论文

平面 V 形切口塑性应力奇异性分析

牛忠荣^{①*}, 葛仁余^①, RECHO Naman^②, 程长征^①, 胡宗军^①^① 合肥工业大学土木与水利工程学院力学系, 合肥 230009;^② ERMESSE/EPF-Ecoles d'Ingénieurs, Sceaux 92330, France

*联系人, E-mail: niu-zr@hfut.edu.cn

收稿日期: 2012-11-23; 接受日期: 2013-07-04

国家自然科学基金资助项目(批准号: 11272111)

摘要 研究幂硬化塑性材料 V 形切口和裂纹尖端区域的应力奇异性. 首先在切口和裂纹区域采用自尖端径向度量的渐近位移场假设, 将其代入塑性全量理论的基本微分方程后, 推导出包含应力奇异指数和特征函数的非线性常微分方程特征值问题. 然后采用插值矩阵法迭代求解导出的控制方程, 得到一般的塑性材料 V 形切口和裂纹的前若干阶应力奇异阶和相应的特征函数. 通过两个算例给出了前若干个阶的应力奇异指数和特征函数, 表明文中方法计算一般塑性材料 V 形切口和裂纹应力奇异性的精度和有效性, 并对一般塑性材料 V 形切口和裂纹的奇异应力特征进行了讨论.

关键词 应力奇异性, V 形切口, 塑性, 硬化材料, 插值矩阵法

PACS: 62.20.Fe, 81.40.Lm, 46.35.+z

doi: 10.1360/132012-951

1 引言

结合材料 V 形切口和裂纹在工程结构中经常遇到, 如焊接点和碳纤维板加固结构, 这些结构的破坏通常始于切口或者裂纹尖端部. 目前根据线弹性理论研究 V 形切口和裂纹应力奇异性的文献较多, 事实上, 因为强烈的应力集中, 在尖端部位发生塑性变形, 线弹性理论解不能准确解释切口/裂纹尖端的开裂扩展. Hutchinson^[1], Rice^[2], Rice 和 Rosengren^[3]对幂硬化材料的裂纹尖端给出了第一阶奇异指数的精确解, 即著名的“HRR”解. 文献[4–6]根据应力渐近场假设研究了幂硬化材料裂纹尖端的高阶应力项.

因为塑性变形的非线性和奇异性, 对一般的 V 形切口的塑性应力奇异场问题研究较少, 尤其涉及多阶的应力奇异性. 已有文献的研究是用 Airy 应力函数法, Rahman 等人^[7]和 Xu 等人^[8]给出幂硬化结合材料的第一阶应力奇异指数; Chen 和 Ushijima^[9]将 V 形切口围绕尖端的环向剖分 N 个子楔形, 通过迭代获得 2 个应力奇异性指数和相应的应力角函数, 分别对应对称和反对称第 1 阶情形. Lazzarin 等人^[10]导出前 2 项应力特征函数表示的一阶常微分方程组, 采用 MATLAB 中试射法求解前 2 阶应力奇异性指数. Filippi 等人^[11]引入简化处理, 给出塑性材料 V 形切口第一阶奇异性阶和相应特征函数的近似解. 文献[12,13]对

引用格式: 牛忠荣, 葛仁余, RECHO Naman, 等. 平面 V 形切口塑性应力奇异性分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2014, 44: 79–90

Niu Z R, Ge R Y, Recho N, et al. Evaluation of plastic stress singularities of plane V-notches and cracks in hardening materials (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2014, 44: 79–90, doi: 10.1360/132012-951

界面裂纹和切口尖端位移场渐近场假设, 取包含第 2 项高阶(前 2 项)位移表达式, 采用非线性有限元法迭代求出张开型和剪切型切口主导的第 1 阶应力奇异性指数和相应的特征角函数。

目前已有文献给出了第 1 阶应力奇异性的解, 实际上切口和裂纹尖端附近应力渐近展开式的次阶项对尖端区域的弹性或塑性应力场的贡献也是重要的。本文研究幂硬化材料塑性平面裂纹和 V 形切口的应力奇异性, 围绕切口尖端的塑性位移场表达为径向坐标 r 的渐近展开级数形式^[14,15], 以位移函数为基本未知量, 通过满足塑性理论基本方程获得一组非线性常微分方程特征问题。然后, 采用插值矩阵法^[16]迭代求解该控制方程, 一般的塑性材料裂纹和 V 形切口所有前若干阶应力奇异指数、相应的位移和应力特征函数一并解出。

