Ahlfors 正则空间上的开集分解与加倍测度

王小华^{①②*}, 文志雄^③

① 中央财经大学中国经济与管理研究院, 北京 100081;

② 深圳大学高级研究中心, 深圳 518060;

③ 华中科技大学数学与统计学院, 武汉 430074

E-mail: fridman_wxh@163.com, zhi-xiong.wen@mail.hust.edu.cn

收稿日期: 2011-06-30; 接受日期: 2011-08-29; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11026158, 10971056 和 11071090) 资助项目

摘要 对于一致完全的加倍度量空间建立了 Whitney 分解定理. 作为应用, 借助于 Ahlfors 正则空间上的加倍测度描述了它的任意非空闭集的 Whitney 修正集上的加倍测度.

关键词 一致完全 加倍度量空间 Ahlfors 正则空间 Whitney 修正集 Whitney 修正测度 加倍测度

MSC (2000) 主题分类 28A80

1 引言和主要结论

设 (X, d) 是一个度量空间. 用 $B(x, r)$ 表示中心 $x \in X$ 、半径 $r > 0$ 的球.

定义 1 设 E 是度量空间 X 中的一个非空闭集. 称 X 中的可数 Borel 子集族 $\mathcal{W}$ 是 $X \setminus E$ 的一个 Whitney 分解, 如果它满足以下三个条件:

(W1) $\cup_{Q \in \mathcal{W}} Q = X \setminus E$;

(W2) $\mathcal{W}$ 中的任意两个 Borel 集不交;

(W3) 存在常数 $K \geq 1$, 对 $\mathcal{W}$ 中的每一个 Borel 集 Q , 存在 $x \in X$ 满足

$$B(x, K^{-1}|Q|) \subset Q \quad \text{且} \quad K^{-1}|Q| \leq \text{dist}(Q, E) \leq K|Q|,$$

其中 $\text{dist}(Q, E) = \inf_{x \in Q, y \in E} |x - y|$ 表示 E 与 Q 之间的距离, $|Q|$ 表示集合 Q 的直径.

Euclid 空间中开集的 Whitney 分解定理是研究许多分析问题的一個基本工具, 见文献 [1, 2]. 本文的第一个主要结果证明了一致完全的加倍空间中每一个开集都存在 Whitney 分解.

定理 1 假设 X 是一致完全的加倍空间, E 是 X 中的一个闭集, 则 $X \setminus E$ 存在 Whitney 分解.

称度量空间 X 上一个 Borel 测度 μ 是加倍的, 如果存在常数 $H \geq 1$, 使得对 X 中的每一个球 $B(x, r)$, 都有

$$0 < \mu(B(x, 2r)) \leq H\mu(B(x, r)) < +\infty.$$

其中 H 称为加倍测度 μ 的加倍常数. 有时为了强调加倍常数, 也称 μ 是 H -加倍测度.

定义 2 设 E 是 X 中的一个闭集, $\mathcal{W}$ 是 $X \setminus E$ 的一个 Whitney 分解. 在 $\mathcal{W}$ 的每一个 Borel 集中各任取一个点组成 F , 称 $E \cup F$ 是 E 的一个 Whitney 修正.

英文引用格式: Wang X H, Wen Z X. The decomposition of open subsets in Ahlfors regular spaces and doubling measures (in Chinese). Sci Sin Math, 2011, 41(11): 971–980, doi: 10.1360/012011-487

当强调分解 $\mathcal{W}$ 时, 将 F 记为 $F(\mathcal{W})$. 往下, 对每个 $x \in F(\mathcal{W})$, 用 Q_x 表示 $\mathcal{W}$ 中含 x 的那个 Borel 集. 很明显, 闭集 E 的 Whitney 修正集通常不是唯一的.

定义 3 设 $W = E \cup F(\mathcal{W})$ 是闭集 $E \subset X$ 的一个 Whitney 修正集, ν 是 W 上的一个测度, μ 是 X 上的一个测度. 如果在集合 E 上有 $\nu \equiv \mu$, 且对每个 $x \in F$ 有 $\nu(\{x\}) = \mu(Q_x)$, 则称测度 ν 为测度 μ 在 X 上的 Whitney 修正.

由定义可见, X 上任何一个测度在 W 上的 Whitney 修正测度都是唯一的, 但 X 上两个不同的测度在 W 上的 Whitney 修正测度可能相等.

Kaufman 和 Wu^[3] 引入了直线上一种特殊的 Whitney 修正集与 Whitney 修正测度, 证明了某些 Whitney 修正集上既有纯原子的也有非纯原子的加倍测度. Wang 等^[2] 刻画了 Euclid 空间中 Whitney 修正集上的加倍测度, 并证明了存在度量空间 X 以及 X 上的非拟对称自同胚 f , 使得 μ 是 X 上的加倍测度当且仅当它的象测度 $\mu \circ f^{-1}$ 是加倍的. 本文继续研究 s -Ahlfors 正则空间中 Whitney 修正集上的加倍测度, 证明了下面的定理.

