论 文

Grumiller 时空中的波动方程

姜敏, 丁浙杰, 王雪婧, 黎忠恒*

浙江工业大学理学院, 杭州 310023

* 联系人, E-mail: lizhongheng@vip.163.com

收稿日期: 2015-03-11; 接受日期: 2015-04-10; ; 网络出版日期: 2015-05-29

国家自然科学基金资助项目 (批准号: 11475148, 11075141, 11173021, 11305140)

摘要 研究背景时空对扰动的影响, 是探索黑洞特征的最好方法, 其关键是求解微扰粒子的波函数. 本文利用 Newman-Penrose 形式, 研究了 Grumiller 时空中各种无质量自旋粒子的波动方程, 得到径向和角向 Teukolsky 型主方程, 特别是, 本文将径向主方程化为 Heun 方程, 为研究 Grumiller 黑洞的微扰效应奠定了基础.

关键词 自旋粒子, Grumiller 时空, Heun 方程

PACS: 04.70.-s, 04.62.+v, 97.60.Lf

doi: 10.1360/SSPMA2015-00099

1 引言

根据目前天文的观测, 黑洞最有可能位于星系中心, 自然周围有非常复杂的物质分布. 即使一个孤立的黑洞, 由于 Hawking 辐射, 它的周围也存在各种粒子场. 因此一个真实的黑洞总是处于微扰态. 研究背景时空对扰动的影响, 是探索黑洞特征的最好方法. 1957 年, Regge 和 Wheeler^[1] 首先研究了史瓦西时空的微扰问题, 他们发现在一个线性微扰下, 史瓦西时空会保持稳定. 随后, Vishveshwara^[2] 和 Zerilli^[3] 等人把 Regge-Wheeler 方法推广到更一般情形, 特别是, 1962 年 Newman 和 Penrose^[4] 在引力场中引进了旋系数, 发现用旋系数表示的引力场、电磁场和 Dirac 场方程可以分离变量和精确求解^[5]. 这是一件令人非常惊讶的事, 因为即使平直时空可以精确求解的场方程都寥寥可数, 很难相信在复杂的弯曲时空中有更多精确解的场方程. 所以, 这项工作导致了对有一

个多世纪历史的双变量偏微分方程分离求解的重新审查. 1998 年, Suzuki 等人^[6,7] 在 Kerr-de Sitter 时空中, 把任意自旋的无质量粒子的微扰方程分离变量并转换成 Heun 方程, 为精确求解奠定了基础. 本文将证明 Grumiller 时空中, 各种自旋的无质量粒子的场方程也可以转换成 Heun 方程.

2 Grumiller 时空

2010 年, Grumiller^[8] 得到了下面一个新时空线元:

$$ds^2 = K^2 dt^2 - \frac{dr^2}{K^2} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1)$$

其中

$$K^2 = 1 - \frac{2M}{r} - \Lambda r^2 + 2ar, \quad (2)$$

引用格式: 姜敏, 丁浙杰, 王雪婧, 等. Grumiller 时空中的波动方程. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2015, 45: 070401

Jiang M, Ding Z J, Wang X J, et al. Wave equation in the Grumiller spacetime (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2015, 45: 070401, doi: 10.1360/SSPMA2015-00099

式中 Λ 是宇宙学常数, M 是黑洞质量, a 是 Rindler 加速度. 虽然线元中关于 t 和 r 的部分是从

$$S = - \int d^2x \sqrt{-g} [\Phi^2 R + 2(\partial\Phi)^2 - 6\Lambda\Phi^2 + 8a\Phi + 2], \quad (\Phi = r) \quad (3)$$

的二维标量 - 张量理论导出, 但整个线元可以解释为具有宇宙因子的 Einstein 场方程解, 其有效能动张量是各向异性流体

$$T_V^\mu = \text{diag}(-\rho, p_r, p_\perp, p_\perp)_V^\mu, \quad (4)$$

其中

$$\rho = -\frac{a}{2\pi r}, \quad p_r = -\rho, \quad p_\perp = \frac{1}{2}p_r. \quad (5)$$

显然 (1) 式是 Schwarzschild-(anti)de Sitter 线元中附加 Rindler 加速度项. 这一项在大距离变得非常重要, 它可以提供一个向内 ($r=0$ 处), 或向外的恒定加速度, 用以解释许多现象. 例如可以解释先驱者探测器以 $(8.74 \pm 1.33) \times 10^{-10} \text{ m s}^{-1}$ 加速度减速的异常现象^[9]. 另一方面, 还可以描述黑洞周围物态方程为 $W_q = -2/3$ 的 Quintessence 暗能量^[10].