2 平面 V 形切口尖端区域弹塑性应力奇异性场控制方程

考虑各向同性均质弹塑性材料平面 V 形切口问题, 切口尖端张开角为 $\alpha=2\pi-\theta_1-\theta_2$, 见图 1, 当 $\alpha=0$ 时即为裂纹。设极坐标系 $or\theta$ 的原点置于切口尖端, 那么切口尖端区域的塑性变形位移场自尖端处可以渐近展开为如下级数形式^[14,15]

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= \sum_{k=1}^M A_k r^{\lambda_k+1} \tilde{u}_{rk}(\theta), \\ u_\theta(r, \theta) &= \sum_{k=1}^M A_k r^{\lambda_k+1} \tilde{u}_{\theta k}(\theta). \end{aligned} \quad (1)$$

这里 λ_k 被称为切口尖端的位移指数, $\tilde{u}_{rk}(\theta)$ 和 $\tilde{u}_{\theta k}(\theta)$ 是相应于 λ_k 的径向和环向位移特征函数, A_k 为相应的幅值系数, M 为截断项数。

将式(1)代入应变与位移的线性几何方程, 有

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \sum_{k=1}^M A_k (1 + \lambda_k) r^{\lambda_k} \tilde{u}_{rk}(\theta), \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \sum_{k=1}^M A_k r^{\lambda_k} [\tilde{u}_{rk}(\theta) + \tilde{u}'_{\theta k}(\theta)], \\ \varepsilon_{r\theta} &= \sum_{k=1}^M \frac{1}{2} A_k r^{\lambda_k} [\tilde{u}'_{rk}(\theta) + \lambda_k \tilde{u}_{\theta k}(\theta)]. \end{aligned} \quad (2)$$

这里 $(\cdots)' = d(\cdots)/d\theta$, 下面类同, ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{r\theta}$ 为应变分量。

对于许多发生塑性变形的韧性材料, 其单向拉伸实验的应力与应变关系符合 Ramberg-Osgood 定律

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} = \frac{\sigma}{\sigma_y} + \gamma \left(\frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^m.$$

这里 σ 和 ε 是材料单向拉伸的应力和应变, σ_y 和 ε_y 是屈服应力和屈服应变, 并有 $\varepsilon_y = \sigma_y / E$, E 是杨氏模量; γ 是材料系数, $m(\geq 1)$ 为材料的应变硬化指数 ($m=\infty$ 是理想弹塑性模型, $m=1$ 是线弹性模型)。引用塑性应力状态的全量理论, 弹塑性材料的广义应力应变关系为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p = \frac{1+\nu}{E} s_{ij} \\ &+ \frac{1-2\nu}{3E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \gamma \frac{\varepsilon_y \bar{\sigma}^{m-1}}{\sigma_y^m} s_{ij}. \end{aligned} \quad (3)$$

这里 ν 为泊松比, $\bar{\sigma}$ 为等效应力, σ_{ij} 为应力张量, s_{ij} 为应力偏量,

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}. \quad (4)$$

在切口尖端区域, 式(3)中的弹性项相比塑性项的贡献较小, 可以不计, 故应力应变关系简化为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \gamma \frac{\varepsilon_y \bar{\sigma}^{m-1}}{\sigma_y^m} s_{ij} = \frac{3}{2} \beta \bar{\sigma}^{m-1} s_{ij}, \quad \beta = \gamma \frac{\varepsilon_y}{\sigma_y^m}. \quad (5)$$

这里采用 Mises 等效应力

$$\sigma_e = \bar{\sigma} = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

对平面应力问题

$$\sigma_e = \bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 - \sigma_{rr} \sigma_{\theta\theta} + 3\sigma_{r\theta}^2}, \quad (7)$$

由式(5)得

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{2}{3\beta \bar{\sigma}^{m-1}} (2\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2}{3\beta \bar{\sigma}^{m-1}} (\varepsilon_{rr} + 2\varepsilon_{\theta\theta}), \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{2}{3\beta \bar{\sigma}^{m-1}} \varepsilon_{r\theta}. \end{aligned} \quad (8)$$