定理 2 设 X 是 s -Ahlfors 正则空间, $W = E \cup F(\mathcal{W})$ 是闭集 $E \subset X$ 的一个 Whitney 修正集, ν 是 X 上的一个测度. 那么 ν 是 W 上的加倍测度当且仅当存在 X 上的一个加倍测度 μ 使得 ν 是测度 μ 在 W 上的 Whitney 修正.

经典分析中许多重要定理, 如 Lebesgue 微分定理, Hardy-Littlewood 极大函数定理等, 在加倍度量测度空间中仍然成立 (参见 [4]). 这直接导致了度量空间上加倍测度的研究. 关于加倍测度的存在性, 现已知道: 每一个完备的加倍度量空间上都存在加倍测度 (参见 [5] 和 [6]). 特别地, $\mathbb{R}^n$ 中的每一个闭集上存在加倍测度. 但有例子说明 $\mathbb{R}^n$ 中的 Jordan 区域上不一定存在加倍测度 (见 [7]). 当已知一个度量空间上存在加倍测度后, 一个更困难的问题是描述其上的加倍测度. 对于 Euclid 空间, 通常的做法是联系加倍测度到适当的映射. 例如, 直线上的加倍测度对应到拟对称映射, 高维情形没有类似的简单描述, 研究结果参见 [8]. 迄今, 加倍测度能被较好描述的度量空间的例子是少见的. 本文所讨论的 Whitney 修正集是完备的一致完全的加倍空间 X 中的闭集, 故支撑加倍测度. 根据 Whitney 修正集的构造特点, 定理 2 提供了其上加倍测度的一个理想描述.

2 主要引理

本文记号约定: 用 $W = E \cup F(\mathcal{W})$ 表示闭集 $E \subset X$ 的一个给定的 Whitney 修正集. 用 K 表示 Whitney 分解 $\mathcal{W}$ 所满足的条件 (W3) 中的常数. 简称 $\mathcal{W}$ 中的 Borel 集为 $\mathcal{W}$ -集. 用 H 表示一个常数, 它仅依赖于 K , 空间 X 的一致完全性常数, 以及相关加倍测度的加倍常数, 每次出现时不必相等.

引理 1 设 $x \in W$, $r > 0$, $\lambda > 0$, 令 $A = \{Q \in \mathcal{W} : Q \cap B(x, r) \neq \emptyset\}$.

(1) 当 $x \in E$ 时, 有 $\cup_{Q \in A} Q \subset B(x, 2Kr)$.

(2) 当 $x \in F$ 时, 且 $|Q_x| \leq \lambda r$ 时, 有 $\cup_{Q \in A} Q \subset B(x, 3K^2(1 + \lambda)r)$.

证明 如果 $A = \emptyset$, 则结论显然成立. 不妨设 $A \neq \emptyset$.

(1) 对任意 $Q \in A$, 利用 Whitney 分解的条件, 由 $x \in E$ 及 $Q \cap B(x, r) \neq \emptyset$ 知

$$|Q| \leq K \operatorname{dist}(Q, E) \leq Kr,$$

因此, $\cup_{Q \in A} Q \subset B(x, r + Kr) \subset B(x, 2Kr)$.

(2) 对任意 $Q \in A$, 利用 Whitney 分解的条件, $|Q_x| \leq \lambda r$ 及 $Q \cap B(x, r) \neq \emptyset$ 有

$$|Q| \leq K \operatorname{dist}(Q, E)$$

$$\begin{aligned}
&\leq K(\text{dist}(Q_x, E) + |Q_x| + \text{dist}(Q_x, Q)) \\
&\leq K(2K|Q_x| + r) \\
&\leq 2K^2(1 + \lambda)r,
\end{aligned}$$

因此, $\cup_{Q \in A} Q \subset B(x, r + 2K^2(1 + \lambda)r) \subset B(x, 3K^2(1 + \lambda)r)$. $\square$

引理 2 设 $x \in X \setminus E$, Q_{x^*} 是含 x 的 $\mathcal{W}$ -集, $x^* \in F$. 如果 $r > 2K|Q_{x^*}|$, 那么 $B(x, r) \cap E \neq \emptyset$.

证明 由 $r > 2K|Q_{x^*}|$ 及条件 (W3) 即得

$$\text{dist}(x, E) \leq \text{dist}(Q_{x^*}, E) + |Q_{x^*}| \leq (K + 1)|Q_{x^*}| \leq 2K|Q_{x^*}| < r.$$

引理 3 设 $x \in X \setminus E$, Q_{x^*} 是含 x 的 $\mathcal{W}$ -集, $x^* \in F$, 令 $A = \{y \in F : Q_y \cap B(x, r) \neq \emptyset\}$. 若 $\alpha < K^{-1}$, $r < \alpha|Q_{x^*}|$, 则

(1) $E \cap B(x, r) = \emptyset$, 且 $\text{card}(A) \leq M$, 亦即 $B(x, r)$ 能被不多于 M 个 $\mathcal{W}$ -集覆盖, 或 $B(x, r)$ 至多包含 M 个 F 中的点;

(2) $\forall y, z \in \{y \in F : Q_y \cap B(x, r) \neq \emptyset\}$, 有 $H^{-1}|Q_z| \leq |Q_y| \leq H|Q_z|$;

(3) 如果 ν 是 Whitney 修正集 W 上的加倍测度, 则 $\forall y, z \in A$, 有 $H^{-1}\nu(\{z\}) \leq \nu(\{y\}) \leq H\nu(\{z\})$;

(4) 如果 μ 是 X 上的加倍测度, 则 $\forall y, z \in A$, 有 $H^{-1}\mu(Q_z) \leq \mu(Q_y) \leq H\mu(Q_z)$.