线元 (1) 描述的时空的事件视界方程是

$$1 - \frac{2M}{r} - \Lambda r^2 + 2ar = 0. \quad (6)$$

根据代数方程理论, 只要

$$16a^3M + a^2 + 18aM\Lambda - 27M^2\Lambda^2 + \Lambda > 0, \quad (7)$$

事件视界方程 (6) 有两个正根和一个负根. 分别用 r_H , r_+ 和 r_- 表示, 并假定 $r_+ > r_H$. 那么 r_+ 表示宇宙视界, 而 r_H 表示黑洞视界. 另一方面, 如果

$$16a^3M + a^2 + 18aM\Lambda - 27M^2\Lambda^2 + \Lambda < 0, \quad (8)$$

且 $\Lambda < 0$, 那么方程 (6) 只有一个正实根, 另两个根为一对共轭复根. 这种情况我们规定 r_+ 和 r_- 为复数根, r_H 自然代表黑洞视界.

对于时空 (1), 可以选取如下类光标架:

$$l^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^{-2}, 1, 0, 0), \\ n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -K^2, 0, 0), \quad (9)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(0, 0, 1, \frac{i}{\sin\theta} \right),$$

由 (1) 和 (9) 式可得到 12 个旋系数以及 5 个 Weyl 标量, 结果如下:

$$\begin{aligned} \kappa = \lambda = \sigma = \nu = \tau = \pi = \varepsilon &= 0, \\ \beta &= \frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}r}, \quad \alpha = \pi - \beta = -\frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}r}, \\ \rho &= -\frac{1}{\sqrt{2}r}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}r^2}(-\Lambda r^3 + ar^2 + M), \\ \mu &= -\frac{1}{\sqrt{2}r^2}(-\Lambda r^3 + 2ar^2 + r - 2M), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 &= 0, \\ \Psi_2 &= -\frac{M}{r^3}. \end{aligned} \quad (11)$$

(10) 和 (11) 式告诉我们, Grumiller 度规是 Petrov D 型的.

3 Teukolsky 型主方程

通常高自旋的场方程不可能精确分离变量, 但在 Petrov D 型时空中, 场方程可以微扰线性化. 无质量标量场 (自旋 $s=0$)、中微子场 ($s=1/2$)、电磁场 ($s=1$)、Rarita-Schwinger 场 ($s=3/2$)、及引力场 ($s=2$) 的线性化方程可以统一表述成如下形式^[11,12]:

$$\begin{aligned} \{[D - (2s-1)\varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2s\rho - \bar{\rho}](\Delta - 2s\gamma + \mu) \\ - [\delta + \bar{\pi} - \bar{\alpha} - (2s-1)\beta - 2s\tau](\bar{\delta} + \pi - 2s\alpha) \\ - (2s-1)(s-1)\Psi_2\}\Phi_{+s} &= 0, \\ \{[\Delta + (2s-1)\gamma - \bar{\gamma} + 2s\mu + \bar{\mu}](D + 2s\varepsilon - \rho) \\ - [\bar{\delta} - \bar{\tau} + \bar{\beta} + (2s-1)\alpha + 2s\pi](\delta - \tau + 2s\beta) \\ - (2s-1)(s-1)\Psi_2\}\Phi_{-s} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$D = l^\mu \partial_\mu, \quad \Delta = n^\mu \partial_\mu, \quad \delta = m^\mu \partial_\mu. \quad (13)$$

式 (12) 中第一式对应自旋态 $p=s$, 而第二式对应自旋态 $p=-s$. 注意 $s=0$, 方程 (12) 的两个公式合二为一, 即 $\Phi_{+0} = \Phi_{-0} = \Phi_0$, 是共形不变标量方程

$$\left(\nabla^\mu \nabla_\mu + \frac{1}{6}R \right) \Phi_0 = 0 \quad (14)$$

的线性化形式. 其中 R 是时空的曲率标量.