将式(2)代入(8), 有

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{2}{3\beta\bar{\sigma}^{m-1}} \sum_{k=1}^M A_k r^{\lambda_k} \hat{\sigma}_{rrk}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2}{3\beta\bar{\sigma}^{m-1}} \sum_{k=1}^M A_k r^{\lambda_k} \hat{\sigma}_{\theta\theta k}, \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{2}{3\beta\bar{\sigma}^{m-1}} \sum_{k=1}^M A_k r^{\lambda_k} \hat{\sigma}_{r\theta k}.\end{aligned}\quad (9)$$

式中

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{rrk} &= (3+2\lambda_k)\tilde{u}_{rk} + \tilde{u}'_{\theta k}, \hat{\sigma}_{\theta\theta k} = (3+\lambda_k)\tilde{u}_{rk} + 2\tilde{u}'_{\theta k}, \\ \hat{\sigma}_{r\theta k} &= \frac{1}{2}(\lambda_k\tilde{u}_{\theta k} + \tilde{u}'_{rk}).\end{aligned}\quad (10)$$

因为当 $r \rightarrow 0$ 时, 式(9)后面项相对前面项为无穷小量, 式(9)中取前 2 项代入式(7), 有

$$\begin{aligned}\sigma_e = \bar{\sigma} &= \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + 3\sigma_{r\theta}^2} \\ &\approx \frac{2}{3\beta\bar{\sigma}^{m-1}} A_1 r^{\lambda_1} [(\hat{\sigma}_{rr1} + A_{2/1} r^{\lambda_2-\lambda_1} \hat{\sigma}_{rr2})^2 \\ &\quad + (\hat{\sigma}_{\theta\theta1} + A_{2/1} r^{\lambda_2-\lambda_1} \hat{\sigma}_{\theta\theta2})^2 \\ &\quad - (\hat{\sigma}_{rr1} + A_{2/1} r^{\lambda_2-\lambda_1} \hat{\sigma}_{rr2})(\hat{\sigma}_{\theta\theta1} + A_{2/1} r^{\lambda_2-\lambda_1} \hat{\sigma}_{\theta\theta2}) \\ &\quad + 3(\hat{\sigma}_{r\theta1} + A_{2/1} r^{\lambda_2-\lambda_1} \hat{\sigma}_{r\theta2})^2]^{1/2}.\end{aligned}\quad (11)$$

其中 $A_{2/1}=A_2/A_1$, 上式按照 r 的阶次进行组合, 有

$$\sigma_e = \bar{\sigma} = \frac{2}{3\beta\bar{\sigma}^{m-1}} \cdot A_1 r^{\lambda_1} (\hat{\sigma}_1 + A_{2/1} r^{\lambda_2-\lambda_1} \hat{\sigma}_{12} + A_{2/1}^2 r^{2(\lambda_2-\lambda_1)} \hat{\sigma}_2)^{1/2}.\quad (12)$$

式中

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_1(\theta) &= \hat{\sigma}_{rr1}^2 + \hat{\sigma}_{\theta\theta1}^2 - \hat{\sigma}_{rr1}\hat{\sigma}_{\theta\theta1} + 3\hat{\sigma}_{r\theta1}^2, \\ \hat{\sigma}_2(\theta) &= \hat{\sigma}_{rr2}^2 + \hat{\sigma}_{\theta\theta2}^2 - \hat{\sigma}_{rr2}\hat{\sigma}_{\theta\theta2} + 3\hat{\sigma}_{r\theta2}^2, \\ \hat{\sigma}_{12}(\theta) &= 2\hat{\sigma}_{rr1}\hat{\sigma}_{rr2} + 2\hat{\sigma}_{\theta\theta1}\hat{\sigma}_{\theta\theta2} - \hat{\sigma}_{rr1}\hat{\sigma}_{\theta\theta2} \\ &\quad - \hat{\sigma}_{rr2}\hat{\sigma}_{\theta\theta1} + 6\hat{\sigma}_{r\theta1}\hat{\sigma}_{r\theta2}.\end{aligned}\quad (13)$$