其中 M, H 是常数, 且仅依赖 α, K 和空间以及测度的加倍常数.

证明 (1) 因为 $\text{dist}(x, E) \geq \text{dist}(Q_{x^*}, E) \geq \frac{1}{K}|Q_{x^*}| > r$, 因此 $E \cap B(x, r) = \emptyset$. 任取 $y \in A$, 有

$$\text{dist}(Q_{x^*}, E) \leq \text{dist}(Q_{x^*}, Q_y) + |Q_y| + \text{dist}(Q_y, E) \leq r + (K + 1)|Q_y|.$$

于是

$$|Q_y| \geq (\text{dist}(Q_{x^*}, E) - r)/(K + 1) \geq (|Q_{x^*}|/K - r)/(K + 1) \geq \frac{1 - \alpha K}{K(K + 1)}|Q_{x^*}|. \quad (2.1)$$

利用 Whitney 分解的条件, 存在球 $B(y^*, \frac{|Q_y|}{K}) \subset Q_y$, 其中 $y^* \in X$. 结合不等式 (2.1) 有

$$B\left(y^*, \frac{1 - \alpha K}{K^2(K + 1)}|Q_{x^*}|\right) \subset Q_y.$$

于是

$$\mathcal{H}^s(Q_y) \geq \mathcal{H}^s\left(B\left(y^*, \frac{1 - \alpha K}{K^2(K + 1)}|Q_{x^*}|\right)\right) \geq C^{-1}\left(\frac{1 - \alpha K}{K^2(K + 1)}|Q_{x^*}|\right)^s. \quad (2.2)$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
|Q_y| &\leq K\text{dist}(Q_y, E) \\
&\leq K(\text{dist}(Q_y, Q_{x^*}) + |Q_{x^*}| + \text{dist}(Q_{x^*}, E)) \\
&\leq K(r + (K + 1)|Q_{x^*}|) \\
&= Kr + (K^2 + K)|Q_{x^*}| \\
&\leq (\alpha K + K^2 + K)|Q_{x^*}|.
\end{aligned} \quad (2.3)$$

因此

$$\bigcup_{y \in A} Q_y \subset B(x, r + (\alpha K + K^2 + K)|Q_{x^*}|) \subset B(x, (\alpha + \alpha K + K^2 + K)|Q_{x^*}|),$$

所以

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{y \in A} Q_y\right) \leq C((\alpha + \alpha K + K^2 + K)|Q_{x^*}|)^s. \quad (2.4)$$

结合不等式 (2.2) 和 (2.4), 有

$$(\text{card} A)C^{-1}\left(\frac{1 - \alpha K}{K^2(K + 1)}|Q_{x^*}|\right)^s \leq C((\alpha + \alpha K + K^2 + K)|Q_{x^*}|)^s.$$

因此, $\text{card}\{y \in F : Q_y \cap B(x, r) \neq \emptyset\} \leq M$, 其中 M 仅依赖 α, K 和空间的加倍常数.

(2) 任取 $y, z \in A$. 使用不等式 (2.1) 和 (2.3), 立得结论.

(3) 任取 $y, z \in A$. 由引理 3(2) 即得

$$\begin{aligned} \text{dist}(y, z) &\leq \text{dist}(Q_y, Q_z) + |Q_y| + |Q_z| \\ &\leq 2r + |Q_y| + H|Q_y| \\ &\leq \frac{\alpha}{2}|Q_{x^*}| + (H + 1)|Q_y| \\ &\leq H|Q_y|, \end{aligned}$$

于是 $z \in B(y, H|Q_y|)$. 由于 ν 是加倍的, 因此

$$\begin{aligned} \nu(\{z\}) &\leq \nu(B(y, H|Q_y|)) \\ &\leq H\nu(B(y, (2K)^{-1}|Q_y|)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

由引理 3(1), $B(y, (2K)^{-1}|Q_y|)$ 至多包含 M 个 F 中的点, 记为 $x, y_1, \dots, y_m$, 其中 $m < M$. 于是

$$\nu(B(y, (2K)^{-1}|Q_y|)) = \nu(\{y, y_1, \dots, y_m\}). \quad (2.6)$$

记 $d_i = |y - y_i|$, $i = 1, \dots, m$. 不妨假设

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_m.$$

由 ν 的加倍性质即得,

$$\nu(\{y, y_1, \dots, y_i\}) \leq H\nu(\{y, y_1, \dots, y_{i-1}\}), \quad i = 1, \dots, m.$$

因此, $\nu(\{y, y_1, \dots, y_m\}) \leq H\nu(\{y\})$, 结合不等式 (2.5) 和 (2.6) 即得 $\nu(\{z\}) \leq H\nu(\{y\})$. 类似可证 $\nu(\{y\}) \leq H\nu(\{z\})$.

