 = \begin{pmatrix} p_{11} & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in GL_{m'}(\mathbb{D}')$$

使得 $P_1 = P_2 \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}$. 因此, (5.19) 可写为

$$\varphi(y_1, 0, \dots, 0) = P_2 \begin{pmatrix} y_1^\mu (k'_1(y_1))^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{m'-m, n'-1} \end{pmatrix}, \quad y_1 \in {}^m\mathbb{D}. \quad (5.20)$$

注意到 $p_{11}(k_1(x_1))^{-1} = (k_1(x_1)p_{11}^{-1})^{-1}$ 和 $(k'_1(y_1))^{-1}q_{11} = (q_{11}^{-1}k'_1(y_1))^{-1}$. 不失一般性, (5.18) 和 (5.20) 可写为

$$\begin{aligned} \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ 0_{m-1, n} \end{pmatrix} &= P_2 \begin{pmatrix} (k_1(x_1))^{-1}x_1^\delta & 0 \\ 0_{m'-1, n} & 0 \end{pmatrix} Q_2, \quad x_1 \in \mathbb{D}^n, \\ \varphi(y_1, 0, \dots, 0) &= P_2 \begin{pmatrix} y_1^\mu (k'_1(y_1))^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{m'-m, n'-1} \end{pmatrix} Q_2, \quad y_1 \in {}^m\mathbb{D}. \end{aligned}$$

用映射 $X \mapsto P_2^{-1}\varphi(X)Q_2^{-1}$ 置换映射 φ 后, 我们有

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ 0_{m-1, n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_1(x_1))^{-1}x_1^\delta & 0 \\ 0_{m'-1, n} & 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{D}^n, \quad (5.21)$$

$$\varphi(y_1, 0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} y_1^\mu (k'_1(y_1))^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{m'-m, n'-1} \end{pmatrix}, \quad y_1 \in {}^m\mathbb{D}. \quad (5.22)$$

由推论 3.1 可知, 在 $\mathbb{D}^{m \times n}$ (分别地, $\mathbb{D}'^{m' \times n'}$) 中恰好有两个不同类型的极大集包含 0 和 E_{i1} (分别地, 0 和 bE'_{i1} , 这里 $b \in \mathbb{D}'^*$), 它们是 $\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{M}_i$ (分别地, $\mathcal{N}'_1$ 和 $\mathcal{M}'_i$). 应用引理 3.4(2) 和 (5.22), 有 $\varphi(\mathcal{N}_1) \subseteq \mathcal{N}'_1$ 且 $\varphi(\mathcal{M}_i) \subseteq \mathcal{M}'_i$, $i = 1, \dots, m$. 类似地, 由 (5.21) 有 $\varphi(\mathcal{N}_j) \subseteq \mathcal{N}'_j$, $j = 1, \dots, n$.

由命题 5.1 知, 存在两个可逆对角矩阵 $T_1 \in GL_{m'}(\mathbb{D}')$ 、 $T_2 \in GL_{n'}(\mathbb{D}')$ 和一个非零的环同态 $\tau: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}'$, 以及满足条件 $I_m + X^\tau L \in GL_m(\mathbb{D}')$ ($X \in \mathbb{D}^{m \times n}$) 的矩阵 $L \in \mathbb{D}'^{m \times m}$, 使得

$$\varphi(X) = T_1 \begin{pmatrix} (I_m + X^\tau L)^{-1}X^\tau & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_2, \quad X \in \mathbb{D}^{m \times n}.$$

因此, 初始的 φ 形如 (2.2). 特别地, 若 τ 是满射, 则 $L = 0$ 且 τ 是一个环同构.

情形 2 $\varphi(\mathcal{M}_1)$ 包含在一个类型二的极大集之中.

类似于情形 1, 用映射 $X \mapsto P'^{-1}\varphi(X)Q'^{-1}$ 置换映射 φ 后 (其中 P' 和 Q' 为可逆矩阵), 有 $m' \geq n$, $n' \geq m$, $\varphi(\mathcal{M}_i) \subseteq \mathcal{N}'_i$, $i = 1, \dots, m$ 且 $\varphi(\mathcal{N}_j) \subseteq \mathcal{M}'_j$, $j = 1, \dots, n$. 由命题 5.2 可知, 初始的 φ 形如 (2.3). 特别地, 若 σ 是满射, 则 $L = 0$ 且 σ 是一个环反同构. $\square$

推论 2.1 的证明 情形 1 $\varphi(\mathcal{M}_1)$ 包含在一个类型一的极大集之中.