利用旋系数 (10) 和 Weyl 标量 (11) 并利用如下变换^[13]:

$$\Phi_{+s}, \Phi_{-s} = r^{p-s} \Phi_p, \quad (15)$$

方程 (12) 可用如下一个方程统一描述:

$$\left\{ K^2 r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{r^2}{K^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 2(1+p) [2\Lambda r^3 - 3ar^2 - r + M] \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2rp(ar^2 + r - 3M)}{\Lambda r^3 - 2ar^2 - r + 2M} \frac{\partial}{\partial t} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + 2pi \frac{\cot \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2(2p+1)(p+1)(ar - \Lambda r^2) - p^2 \cot^2 \theta + p \right\} \Phi_p = 0. \quad (16)$$

方程 (16) 即为 Grumiller 时空中的 Teukolsky 型主方程. 假设 Φ_p 可以如下分离变量^[13]:

$$\Phi_p = R(r) {}_p Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (17)$$

那么, 方程 (16) 可以分解成径向 Teukolsky 型主方程和角向 Teukolsky 型主方程

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + (p+1) \frac{\Delta_r'}{\Delta_r} \frac{d}{dr} + \frac{(2p+1)(p+1)\Delta_r''}{6\Delta_r} + \frac{r^4 \omega^2}{\Delta_r^2} + \frac{i\omega p(4r - r^2 \Delta_r' / \Delta_r)}{\Delta_r} - \frac{(2p+1)(p+1) + 3\lambda_p^2}{3\Delta_r} \right\} R(r) = 0, \quad (18)$$

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - p^2 \cot^2 \theta + \frac{2ip \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + p + \lambda_p^2 \right] {}_p Y_l^m(\theta, \varphi) = 0, \quad (19)$$

其中 $\Delta_r = K^2 r^2$, 而

$$\lambda_p = \sqrt{(l-p)(l+p+1)} \quad (20)$$

为分离变量常数. ${}_p Y_l^m(\theta, \varphi)$ 是自旋加权球谐函数, 具体表达式为^[14]

$${}_p Y_l^m(\theta, \varphi) = \left[\frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+p)!(l-p)!} \frac{2l+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2l} \times \sum_r \binom{l-p}{r} \binom{l+p}{r+p-m} \times (-1)^{l-r-p} e^{im\phi} \left(\cot \frac{\theta}{2} \right)^{2r+p-m}, \quad (21)$$

其中

$$\binom{l-p}{r} = \frac{(l-p)!}{r!(l-p-r)!}. \quad (22)$$

4 Heun 方程

分析可知, 径向 Teukolsky 型主方程 (18) 含有 5 个正则奇点, $r = 0, r_H, r_+, r_-$ 及 ∞ . 显然不可能直接化为 4 个正则奇点的 Heun 方程. 为实现预期目标, 下面用改变自变量和改变函数两种方法进行研究.

改变自变量, 令

$$z = z(r) = \left(\frac{r_+}{r_+ - r_H} \right) \left(\frac{r - r_H}{r} \right), \quad (23)$$

有

$$\begin{aligned} r &= -\frac{r_H z_\infty}{z - z_\infty}, \\ \frac{d}{dr} &= \frac{(r_+ - r_H)}{r_+ r_H} (z - z_\infty)^2 \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{d^2}{dr^2} &= 2 \left(\frac{r_+ - r_H}{r_+ r_H} \right)^2 (z - z_\infty)^3 \frac{\partial}{\partial z} \\ &\quad + \left(\frac{r_+ - r_H}{r_+ r_H} \right)^2 (z - z_\infty)^4 \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ \Delta_r &= -\frac{\Lambda r_+^2 r_H^2 r - z(z-1)(z-z_r)}{(r_+ - r_H)(z - z_\infty)^4}, \\ \frac{\Delta_r'}{\Delta_r} &= -(z - z_\infty) \left(\frac{1}{r_+(z-1)} + \frac{1}{r_H z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r_-(z-z_r)} + \frac{1}{r_H z_\infty} \right), \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} z_\infty = z(\infty) &= \frac{r_+}{r_+ - r_H}, \\ z_r = z(r_-) &= \frac{r_+}{r_+ - r_H} \frac{r_- - r_H}{r_-}. \end{aligned} \quad (25)$$

