研究通讯

一个 Ringel 猜想的证明

本文仅讨论简单无向图. 图 G 被称为是一个极大平面二部图 (以下简称为 mpb 图), 如果: 1) G 是二部图. 2) G 是平面图. 3) 若 $u, v \in V(G)$, $(u, v) \in E(G)$, 则 $G + (u, v)$ 或者不满足 1) 或者不满足 2).

为简便, 不妨将本文所提到的平面图本身视为它的一个平面嵌入.

设 H 是 G 的一个边导出子图. H 在 G 中的边补图, 记为 $\bar{H}$, 定义为 $E(G) \setminus E(H)$ 在 G 中的边导出子图. 特别地, 如果 T 是 G 的一棵树, 称 $\bar{T}$ 为 T 在 G 中的上树.

文献[1]的主要结果是:

定理 A 每一个 v 阶 2-连通 mpb 图均存在一个 $v-1$ 阶的树 T , 使得 $\bar{T}$ 也是一棵树.

定理 B 每一个 2-连通 mpb 图均存在树 T , 使得 $\bar{T}$ 也是一棵树.

文献[1]对定理 A 给出了证明, 而把定理 B 作为其推论. 并且猜想: 每一个 2-连通 mpb 图均存在一棵生成树 T , 使得 $\bar{T}$ 是一棵树.

不难证明, 基于定理 B, 为使其上树为树, 该树要么是 $v-1$ 阶的, 要么为生成树.

我们证明了该猜想是成立的. 主要结果为如下的两个定理.

定理 1 每一个 2-连通 mpb 图均存在一棵生成树 T , 使得 $\bar{T}$ 是一棵树.

定理 2 对于一个 2-连通 mpb 图 G , 下面两条陈述是等价的. (1) G 中存在不含孤立顶点的林 F , 使得 $\bar{F}$ 也是林. (2) G 中存在生成树 T , 使得 $\bar{T}$ 是一棵树.

参 考 文 献

- 1 Gerhard Ringel. Two trees in maximal planar bipartite graphs. J Graph Theory, 1993, 6: 755 ~ 758

欧阳克毅

(中国科学院应用数学研究所, 北京 100080)

刘彦佩

(北方交通大学数学系, 北京 100044)

无穷发散项与易项*

本文研究一类易项的归约性质. 关于本文记号和基本概念, 请参考文献[1~3]. 本文均是在 $\lambda\eta$ 系统中进行推理, 当写 $M=N$ 时, 意指 $\lambda\eta \vdash M=N$. 文献[2]中证明了, $\Omega \equiv (\lambda x. xx)(\lambda x. xx)$ 是易项. 黄目园等^[1]证明了, 所有 U 循环项都是易项. 设 $W \in \Lambda^0$ (Λ^0 为闭 λ 项的全体), 记 $F(W) = \{P: W \xrightarrow{\beta\eta} P\}$. 如果 W 满足

(1) W 是 0 阶的 (即 $F(W)$ 中任一项 P 都不是形如 λxM 的项),

(2) W 无 $\beta\eta$ 范式,

(3) W 对任 $P, P' \in F(W)$, P 不是 P' 的真子项,

则我们称 W 为无穷发散项.

定理 设 $W \in \Lambda^0$. 如果 W 是无穷发散项, 则 W 是易项.

不难看出 $\sigma\sigma(\lambda x. xx)$ 不是 U 循环项, 其中 $\sigma \equiv (\lambda xy. xx(yy))$. 但可以验证它是无穷发散项, 故是易项.

设 W 为任意选定的无穷发散项. 利用下面 4 个引理和 Jacopini^[3] 定理可以证明 W 是易项, 从而证明了本文的定理.