(4) 任取 $y, z \in A$. 由引理 3(2) 及条件 (W3), 存在 $y^* \in X$ 满足

$$B(y^*, K^{-1}|Q_y|) \subset Q_y \quad \text{并且} \quad Q_z \subset B(y, H|Q_y|) \subset B(y^*, (H + 1)|Q_y|).$$

因此

$$\mu(Q_z) \leq \mu(B(y^*, (H + 1)|Q_y|)) \leq H\mu(B(y^*, K^{-1}|Q_y|)) \leq H\mu(Q_y).$$

类似可证 $\mu(Q_y) \leq H\mu(Q_z)$.

3 定理的证明

3.1 定理 1 的证明

为了证明定理 1, 我们首先叙述 Käenmäki 等在文献 [9] 中所证明的如下命题.

命题 1 设 X 是加倍度量空间, $0 < r < 1/3$, 则存在一族 Borel 集 $\{Q_{k,i} \mid k \in \mathbb{Z}, i \in N_k \subset \mathbb{N}\}$ 满足如下条件:

- 1) $\forall k \in \mathbb{Z}, X = \cup_{i \in N_k} Q_{k,i}$;
- 2) 若 $k, m \in \mathbb{Z}, k \geq m, i \in N_k, j \in N_m$, 则 $Q_{k,i} \cap Q_{m,j} = \emptyset$ 或 $Q_{k,i} \subset Q_{m,j}$;
- 3) $\forall k \in \mathbb{Z}, i \in N_k, \exists x_{k,i} \in X$ 使得 $B(x_{k,i}, cr^k) \subset Q_{k,i} \subset B(x_{k,i}, Cr^k)$, 其中 $c = \frac{1}{2} - \frac{r}{1-r}, C = \frac{1}{1-r}$;
- 4) $\exists x_0 \in X$, 使得 $\forall k \in \mathbb{Z}, \exists i \in N_k$, s.t. $B(x_0, cr^k) \subset Q_{k,i}$;
- 5) $\forall k \in \mathbb{Z}$, 都有 $\{x_{k,i} \mid i \in N_k\} \subset \{x_{k+1,i} \mid i \in N_{k+1}\}$.

我们现在使用命题 1 证明定理 1. 由命题 1, 存在 Borel 集族 $\{Q_{k,i} \mid k \in \mathbb{Z}, i \in N_k \subset \mathbb{N}\}$ 满足命题 1 结论. 令

$$\mathbf{F}_k = \{Q_{k,i} \mid i \in N_k\},$$

再令

$$\Omega_k = \{x \in X \mid cr^k < \text{dist}(x, F) \leq ar^{k-1}\},$$

其中 $a > 0$ 是一个待定的常数, 显然, $X \setminus F = \cup_{-\infty}^{+\infty} \Omega_k$. 记

$$\mathbf{F}_* = \{Q \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } Q \in \mathbf{F}_k, Q \cap \Omega_k \neq \emptyset\}.$$

设 $Q \in \mathbf{F}_k$, 由于 X 是一致完全加倍度量空间, 结合命题 1 的结论 3), 则存在常数 $\tilde{c}, \tilde{C}$ 使得 $\tilde{c}r^k \leq |Q| \leq \tilde{C}r^k$, 而 $Q \in \mathbf{F}_*$, 所以存在 $x \in Q \cap \Omega_k$, 这就推出

$$\text{dist}(Q, F) \leq \text{dist}(x, F) \leq ar^{k-1} \leq \frac{a}{\tilde{c}r} |Q|,$$

而且

$$\text{dist}(Q, F) \geq \text{dist}(x, F) - |Q| > ar^k - \tilde{C}r^k \geq \frac{(a - \tilde{C})}{\tilde{C}} |Q|.$$

由于 $a > 0$ 是任意的, 并且由命题的结论 3), 我们一定可以找到 $K > 1$ 使得定理结论 (W3) 成立.

显然, $\mathbf{F}_*$ 满足定理的 (W1) 和 (W3). 剩下我们将精化所做的挑选. 为此, 需要下面简单的事实: 设 Q_1 和 Q_2 是分别由 $\mathbf{F}_{k_1}$ 和 $\mathbf{F}_{k_2}$ 中选取的两个 Borel 集, 如果 Q_1 和 Q_2 相交, 则一定是一个被另一个包含. 特别地, 如果 $k_1 \geq k_2$, 则 $Q_1 \subset Q_2$. 现从任何一个 $Q \in \mathbf{F}_*$ 开始, 并考虑在 $\mathbf{F}_*$ 中包含 Q 的极大 Borel 集. 设 $Q' \in \mathbf{F}_*, Q \subset Q'$, 则

$$|Q'| \leq \text{dist}(Q', F) \leq \text{dist}(Q, F) \leq K|Q|.$$

这说明存在最大的 Borel 集包含 Q . 另外, 由上述简单的事实说明, 极大 Borel 集是唯一的. 现令 $\mathbf{F}$ 是 $\mathbf{F}_*$ 中所有的极大 Borel 集所组成的集族, 则 $\mathbf{F}$ 满足定理的要求.