将方程 (24) 代入方程 (18) 可得

$$\frac{d^2 R}{dz^2} + \left[\frac{p+1}{z} + \frac{p+1}{z-1} + \frac{p+1}{z-z_r} - \frac{2(2p+1)}{z-z_\infty} \right] \frac{dR}{dz}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{r_H^2 \omega^2 + i \omega p \Lambda r_H (r_H - r_+) (r_H - r_-)}{\Lambda^2 (r_+ - r_H)^2 (r_H - r_-)^2} \frac{1}{z^2} \right. \\
& + \frac{r_+^2 \omega^2 + i \omega p \Lambda r_+ (r_+ - r_H) (r_+ - r_-)}{\Lambda^2 (r_+ - r_H)^2 (r_+ - r_-)^2} \frac{1}{(z-1)^2} \\
& + \frac{r_-^2 \omega^2 + i \omega p \Lambda r_- (r_- - r_+) (r_- - r_H)}{\Lambda^2 (r_+ - r_-)^2 (r_H - r_-)^2} \frac{1}{(z-z_r)^2} \\
& - \left(\frac{(2p+1)(p+1)(\Lambda r_H^2 + \Lambda r_+ r_- + 1) - \lambda_p^2}{\Lambda r_+ (r_H - r_-)} \right. \\
& - \frac{\omega^2}{\Lambda^3} \frac{2r_H^2 (1 + 3\Lambda r_+ r_-)}{r_+ (r_+ - r_H)^2 (r_H - r_-)^3} \left. \right) \frac{1}{z} \\
& + \left(\frac{(2p+1)(p+1)(\Lambda r_+^2 + \Lambda r_H r_- + 1) + \lambda_p^2}{\Lambda r_H (r_+ - r_-)} \right. \\
& + \frac{\omega^2}{\Lambda^3} \frac{2r_+^2 (1 + 3\Lambda r_H r_-)}{r_H (r_+ - r_H)^2 (r_+ - r_-)^3} \left. \right) \frac{1}{z-1} \\
& + \left(\frac{(2p+1)(p+1)(\Lambda r_-^2 + \Lambda r_+ r_- + 1) + \lambda_p^2}{\Lambda r_H (r_H - r_-) (r_+ - r_-) z_\infty} \right. \\
& + \frac{\omega^2}{\Lambda^3} \frac{2(r_+ - r_H) r_-^2 (1 + 3\Lambda r_+ r_H)}{r_+ r_H (r_+ - r_-)^3 (r_H - r_-)^3} \left. \right) \frac{1}{z-z_r} \\
& + \frac{2(2p+1)(p+1)}{(z-z_\infty)^2} \\
& \left. - \frac{2a(2p+1)(p+1)(r_+ - r_H)}{\Lambda r_+ r_H} \frac{1}{z-z_\infty} \right] R = 0. \quad (26)
\end{aligned}$$

为了消除方程在 z_∞ 点的奇异性, 我们改变函数, 令

$$R(z) = z^{A_1} (z-1)^{A_2} (z-z_r)^{A_3} (z-z_\infty)^{2p+1} g(z), \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{-ir_H \omega}{(r_H - r_+) (r_H - r_-) \Lambda}, \\
&\text{或} \quad \frac{ir_H \omega}{(r_H - r_+) (r_H - r_-) \Lambda} - p, \\
A_2 &= \frac{-ir_+ \omega}{(r_+ - r_H) (r_+ - r_-) \Lambda}, \\
&\text{或} \quad \frac{ir_+ \omega}{(r_+ - r_H) (r_+ - r_-) \Lambda} - p, \\
A_3 &= \frac{-ir_- \omega}{(r_- - r_+) (r_- - r_H) \Lambda}, \\
&\text{或} \quad \frac{ir_- \omega}{(r_- - r_+) (r_- - r_H) \Lambda} - p,
\end{aligned} \quad (28)$$

则可得如下关系式

$$\frac{dR}{dz} = z^{A_1} (z-1)^{A_2} (z-z_r)^{A_3} (z-z_\infty)^{2p+1}$$

$$\times \left[\frac{d}{dz} + \left(\frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z-1} + \frac{A_3}{z-z_r} + \frac{2p+1}{z-z_\infty} \right) \right] g(z), \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 R}{dz^2} &= z^{A_1} (z-1)^{A_2} (z-z_r)^{A_3} (z-z_\infty)^{2p+1} \\
&\times \left[\frac{d^2}{dz^2} + 2 \left(\frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z-1} + \frac{A_3}{z-z_r} + \frac{2p+1}{z-z_\infty} \right) \frac{d}{dz} \right. \\
&- \left(\frac{A_1}{z^2} + \frac{A_2}{(z-1)^2} + \frac{A_3}{(z-z_r)^2} + \frac{2p+1}{(z-z_\infty)^2} \right) \\
&\left. + \left(\frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z-1} + \frac{A_3}{z-z_r} + \frac{2p+1}{z-z_\infty} \right)^2 \right] g(z). \quad (30)
\end{aligned}$$