存在矩阵 $P' \in GL_{m'}(\mathbb{D})$ 使得 $\varphi(\mathcal{M}_1) \subseteq P'\mathcal{M}'_1$. 由引理 3.7 和 3.6 知, 限制映射 $\varphi|_{\mathcal{M}_1}: \mathcal{M}_1 \rightarrow P'\mathcal{M}'_1$ 形如

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = P' \begin{pmatrix} (k(x))^{-1}x^\delta T \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{D}^n,$$

其中 $\delta: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 为非零的环自同态, $T \in \mathbb{D}^{n \times n'}$ 且 $k(x) = \sum_{j=1}^n x_{1j}^\delta a_{j1} + b \neq 0$, $x = (x_{11}, \dots, x_{1n}) \in \mathbb{D}^n$. 因为 $\mathbb{D}$ 是 EAS 体, 所以, δ 是双射, 从而, δ 是 $\mathbb{D}$ 的一个环自同构. 因此, $\text{rank}(T) = n$. 否则, 存在 $0 \neq \alpha \in \mathbb{D}^n$ 使得 $(k(\alpha))^{-1}\alpha^\delta T = 0$, 这与 $\varphi|_{\mathcal{M}_1}$ 是单射矛盾. 因此, $n' \geq n$.

设 e_i 和 β_i 分别为 I_n 和 T 的第 i 行, 则

$$\varphi \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix} = P' \begin{pmatrix} (k(e_i))^{-1}\beta_i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\text{rank}(T) = n$, 所以,

$$P'^{-1}\varphi \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, P'^{-1}\varphi \begin{pmatrix} e_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{D}$ 上 n 个左线性无关的矩阵, 故 $\dim(\varphi(\mathcal{M}_1)) \geq n$. 由引理 3.7 知, $\dim(\varphi(\mathcal{M}_1)) \leq \dim(\mathcal{M}_1) = n$. 因此, $\dim(\varphi(\mathcal{M}_1)) = n$.

应用引理 3.4(2) 和 1.1 知, 存在 $Q' \in GL_{n'}(\mathbb{D})$ 使得 $\varphi(\mathcal{N}_1) \subseteq \mathcal{N}'_1 Q'$. 类似地, 我们可证 $m' \geq m$ 且 $\dim(\varphi(\mathcal{N}_1)) = m$. 由定理 2.1 可知, 存在矩阵 $P \in GL_{m'}(\mathbb{D})$ 、 $Q \in GL_{n'}(\mathbb{D})$ 以及 $\mathbb{D}$ 的一个环自同构 τ 使得

$$\varphi(X) = P \begin{pmatrix} X^\tau & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q, \quad X \in \mathbb{D}^{m \times n}.$$

情形 2 $\varphi(\mathcal{M}_1)$ 包含在一个类型二的极大集之中.

存在矩阵 $Q' \in GL_{n'}(\mathbb{D})$ 使得 $\varphi(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathcal{N}'_1 Q'$. 类似地, 我们可证 $m' \geq n$, $n' \geq m$, $\dim(\varphi(\mathcal{M}_1)) = n$ 和 $\dim(\varphi(\mathcal{N}_1)) = m$. 应用定理 2.1, 存在 $P \in GL_{m'}(\mathbb{D})$ 、 $Q \in GL_{n'}(\mathbb{D})$ 以及 $\mathbb{D}$ 的一个环反自同构 σ , 使得

$$\varphi(X) = P \begin{pmatrix} X^{\sigma T} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q, \quad X \in \mathbb{D}^{m \times n}.$$

证毕. $\square$

致谢 作者对审稿人的意见和帮助表示感谢.