3.2 定理 2 的证明

3.2.1 定理 2 必要性的证明

设 $W = E \cup F(\mathcal{W})$ 是闭集 $E \subset X$ 的一个 Whitney 修正集, ν 是 W 上的一个加倍测度. 本节将作出 X 上的一个测度 μ , 使得 μ 在 X 上是加倍的且 μ 在集合 W 上的 Whitney 修正测度等于 ν .

构造测度 μ 的想法是将 F 的每个点上的 ν -测度按某种均匀意义下分布在它所在的 $\mathcal{W}$ -集上. 令

$$\mu(A) = \begin{cases} \nu(A), & \text{若 } A \subset E, \\ \rho_x \mathcal{H}^s(A), & \text{若 } A \subset Q_x, \text{ 其中 } x \in F, \end{cases}$$

其中 A 是 Borel 集, Q_x 是含 x 的 $\mathcal{W}$ -集, $\rho_x = \nu(\{x\})/\mathcal{H}^s(Q_x)$, $\mathcal{H}^s$ 是 X 上 s 维 Hausdorff 测度. 这定义了 X 上一个 Borel 测度. 因为在集 E 上有 $\nu \equiv \mu$ 且对每个 $x \in F$ 有 $\nu(\{x\}) = \mu(Q_x)$, 测度 μ 在 W 上的 Whitney 修正测度等于 ν . 问题的关键是要证明 μ 在 X 上具有加倍性质, 即要证明对任意球 $B(x, r) \subset X$ 有

$$\mu(B(x, 2r)) \leq H\mu(B(x, r)). \quad (3.1)$$

给定一个球 $B(x, r) \subset X$, 分四种情形来讨论.

情形 1 $x \in E$.

令 $A = \{Q \in \mathcal{W} : Q_y \cap B(x, 2r) \neq \emptyset\}$. 由引理 1(1),

$$B(x, 2r) \setminus E \subset \bigcup_{Q \in A} Q \subset B(x, 4Kr).$$

于是由测度 μ 的定义及测度 ν 的加倍性质有

$$\mu(B(x, 2r)) \leq \nu(B(x, 2r) \cap E) + \nu\left(\bigcup_{Q \in A} Q\right) \leq \nu(B(x, 4Kr)) \leq H\nu(B(x, r)). \quad (3.2)$$

另一方面, 令 $B = \{Q \in \mathcal{W} : Q \cap B(x, (2K)^{-1}r) \neq \emptyset\}$. 同样由引理 1(1),

$$B(x, (2K)^{-1}r) \setminus E \subset \bigcup_{Q \in B} Q \subset B(x, r).$$

于是由测度 μ 的定义及测度 ν 的加倍性质有

$$\mu(B(x, r)) \geq \nu(B(x, r) \cap E) + \nu\left(\bigcup_{Q \in B} Q\right) \geq \nu(B(x, (2K)^{-1}r)) \geq H\nu(B(x, r)). \quad (3.3)$$

结合不等式 (3.2) 和 (3.3) 即得 $\mu(B(x, 2r)) \leq H\mu(B(x, r))$.

情形 2 $x \in F$.

分三种子情形讨论.

(1) 当 $r > 4K|Q_x|$ 时, 则由引理 2 知, $B(x, r/2) \cap E \neq \emptyset$. 现任意取定一个点 $x^* \in E \cap B(x, r/2)$, 有 $B(x^*, r/2) \subset B(x, r)$ 和 $B(x, 2r) \subset B(x^*, 4r)$. 使用情形 1 的结论得

$$\mu(B(x, 2r)) \leq \mu(B(x^*, 4r)) \leq H\mu(B(x^*, r/2)) \leq H\mu(B(x, r)).$$

(2) 当 $r < (4K)^{-1}|Q_x|$ 时, 由引理 3(1), $B(x, 2r)$ 能被不多于 M 个 $\mathcal{W}$ -集 $Q_x, Q_{y_1}, \dots, Q_{y_m}$ 覆盖, 其中 $x, y_1, \dots, y_m \in F, m < M$. 由引理 3(2), 它们的直径可比. 另一方面, X 是 s -Ahlfors 正则空

间, 因而任意球的 s 维 Hausdorff 测度与其直径的 s 次方可比, 结合条件 (W3) 有, 任意 $\mathcal{W}$ - 集的 s 维 Hausdorff 测度与其直径的 s 次方可比. 所以, $\mathcal{H}^s(Q_x), \mathcal{H}^s(Q_{y_1}), \dots, \mathcal{H}^s(Q_{y_m})$ 可比. 由引理 3(3) 有 $\nu\{x\}, \nu\{y_1\}, \dots, \nu\{y_m\}$ 可比, 所以 $\rho_x, \rho_{y_1}, \dots, \rho_{y_m}$ 也可比, 因此

$$\frac{\mu(B(x, 2r))}{\mu(B(x, r))} \leq \frac{\max\{\rho_x, \rho_{y_1}, \dots, \rho_{y_m}\} \mathcal{H}^s(B(x, 2r))}{\min\{\rho_x, \rho_{y_1}, \dots, \rho_{y_m}\} \mathcal{H}^s(B(x, r))} \leq H. \quad (3.4)$$