把方程 (27)–(30) 代入方程 (26)

$$\begin{aligned}
&\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \left[\frac{2A_1 + p + 1}{z} + \frac{2A_2 + p + 1}{z-1} + \frac{2A_3 + p + 1}{z-z_r} \right] \frac{d}{dz} \right. \\
&\left. + \frac{\rho_+ \rho_- z + q}{z(z-1)(z-z_r)} \right\} g(z) = 0, \quad (31)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\rho_\pm &= 1 + \frac{3}{2}p \pm \frac{1}{2}p, \\
q &= \frac{-(1+p)(1+2p)r_+ r_- + \lambda_p^2 / \Lambda}{(r_+ - r_H)r_-}, \quad (32)
\end{aligned}$$

且参数满足如下关系式

$$\begin{aligned}
\rho_+ + \rho_- - (2A_3 + p + 1) &= (2A_1 + p + 1) + (2A_2 + p + 1) - 1 \\
&= 2p + 1 - 2A_3. \quad (33)
\end{aligned}$$

式 (31) 是标准 Heun 方程. 数学上, 它有 4 个正则奇点, 分别为 0, 1, z_r 和 ∞ , z 的取值范围为整个复平面. 物理上, 如果条件 (7) 满足, 真实时空要求 $r \in (r_H, r_+)$, 从式 (23) 有 $z \in (0, 1)$; 如果条件 (8) 满足, 真实时空要求 $r \in (r_H, \infty)$, 从式 (23) 知, z 的取值在半径为 $\{[\text{Re}(z_\infty)]^2 + [\text{Im}(z_\infty)]^2\}^{1/2}$ 的圆内区域.

Heun 方程解完全由奇点及指标决定, 或者说只能得到某一奇点邻域的解析解. 有趣的是 Heun 方程共有 192 个不同的解, 它们分别对应 4 个正则奇点 $\{0, 1, z_r, \infty\}$ 的 24 个置换. 我们可以根据需要选取适合的解描述物理现象, 例如根据 Heun 方程在 $z=0$ 附近的解^[15], 容易得到黑洞事件视界附近的各种无质量自旋粒子的径向波函数的解析解为

$$R(z) = z^{A_1} (z-1)^{A_2} (z-z_r)^{A_3} (z-z_\infty)^{2p+1}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^v y_{v+n}(z), \quad (34)$$

其中

$$y_v(z) = {}_2F_1(-v, v + \tau; 2A_1 + p + 1; z), \quad (35)$$

为超几何函数, v 为特征指数, $\tau = 2p + 1 - 2A_3$. 展开系数 c_n^v 满足如下递推关系 [6]:

$$\alpha_n^v c_{n+1}^v + \beta_n^v c_n^v + \gamma_n^v c_{n-1}^v = 0, \quad (36)$$

其中

$$\alpha_n^v = -\frac{(v+n+\tau-\rho_-+1)(v+n+\tau-\rho_++1)}{(2v+2n+\tau+2)(2v+2n+\tau+1)} \times (v+n+1)(v+n+2A_2+p+1), \quad (37)$$

$$\beta_n^v = \frac{J_n^v}{(2v+2n+\tau+1)(2v+2n+\tau-1)} - z_r(v+n)(v+n+\tau)+q, \quad (38)$$

$$\gamma_n^v = -\frac{(v+n+\rho_+-1)(v+n+\rho_- - 1)}{(2v+2n+\tau-2)(2v+2n+\tau-1)} \times (v+n+2A_1+p)(v+n+\tau-1), \quad (39)$$

其中

$$J_n^v = 2(2A_3+p+1)(v+n+\tau)(A_1-A_2)$$

$$+ [2(v+n)(v+n+\tau) + (2A_1+p+1)(\tau-1)] \times [(v+n)(v+n+\tau) + \rho_+\rho_-]. \quad (40)$$

为了保证级数收敛, v 需满足以下条件:

$$R_n(v)L_{n-1}(v) = 1, \quad (41)$$

$$\text{其中 } R_n(v) = \frac{c_n^v}{c_{n-1}^v}, L_n(v) = \frac{c_n^v}{c_{n+1}^v}.$$