由式(12), 得

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^{m-1} &= \left(\frac{2}{3\beta} A_1 r^{\lambda_1} \right)^{\frac{m-1}{2}} \\ &\quad \cdot (\hat{\sigma}_1 + A_{2/1} r^{\lambda_2-\lambda_1} \hat{\sigma}_{12} + A_{2/1}^2 r^{2(\lambda_2-\lambda_1)} \hat{\sigma}_2)^{\frac{m-1}{2}}.\end{aligned}\quad (14)$$

注意一般有 $\lambda_1 < \lambda_2$, 所以当 $r \rightarrow 0$ 时, $r^{\lambda_2-\lambda_1}$ 一般是无穷小量, 即式(14)中 $A_{2/1} r^{\lambda_2-\lambda_1} \hat{\sigma}_{12}$ 相对 $\hat{\sigma}_1$ 项是小量, 采用级数展开, 取其前 3 项, 则有

$$\bar{\sigma}^{-(m-1)} = \left(\frac{2}{3\beta} A_1 r^{\lambda_1} \right)^{\frac{m-1}{2}} \hat{\sigma}_1^{-\frac{m-1}{2}} \left[1 - \frac{m-1}{2m} \hat{\sigma}_1^{-1} A_{2/1} \hat{\sigma}_{12} r^{\lambda_2-\lambda_1} + \left(\frac{3m^2-4m+1}{8m^2} \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}_{12}^2 - \frac{m-1}{2m} \hat{\sigma}_2 \right) \hat{\sigma}_1^{-1} A_{2/1}^2 r^{2(\lambda_2-\lambda_1)} \right].\quad (15)$$

令

$$s_k^{(1)} = \lambda_k + \frac{\lambda_1}{m} - \lambda_1, \quad s_k^{(2)} = s_k^{(1)} + \lambda_2 - \lambda_1, \quad s_k^{(3)} = s_k^{(1)} + 2(\lambda_2 - \lambda_1).\quad (16)$$

式(15), (16)代入式(9)中, 渐近应力场的表达式为

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \left(\frac{2}{3\beta} \right)^{\frac{1}{m}} A_1^{\frac{1-m}{m}} \sum_{k=1}^M A_k \hat{\sigma}_1^{-\frac{m-1}{2m}} \left[r^{s_k^{(1)}} + \frac{1-m}{2m} \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}_{12} A_{2/1} r^{s_k^{(2)}} + \left(\frac{3m^2-4m+1}{8m^2} \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}_{12}^2 + \frac{1-m}{2m} \hat{\sigma}_2 \right) \hat{\sigma}_1^{-1} A_{2/1}^2 r^{s_k^{(3)}} \right] \hat{\sigma}_{rrk}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \left(\frac{2}{3\beta} \right)^{\frac{1}{m}} A_1^{\frac{1-m}{m}} \sum_{k=1}^M A_k \hat{\sigma}_1^{-\frac{m-1}{2m}} \left[r^{s_k^{(1)}} + \frac{1-m}{2m} \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}_{12} A_{2/1} r^{s_k^{(2)}} + \left(\frac{3m^2-4m+1}{8m^2} \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}_{12}^2 + \frac{1-m}{2m} \hat{\sigma}_2 \right) \hat{\sigma}_1^{-1} A_{2/1}^2 r^{s_k^{(3)}} \right] \hat{\sigma}_{\theta\theta k}, \\ \sigma_{r\theta} &= \left(\frac{2}{3\beta} \right)^{\frac{1}{m}} A_1^{\frac{1-m}{m}} \sum_{k=1}^M A_k \hat{\sigma}_1^{-\frac{m-1}{2m}} \left[r^{s_k^{(1)}} + \frac{1-m}{2m} \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}_{12} A_{2/1} r^{s_k^{(2)}} + \left(\frac{3m^2-4m+1}{8m^2} \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}_{12}^2 + \frac{1-m}{2m} \hat{\sigma}_2 \right) \hat{\sigma}_1^{-1} A_{2/1}^2 r^{s_k^{(3)}} \right] \hat{\sigma}_{r\theta k}.\end{aligned}\quad (17)$$