(3) 当 $(4K)^{-1}|Q_x| \leq r \leq 4K|Q_x|$ 时, 令 $A = \{Q \in \mathcal{W} : Q \cap B(x, 2r) \neq \emptyset\}$. 因为 $x \in F$, 由引理 1(2), $\cup_{Q \in A} Q \subset B(x, \xi r)$, 其中 $\xi = 3K^2(1 + 4K)$. 于是由 μ 的定义以及 ν 的加倍性质即得

$$\mu(B(x, 2r)) \leq \nu(B(x, \xi r)) \leq H\nu(B(x, r)). \quad (3.5)$$

此外, 由引理 3(1), $B(x, (4K)^{-1}|Q_x|)$ 能被不多于 M 个 $\mathcal{W}$ - 集 $Q_x, Q_{y_1}, \dots, Q_{y_m}$ 覆盖, 其中 $x, y_1, \dots, y_m \in F$, $m < M$. 类似于子情形 (2), 有 $\rho_x, \rho_{y_1}, \dots, \rho_{y_m}$ 可比. 于是由测度 μ 的定义及测度 ν 的加倍性质有

$$\begin{aligned} \mu(B(x, r)) &\geq \mu(B(x, (4K)^{-1}|Q_x|)) \\ &\geq H|Q_x|^s \min\{\rho_x, \rho_{y_1}, \dots, \rho_{y_m}\} \\ &\geq H\mathcal{H}^s\left(Q_x \bigcup_{i=1}^m Q_{y_i}\right) \max\{\rho_x, \rho_{y_1}, \dots, \rho_{y_m}\} \\ &\geq H\nu(B(x, (4K)^{-1}|Q_x|)) \\ &\geq H\nu(B(x, 4K|Q_x|)) \\ &\geq H\nu(B(x, r)). \end{aligned}$$

最后, 这个不等式结合不等式 (3.5) 即得 $\mu(B(x, 2r)) \leq H\mu(B(x, r))$.

情形 3 $x \notin W$ 但 $B(x, r/2) \cap W \neq \emptyset$.

取定 $x^* \in B(x, r/2) \cap W$, 有 $B(x^*, r/2) \subset B(x, r)$, $B(x, 2r) \subset B(x^*, 4r)$. 利用情形 1 或者情形 2 的结论即得

$$\mu(B(x, 2r)) \leq \mu(B(x^*, 4r)) \leq H\mu(B(x^*, r/2)) \leq H\mu(B(x, r)).$$

情形 4 $B(x, r/2) \cap W = \emptyset$.

令 $D = \{y \in F : B(x, r/2) \cap Q_y \neq \emptyset\}$, 由 Whitney 分解, 存在 $z \in D$ 使得 $|Q_z| = \max_{y \in D} |Q_y|$. 取定 $x^* \in B(x, r/2) \cap Q_z$, 则 $B(x, 2r) \subset B(x^*, 3r)$. 由引理 3(1), 当 $|Q_z| > 4Kr$ 时, $\text{card}\{y \in F : B(x^*, 3r) \cap Q_y \neq \emptyset\} \leq M$, 于是 $\text{card}\{y \in F : B(x, 2r) \cap Q_y \neq \emptyset\} \leq M$. 即 $B(x, 2r)$ 能被不多于 M 个 $\mathcal{W}$ - 集覆盖. 分两种子情形讨论.

(1) 当 $|Q_z| > 4Kr$ 时, $B(x, 2r)$ 能被不多于 M 个 $\mathcal{W}$ - 集 $Q_{y_1}, \dots, Q_{y_m}$ 覆盖, 其中 $y_1, \dots, y_m \in F$, $m \leq M$. 类似情形 2(2) 可得:

$$\frac{\mu(B(x, 2r))}{\mu(B(x, r))} \leq \frac{\max\{\rho_{y_1}, \dots, \rho_{y_m}\} \mathcal{H}^s(B(x, 2r))}{\min\{\rho_{y_1}, \dots, \rho_{y_m}\} \mathcal{H}^s(B(x, r))} \leq H. \quad (3.6)$$

(2) 当 $|Q_z| \leq 4Kr$ 时, 令 $J = \{y \in F : B(x, r/4) \cap Q_y \neq \emptyset\}$, 显然 $J \neq \emptyset$, $J \subset D$. 由 $B(x, r/2) \cap W = \emptyset$ 即得, 若 $y \in J$, 则 $y \notin B(x, r/2)$, $Q_y \cap B(x, r/4) \neq \emptyset$, 于是 $|Q_y| \geq r/4$, 所以