5 结论

本文利用 Newman-Penrose 形式, 研究了 Grumiller 时空的性质, 证明了 Grumiller 时空是一个 Petrov D 型时空. 在此基础上, 得到了任意自旋的无质量粒子微扰方程的 Teukolsky 型主方程. 通过对其分离变量发现, 角向主方程的解是自旋加权球谐函数, 而径向主方程含有 5 个正则奇点, 直接求解相当困难. 通过变换自变量和变换函数的方法, 将径向 Teukolsky 型主方程转换成 Heun 方程, 使人们容易从 Heun 方程的解得到黑洞背景中各类无质量粒子的波函数, 从而为研究这类黑洞的特征奠定了基础.

参考文献

- 1 Regge T, Wheeler J A. Stability of a Schwarzschild singularity. *Phys Rev*, 1957, 108: 1063–1069
- 2 Vishveshwara C V. Stability of the Schwarzschild metric. *Phys Rev D*, 1970, 1: 2870–2879
- 3 Zerilli F J. Perturbation analysis for gravitational and electromagnetic radiation in a Reissner-Nordström geometry. *Phys Rev D*, 1974, 9: 860–868
- 4 Newman E, Penrose R. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *J Math Phys*, 1962, 3: 566–578
- 5 Teukolsky S A. Perturbations of a rotating black hole. I. Fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations. *Astrophys J*, 1973, 185: 635–647
- 6 Suzuki H, Takasugi E, Umetsu H. Analytic solutions of the Teukolsky equation in Kerr-de Sitter and Kerr-Newman-de Sitter geometries. *Prog Theor Phys*, 1998, 102: 253–272
- 7 Suzuki H, Takasugi E, Umetsu H. Perturbations of Kerr-de Sitter black hole and Heun's equations. *Prog Theor Phys*, 1998, 100: 491–505
- 8 Grumiller D. Model for gravity at large distances. *Phys Rev Lett*, 2010, 105: 211303
- 9 Anderson J D, Laing P A, Lau E L, et al. Indication, from Pioneer 10/11, Galileo, and Ulysses data, of an apparent anomalous, weak, long-range acceleration. *Phys Rev Lett*, 1998, 81: 2858–2861
- 10 Kiselev V V. Quintessence and black holes. *Class Quant Grav*, 2003, 20: 1187–1197
- 11 Li Z H. Quantum corrections to the entropy of a Reissner-Nordström black hole due to spin fields. *Phys Rev D*, 2000, 62: 024001
- 12 Torres del Castillo G F T. The Teukolsky-Starobinsky identities in type D vacuum backgrounds with cosmological constant. *J Math Phys*, 1988, 29: 2078–2083
- 13 Li Z H. Quantum ergosphere and Hawking process. *Mod Phys Lett A*, 1999, 14: 1951–1960
- 14 Goldberg J N, Macfarlane A J, Newman E T, et al. Spin's spherical harmonics and δ . *J Math Phys*, 1967, 8: 2155–2161

15 Ronveaux A. Heun's Differential Equation. Oxford: Oxford University Press, 1995. 45–58

Wave equation in the Grumiller spacetime

JIANG Min, DING ZheJie, WANG XueJing & LI ZhongHeng*

College of Science, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China

A good way to explore the characteristics of a black hole is to consider the influence of perturbation due to background spacetime. The key to perturbation is to solve the wave function of the test particles. The main purpose of this paper is to study the perturbations of the Grumiller black hole. The Grumiller metric includes a Rindler term, which leads to an anomalous acceleration in geodesics of test particles. We investigate the perturbation equations of the massless scalar, neutrino, electromagnetic, Rarita-Schwinger and gravitational fields propagating on this background by using Newman-Penrose formalism. We obtain the Teukolsky-type master equation governing these fields. The master equation can be separated into its angular and radial parts. The former is the equation of a spin-weighted spherical harmonic, and the latter is an Heun's equation in disguise, for which we are able to use a known technique to analyze solutions. As examples, the radial wave function near the event horizon is given. All these results are the foundation for the study of perturbation effect of the Grumiller black hole.

particles with spin, Grumiller spacetime, Heun's equation

PACS: 04.70.-s, 04.62.+v, 97.60.Lf

doi: 10.1360/SSPMA2015-00099