式中 $s_k^{(i)} (i=1, 2, 3; k=1, 2, \dots)$ 称为应力特征指数. 式(17)中应力级数展开式各项关于 $r^{s_k^{(i)}}$ 的阶次不同, 但代入平衡方程中将各自满足. 需要求出诸特征对 $\langle \lambda_k, \tilde{u}_{rk}, \tilde{u}_{\theta k} \rangle$, 代入式(10), (13)和式(16), (17)得到应力场特征表达式, 利用式(17)中含 $r^{s_k^{(1)}}$ 的级数式即可求出特征对 $\langle \lambda_k, \tilde{u}_{rk}, \tilde{u}_{\theta k} \rangle$, 因此取出含 $r^{s_k^{(1)}}$ 的级数项并引用式(10), 有

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \sum_{k=1}^M A_k r^{\lambda_k} (A_1 r^{\lambda_1})^{-1+\frac{1}{m}} \left(\frac{2}{3\beta} \right)^{\frac{1}{m}} \hat{\sigma}_1^{\frac{1-m}{2m}} [(3+2\lambda_k) \tilde{u}_{rk}(\theta) + \tilde{u}'_{\theta k}(\theta)], \\
\sigma_{\theta\theta} &= \sum_{k=1}^M A_k r^{\lambda_k} (A_1 r^{\lambda_1})^{-1+\frac{1}{m}} \left(\frac{2}{3\beta} \right)^{\frac{1}{m}} \hat{\sigma}_1^{\frac{1-m}{2m}} [(3+\lambda_k) \tilde{u}_{rk}(\theta) + 2\tilde{u}'_{\theta k}(\theta)], \\
\sigma_{r\theta} &= \sum_{k=1}^M A_k r^{\lambda_k} (A_1 r^{\lambda_1})^{-1+\frac{1}{m}} \left(\frac{2}{3\beta} \right)^{\frac{1}{m}} \hat{\sigma}_1^{\frac{1-m}{2m}} \frac{1}{2} [\tilde{u}'_{rk}(\theta) + \lambda_k \tilde{u}_{\theta k}(\theta)].
\end{aligned} \tag{18}$$

注意到式(1)的特征值 λ_k 和特征角函数仅取决于切口的张角、材料性质和楔形边条件, 不依赖载荷, 因此不考虑体力, 平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0. \tag{19}$$

式(18)代入式(19), 得到

$$\begin{aligned}
C_{km} \frac{1}{r} r^{\lambda_k} r^{-\lambda_1+\frac{1}{m}} &\left\{ \left[(\lambda_k + \lambda_1) \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \right] [(3+2\lambda_k) \tilde{u}_{rk}(\theta) + \tilde{u}'_{\theta k}(\theta)] + \frac{1}{2} [\tilde{u}_{rk}''(\theta) + \lambda_k \tilde{u}_{\theta k}'(\theta)] \right. \\
&\left. + \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}_{1\theta}' \cdot \frac{1-m}{2m} \frac{1}{2} [\tilde{u}'_{rk}(\theta) + \lambda_k \tilde{u}_{\theta k}(\theta)] + [\lambda_k \tilde{u}_{rk}(\theta) - \tilde{u}'_{\theta k}(\theta)] \right\} = 0, \\
C_{km} \frac{1}{r} r^{\lambda_k} r^{-\lambda_1+\frac{1}{m}} &\left\{ \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}_{1\theta}' \cdot \frac{1-m}{2m} [(\lambda_k + 3) \tilde{u}_{rk}(\theta) + 2\tilde{u}'_{\theta k}(\theta)] + [(\lambda_k + 3) \tilde{u}'_{rk}(\theta) + 2\tilde{u}_{\theta k}''(\theta)] \right. \\
&\left. + \left[\lambda_k + \lambda_1 \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \right] \frac{1}{2} [\tilde{u}'_{rk}(\theta) + \lambda_k \tilde{u}_{\theta k}(\theta)] + [\tilde{u}'_{rk}(\theta) + \lambda_k \tilde{u}_{\theta k}(\theta)] \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

其中 $C_{km} = A_k A_1^{-1+\frac{1}{m}} \left(\frac{2}{3\beta} \right)^{\frac{1}{m}} \hat{\sigma}_1^{\frac{1-m}{2m}}$, $\hat{\sigma}_{1\theta}' = d\hat{\sigma}_1/d\theta$. 式(20)中出现的 λ_k^2 将导致非线性特征问题求解, 引入如下新函数

$$g_{rk}(\theta) = \lambda_k \tilde{u}_{rk}(\theta), \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2], \quad g_{\theta k}(\theta) = \lambda_k \tilde{u}_{\theta k}(\theta), \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]. \tag{21}$$