$$\mathcal{H}^s(Q_y) \geq |Q_y|^s / C \geq \frac{r^s}{4^s C}. \quad (3.7)$$

由 $|Q_z| = \max_{y \in D} |Q_y| \leq 4Kr$, 有 $\cup_{y \in J} Q_y \subset B(x, (4K+1)r)$, 于是 $\mathcal{H}^s(\cup_{y \in J} Q_y) \leq C(4K+1)^s r^s$. 由不等式 (3.7) 即得 $(\text{card} J) \frac{r^s}{4^s C} \leq C(4K+1)^s r^s$, 进而 $\text{card} J \leq (4K+1)^s 4^s C^2$. 另一方面, 由 $B(x, r/4) \subset \cup_{y \in J} Q_y$, 则有 $\frac{r^s}{4^s C} \leq \mathcal{H}^s(B(x, r/4)) = \sum_{y \in J} \mathcal{H}^s(B(x, r/4) \cap Q_y)$. 于是存在 $y^* \in J \subset D$ 满足

$$\mathcal{H}^s(B(x, r/4) \cap Q_{y^*}) \geq \frac{r^s}{(\text{card} J) 4^s C} \geq \frac{r^s}{(4K+1)^s 16^s C^3}.$$

显然 $r/4 \leq |Q_{y^*}| \leq 4Kr$, 并且 $B(x, r) \subset B(y^*, (4K+2)r)$. 由引理 3(1), $B(y^*, (10K)^{-1}r)$ 能被不多于 M 个 $\mathcal{W}$ -集 $Q_{y^*}, Q_{y_1}, \dots, Q_{y_m}$ 覆盖, 其中 $y^*, y_1, \dots, y_m \in F$, $m < M$. 同样 $\rho_{y^*}, \rho_{y_1}, \dots, \rho_{y_m}$ 可比, 因此

$$\begin{aligned} \mu(B(x, r)) &\geq \mu(B(x, r/4) \cap Q_{y^*}) \\ &= \rho_{y^*} \mathcal{H}^s(B(x, r/4) \cap Q_{y^*}) \\ &\geq \frac{r^s}{(4K+1)^s 16^s C^3} \min\{\rho_{y^*}, \rho_{y_1}, \dots, \rho_{y_m}\} \\ &\geq H r^s \max\{\rho_{y^*}, \rho_{y_1}, \dots, \rho_{y_m}\} \\ &\geq H \nu(B(y^*, (10K)^{-1}r)) \\ &\geq H \nu(B(y^*, r)). \end{aligned}$$

若 $Q \in A = \{Q \in \mathcal{W} : Q \cap B(x, 2r) \neq \emptyset\}$, 因为 $|Q_z| \leq 4Kr$, 于是有

$$\begin{aligned} |Q| &\leq K \text{dist}(Q, E) \\ &\leq K(\text{dist}(Q_z, Q) + |Q_z| + \text{dist}(Q_z, E)) \\ &\leq K(4r + (K+1)|Q_z|) \\ &\leq K(4 + 4K(K+1))r \\ &\leq 12K^3 r. \end{aligned}$$

因此 $\cup_{Q \in A} Q \subset B(x, (12K^3+2)r) \subset B(y^*, (12K^3+2)r + (4K+1)r)$, 于是由测度 μ 的定义及测度 ν 的加倍性质有

$$\mu(B(x, 2r)) \leq \nu(B(y^*, (12K^3+2)r + (4K+1)r)) \leq H \nu(B(y^*, r)).$$

因此 $\mu(B(x, 2r)) \leq H \mu(B(x, r))$.

至此, 我们完成了定理 2 必要性部分的证明.

3.2.2 定理 2 充分性的证明

设 $W = E \cup F(\mathcal{W})$ 是闭集 $E \subset X$ 的一个 Whitney 修正集, μ 是 X 上的一个加倍测度, ν 是 μ 在集合 W 上的 Whitney 修正测度, 本节将证明 ν 在 W 上是加倍的. 给定一个球 $B(x, r) \subset X$, 分两种情形讨论.

情形 1 $x \in E$.

令 $A = \{Q \in \mathcal{W} : Q \cap B(x, 2r) \neq \emptyset\}$. 由引理 1(1) 可得 $\cup_{Q \in A} Q \subset B(x, 4Kr)$. 因为 ν 是测度 μ 在 W 上的 Whitney 修正, 由测度 μ 的加倍性质得

$$\nu(B(x, 2r)) \leq \mu(B(x, 4Kr)) \leq H \mu(B(x, r)), \quad (3.8)$$

另一方面, 令 $B = \{Q \in \mathcal{W} : Q \cap B(x, (2K)^{-1}r) \neq \emptyset\}$. 同样由引理 1(1), $\cup_{Q \in B} Q \subset B(x, r)$. 于是由测度 ν 的定义及测度 μ 的加倍性质有

$$\nu(B(x, r)) \geq \mu(B(x, (2K)^{-1}r)) \geq H\mu(B(x, r)). \quad (3.9)$$

结合不等式 (3.8) 和 (3.9) 即得 $\nu(B(x, 2r)) \leq H\nu(B(x, r))$.

情形 2 $x \in F$.

分三种子情形来讨论.