参考文献

- 1 Hungerford T W. Algebra. New York: Springer-Verlag, 1974
- 2 Wan Z X. Geometry of Matrices. Singapore: World Scientific, 1996

- 3 Godsil C, Royle G. Algebraic Graph Theory. New York: Springer, 2001
- 4 Brouwer A E, Cohen A M, Neumaier A. Distance-Regular Graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989
- 5 Huang L P. Extending Hua's theorem on the geometry of matrices to Bezout domains. *Linear Algebra Appl*, 2012, 436: 2446–2473
- 6 Hua L K. A theorem on matrices over a sfield and its applications (in Chinese). *Acta Math Sinica Chin Ser*, 1951, 1: 109–163
- 7 Hua L K, Wan Z X. Classical Groups (in Chinese). Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1963
- 8 Chooi W L, Kwa K H, Lim M H. Coherence invariant maps on tensor products. *Linear Algebra Appl*, 2017, 516: 24–46
- 9 Huang L P. Geometry of 2×2 Hermitian matrices over any division ring. *Sci China Ser A*, 2009, 52: 2404–2418
- 10 Huang L P. Geometry of Matrices Over Ring. Beijing: Science Press, 2006
- 11 Huang L P, Wan Z X. Geometry of 2×2 Hermitian matrices. *Sci China Ser A*, 2002, 45: 1025–1037
- 12 Huang L P, Huang Z J, Li C K, et al. Graphs associated with matrices over finite fields and their endomorphisms. *Linear Algebra Appl*, 2014, 447: 2–25
- 13 Huang W L, Wan Z X. Adjacency preserving mappings of rectangular matrices. *Beiträge Algebra Geom*, 2004, 45: 435–446
- 14 Lim M H, Tan J J H. Preservers of pairs of bivectors with bounded distance. *Linear Algebra Appl*, 2009, 430: 564–573
- 15 Šemrl P. The optimal version of Hua's fundamental theorem of geometry of matrices. *Mem Amer Math Soc*, 2014, 232: 1–74
- 16 Huang W L, Šemrl P. The optimal version of Hua's fundamental theorem of geometry of square matrices—The low dimensional case. *Linear Algebra Appl*, 2016, 498: 21–57
- 17 Pazzis C, Šemrl P. Hua's fundamental theorem of geometry of rectangular matrices over EAS division rings. *J Algebra*, 2015, 439: 159–187
- 18 Wan Z X. Geometry of Hamiltonian matrices and its applications, I. *Algebra Colloq*, 1995, 2: 167–192
- 19 Hell P, Nešetřil J. Graphs and Homomorphisms. Oxford: Oxford University Press, 2004
- 20 Bennett M K. Affine and Projective Geometry. New York: John Wiley & Sons, 1995
- 21 Faure C A, Frölicher A. Modern Projective Geometry. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000

Graph homomorphisms on rectangular matrices over division rings I

Liping Huang & Kang Zhao

Abstract Let $\mathbb{D}^{m \times n}$ be the set of $m \times n$ matrices over a division ring $\mathbb{D}$. Two matrices $A, B \in \mathbb{D}^{m \times n}$ are adjacent if $\text{rank}(A - B) = 1$. By the adjacency, $\mathbb{D}^{m \times n}$ is a connected graph. Suppose that $\mathbb{D}, \mathbb{D}'$ are division rings with $|\mathbb{D}| \geq 4$ and $m, n, m', n' \geq 2$ are integers. Using the geometric method, we characterize every non-degenerate graph homomorphism φ from $\mathbb{D}^{m \times n}$ to $\mathbb{D}'^{m' \times n'}$ if $\varphi(0) = 0$ and φ preserves the dimensions of two standard maximal adjacent sets of different types in $\mathbb{D}^{m \times n}$. As a corollary, when $\mathbb{D}$ is an EAS (every endomorphism to be automatically surjective) division ring, we get algebraic formulas of every non-degenerate graph homomorphism from $\mathbb{D}^{m \times n}$ to $\mathbb{D}^{m' \times n'}$.

Keywords graph homomorphism, rectangular matrix, division ring, geometry of matrices, adjacency preserving map, weighted semi-affine map

MSC(2010) 15A33, 51A10, 51D20, 05C60

doi: 10.1360/N012017-00179