在式(20)中约去公因子 $C_{km} \frac{1}{r} r^{\lambda_k} r^{-\lambda_1+\frac{1}{m}}$, 引入式(21)和(20), 从而导出一组二阶微分方程

$$\begin{aligned}
2\lambda_1 \left(\frac{1}{m} - 1 \right) &[3\tilde{u}_{rk}(\theta) + 2g_{rk}(\theta) + \tilde{u}'_{\theta k}(\theta)] + \lambda_k [4g_{rk}(\theta) + 3\tilde{u}'_{\theta k}(\theta)] \\
&+ \tilde{u}_{rk}''(\theta) + \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}_{1\theta}' \cdot \frac{1-m}{2m} [\tilde{u}'_{rk}(\theta) + g_{\theta k}(\theta)] + 8g_{rk}(\theta) - 2\tilde{u}'_{\theta k}(\theta) = 0, \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2], \\
\hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}_{1\theta}' \frac{1-m}{2m} &[g_{rk}(\theta) + 3\tilde{u}_{rk}(\theta) + 2\tilde{u}'_{\theta k}(\theta)] + \lambda_k \frac{1}{2} [3\tilde{u}'_{rk}(\theta) + g_{\theta k}(\theta)] \\
&\cdot \lambda_1 \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \frac{1}{2} [\tilde{u}'_{rk}(\theta) + g_{\theta k}(\theta)] + g_{\theta k}(\theta) + 4\tilde{u}'_{rk}(\theta) + 2\tilde{u}_{\theta k}''(\theta) = 0, \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2].
\end{aligned} \tag{22}$$

注意上面是非线性常微分方程组特征值问题, 因为其中因子 $\hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}_{1\theta}'$ 含有 λ_1 和其特征角函数. 如果切口两楔边是自由的, 即图 1 中 Γ_1 和 Γ_2 上面力为零

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix}_{\theta=\theta_1} = \begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix}_{\theta=\theta_2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{23}$$

将式(18)代入式(23), 得

$$\begin{aligned} 2\tilde{u}'_{\theta k} + (3 + \lambda_k)\tilde{u}_{rk} &= 0, \quad \theta = \theta_1, \theta_2, \\ \tilde{u}'_{rk} + \lambda_k \tilde{u}_{\theta k} &= 0, \quad \theta = \theta_1, \theta_2. \end{aligned} \quad (24)$$

至此, V 形切口的应力奇异指数和相应的特征角函数 $\tilde{u}_{rk}$ 和 $\tilde{u}_{\theta k}$ 分析被转化为解非线性常微分方程组 (21), (22) 和相应的边界条件式 (24).

插值矩阵法是本文作者建立的求解常微分方程组边值问题的一个数值方法^[16], 该法对 $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ 区间划分子区间, 子区间上的函数采用低阶多项式插值模拟, 以微分方程中最高阶导数在分点上的值为基本未知量, 然后求解未知函数和各阶导数值. 插值矩阵法的优点是解得的函数及其各阶导数值的精度是等同的, 而差分法和有限元法求解函数导数的精度是逐次降阶的.

本文采用插值矩阵法迭代求解非线性常微分方程组 (21), (22) 和相应的边界条件 (24). 从式 (13) 可见, 式 (22) 中非线性项的函数 $\hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}'_{1\theta}$ 仅涉及第 1 阶特征对 $\langle \lambda_1, \tilde{u}_{r1}, \tilde{u}_{\theta 1} \rangle$, 其他为线性方程. 这里提出迭代的初值是先让式 (22) 中非线性项 $\hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}'_{1\theta} = 0$, 取其线性常微分方程的近似解, 将其中的 λ_1 特征对解作为初值代入式 (22) 中 $\hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}'_{1\theta}$, 由此方程 (22) 被拟线性化, 采用插值矩阵法求解线性化常微分方程特征值问题, 每次求出前若干阶特征对 $\langle \lambda_k, \tilde{u}_{rk}, \tilde{u}_{\theta k} \rangle$, 其中的第 1 阶 $\langle \lambda_1, \tilde{u}_{r1}, \tilde{u}_{\theta 1} \rangle$ 代入 $\hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}'_{1\theta}$ 中, 作为下一步求解的已知函数, 由此反复迭代, 直至收敛. 这里的收敛判据以 λ_1 相连两次迭代的差值小于给定的小量, 即

$$\frac{\lambda_1^{(j+1)} - \lambda_1^{(j)}}{\lambda_1^{(j+1)}} < \varepsilon = 10^{-6}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (25)$$