(1) 当 $r > 4K|Q_x|$ 时, 由引理 2, $B(x, r/2) \cap E \neq \emptyset$. 取 $x^* \in E \cap B(x, r/2)$. 则有 $B(x^*, r/2) \subset B(x, r)$ 和 $B(x, 2r) \subset B(x^*, 4r)$. 对点 x^* 使用情形 1 的结论即得 $\nu(B(x, 2r)) \leq H\nu(B(x, r))$.

(2) 当 $r < (4K)^{-1}|Q_x|$ 时, 由引理 3(1), $B(x, 2r)$ 能被不多于 M 个 $\mathcal{W}$ -集 $Q_x, Q_{y_1}, \dots, Q_{y_m}$ 覆盖, 其中 $m < M$, $x, y_1, \dots, y_m \in F$. 由引理 3(4), $\mu(Q_x), \mu(Q_{y_1}), \dots, \mu(Q_{y_m})$ 可比, 于是 $\nu(\{x\}), \nu(\{y_1\}), \dots, \nu(\{y_m\})$ 也可比, 因此

$$\frac{\nu(B(x, 2r))}{\nu(B(x, r))} \leq \frac{\nu\{x\} + \nu\{y_1\} + \dots + \nu\{y_m\}}{\nu\{x\}} \leq H.$$

(3) 当 $(4K)^{-1}|Q_x| \leq r \leq 4K|Q_x|$ 时, 令 $A = \{Q \in \mathcal{W} : Q \cap B(x, 2r) \neq \emptyset\}$. 因为 $x \in F$, 由引理 1(2), $\cup_{Q \in A} Q \subset B(x, \xi r)$, 其中 $\xi = 3K^2(1 + 4K)$. 因为 ν 是测度 μ 在 W 上的 Whitney 修正, 由测度 μ 的加倍性质即得

$$\nu(B(x, 2r)) \leq \mu(B(x, \xi r)) \leq H\mu(B(x, r)). \quad (3.10)$$

此外, 由引理 3(1), $B(x, (4K)^{-1}|Q_x|)$ 能被不多于 M 个 $\mathcal{W}$ -集 $Q_x, Q_{y_1}, \dots, Q_{y_m}$ 覆盖, 其中 $x, y_1, \dots, y_m \in F$, $m < M$. 类似情形 2(2), $\nu\{x\}, \nu\{y_1\}, \dots, \nu\{y_m\}$ 可比. 由测度 ν 的定义及测度 μ 的加倍性质有

$$\begin{aligned} \nu(B(x, r)) &\geq \nu\{x\} \\ &\geq H(\nu\{x\} + \nu\{y_1\} + \dots + \nu\{y_m\}) \\ &\geq H\mu\left(Q_x \bigcup_{i=1}^m Q_{y_i}\right) \\ &\geq H\mu(B(x, (4K)^{-1}|Q_x|)) \\ &\geq H\mu(B(x, 4K|Q_x|)) \\ &\geq H\mu(B(x, r)), \end{aligned}$$

再结合不等式 (3.10) 即得 $\nu(B(x, 2r)) \leq H\nu(B(x, r))$.

至此我们完成了定理 2 充分性部分的证明.

致谢 感谢湖北大学文胜友教授的帮助以及审稿人的宝贵建议.

参考文献

- 1 Illanes A. The space of Whitney decompositions. *Ann Inst Mat Univ Nac Autonoma Mexico*, 1988, 28: 47–61
- 2 Wang X H, Wen Z Y, Wen Z X. Doubling measures and nonquasisymmetric maps on Whitney modification sets in Euclidean spaces. *Illinois J Math*, 2008, 52: 1291–1300
- 3 Kaufman R, Wu J M. Two problems on doubling measures. *Rev Math Iberoamericana*, 1995, 11: 527–545

- 4 Heinonen J. Lectures on Analysis on Metric Spaces. New York: Springer-Verlag, 2001
- 5 Luukkainen J, Saksman E. Every complete doubling metric space carries a doubling measure. Proc Amer Math Soc, 1998, 126: 531–534
- 6 Vol’berg A L, Konyagin S V. On measures with the doubling condition. Math USSR-Izv, 1988, 30: 629–638
- 7 Saksman E. Remarks on the nonexistence of doubling measures. Ann Acad Sci Fenn Math, 1999, 24: 155–163
- 8 Semmes S. On the nonexistence of bilipschitz parameterizations and geometric problems about A_∞ -weights. Rev Math Iberoamericana, 1996, 12: 337–410
- 9 Käenmäki A, Rajala T, Suomala V. Existence of doubling measures via generalised nested cubes. Preprint, arXiv: 1011.0683, 2010
- 10 Hurri R. The weighted Poincare inequalities. Math Scand, 1990, 67: 145–160

The decomposition of open subsets in Ahlfors regular spaces and doubling measures

WANG XiaoHua & WEN ZhiXiong

Abstract We prove that Whitney’s decomposition theorem is true for any uniformly perfect doubling metric space. As an application, we describe doubling measures on the Whitney modification set of a nonempty closed subset in an Ahlfors regular space X , by means of doubling measures on X .

Keywords: uniformly perfect, doubling metric space, Ahlfors regular space, Whitney modification set, Whitney modification measure, doubling measure

MSC(2000): 28A80

doi: 10.1360/012011-487