本文解法另一优点是迭代收敛后, 同时获得前若干个主导的位移指数 $\lambda_k (k = 1, 2, \dots)$ 与相应的位移特征函数 $\tilde{u}_{rk}$ 和 $\tilde{u}_{\theta k}$. 将 λ_k 代入式 (16), 获得对应的应力奇性指数 $s_k^{(i)}$. s_k 的次序是将 $s_k^{(i)} (i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots)$ 从小到大排列, 其中在 $-1 < s_k < 0$ 之间的 r^{s_k} 项使得应力在尖端区域发生奇异. 而大于 0 的 s_k 项也是有用的, 可使得式 (1) 和 (17) 有较多的级数项, 扩大了式 (1) 和 (17) 表示的位移和应力渐近场在尖端区域的有效范围. 然后将 $\langle \lambda_k, \tilde{u}_{rk}, \tilde{u}_{\theta k} \rangle$ 和 s_k 代入式 (10) 和 (17), 得到对应 r^{s_k} 的应力特征函数, 其中第 1 阶奇性指数 s_1 对应的应力特征函数为

$$\tilde{\sigma}_{ij1}(\theta) = \hat{\sigma}_1^{-\frac{m-1}{2m}}(\theta) \hat{\sigma}_{ij1}(\theta), \quad ij = rr, \theta\theta, r\theta. \quad (26)$$

其中 $\hat{\sigma}_1$ 和 $\hat{\sigma}_{ij1}$ 分别见式 (13) 和 (10). 注意到插值矩阵法解得的特征函数 $\tilde{u}_{rk}$ 和 $\tilde{u}_{\theta k}$ 及其各阶导数值的精度是同阶的^[16], 故获得的应力特征函数和位移特征函数是同阶精度, 这对后续的完全应力场求解是极为有利的.

3 数值算例

算例 1 各向同性幂硬化材料裂纹尖端区域应力奇异指数, 裂纹边为自由边, 平面应力问题.

见图 1, 当 V 形切口张角 $\alpha = 0$ 即为裂纹体, m 为材料硬化指数. 该问题第一阶应力奇异指数的精确解 (“HRR 解”)^[1-3] 是 $s_1 = -1/m + 1$. Chen 等人^[9] 是采用 Airy 应力函数渐近展开为级数形式进行迭代求解. Zhang 和 Joseph^[12], Loghin 和 Joseph^[13] 采用非线性有限元法迭代求出张开型和剪切型切口主导的应力奇性指数和相应的特征函数. 他们给出了对称和反对称情形的第 1 阶应力奇性指数 s_1 , 见表 1 和表 2, 文献 [9, 12, 13] 给出对称的 s_1 解相互有些差异.

注意对于切口/裂纹的两楔边是自由情况, 其式 (1) 和 (18) 的位移和应力特征函数分为对称和反对称两类, 实际上是分别对应张开型(I)和剪切型(II)载荷, 其对应的奇性指数 $\lambda_k(s_k)$ 和幅值系数 A_k 互为独立. 对各向同性硬化材料裂纹尖端塑性应力奇异指数, 本文采用插值矩阵法(IMM)计算的对称和反对称特征指数的前 4 阶值分别见表 1 和 2, 表中 N 是指在区间

图 1 V 形切口尖端区域
Figure 1 Geometry near a V-notch tip.

表 1 随着 m 变化塑性裂纹尖端 I 型应力奇异指数 s_k^I (对称解)

Table 1 The stress singularity order s_k^I of mode I in the crack tip region with the variation of m

s_k^I	Methods	$m=1$	$m=1.5$	$m=2$	$m=5$	$m=10$	$m=13$
s_1^I	HRR solution	-0.500000	-0.400000	-0.333333	-0.166666	-0.090909	-0.0714286
	Chen 等人 ^[9]	-0.5000	-	-	-0.165	-	-0.070
	Zhang 等人 ^[12]	-0.49998	-0.4036	-0.33331	-0.16668	-0.090944	-0.0719
	Loghin 等人 ^[13]	-0.5000	-0.4000	-0.317527	-0.146245	-0.077399	-0.06923
	Present solution	$N=20$	-0.499809	-0.400581	-0.34202	-0.176920	-0.097147
		$N=40$	-0.499987	-0.398749	-0.333091	-0.166503	-0.090977
		$N=80$	-0.499999	-0.399983	-0.333025	-0.166678	-0.090910
s_2^I	Present solution	$N=20$	0.002459	-0.069228	-0.105781	0.129235	0.240797
		$N=40$	0.000218	-0.026081	0.003605	0.259909	0.383980
		$N=80$	0.000012	-0.021499	0.009708	0.261517	0.385247
s_3^I	Present solution	$N=20$	0.498195	0.260952	0.130464	0.434855	0.920072
		$N=40$	0.499828	0.346587	0.340303	0.686321	0.858938
		$N=80$	0.499988	0.356750	0.352442	0.689714	0.861404
s_4^I	Present solution	$N=20$	1.03257	0.619883	0.728147	0.875141	0.889868
		$N=40$	1.00251	0.599716	0.680896	0.794221	0.858228
		$N=80$	1.00018	0.613267	0.681570	0.797048	0.862041

表 2 随着 m 变化塑性裂纹尖端 II 型应力奇异指数 s_k^{II} (反对称解)

Table 2 The stress singularity order s_k^{II} of mode II in the crack tip region with the variation of m

s_k^{II}	Methods	$m=1$	$m=1.5$	$m=2$	$m=5$	$m=10$	$m=13$
s_1^{II}	HRR solution	-0.50000	-0.400000	-0.333333	-0.166666	-0.090909	-0.071428
	Chen 等人 ^[9]	-0.5000	-	-	-0.1667	-	-0.0714
	Zhang 等人 ^[12]	-0.49998	-0.4036	-0.33332	-0.16665	-0.09089	-0.07161
	Loghin 等人 ^[13]	-0.5000	-	-0.31416	-0.16666	-0.09166	-0.07500
	Present solution	$N=20$	-0.499585	-0.373932	-0.333401	-0.166649	-0.090858
		$N=40$	-0.499961	-0.399946	-0.333324	-0.166669	-0.090912
		$N=80$	-0.499997	-0.399992	-0.333332	-0.166666	-0.090909
s_2^{II}	Present solution	$N=20$	0.510002	0.817450	0.687187	0.936911	1.18019
		$N=40$	0.500836	0.603184	0.680099	0.928944	1.16061
		$N=80$	0.500061	0.602294	0.679469	0.928391	1.15986
s_3^{II}	Present solution	$N=20$	0.990215	1.13441	1.48881	1.58506	1.53466
				-ix0.091169	-ix0.254410	-ix0.257240	-ix0.258518
		$N=40$	0.999177	1.27853	1.46263	1.57498	1.53980
				-ix0.134956	-ix0.265018	-ix0.280124	-ix0.287047
		$N=80$	0.999936	1.28166	1.46078	1.57426	1.54030
s_4^{II}	Present solution			-ix0.137253	-ix0.265505	-ix0.281169	-ix0.288305
		$N=20$	1.51959	2.00883	1.48881	1.58506	1.53466
				+ix0.09117	+ix0.254410	+ix0.25724	+ix0.25852
		$N=40$	1.50212	1.60631	1.46263	1.57498	1.53980
				+ix0.13495	+ix0.26502	+ix0.28012	+ix0.28704
s_5^{II}	Present solution	$N=80$	1.50017	1.60458	1.46078	1.57426	1.54030
				+ix0.13725	+ix0.26551	+ix0.28117	+ix0.28831

$[\theta_1, \theta_2]$ 的分段数, 在子区间内, 插值矩阵法对未知函数用二次分段多项式函数模拟. 表 1 和表 2 中可见, 随着 N 增大, 插值矩阵法收敛较快, 当取 $N=40$ 时, 对不同的硬化指数 m , s_1 计算值的有效数字达到 4 位. 插值矩阵法对方程(21), (22)和边界条件(24)进行拟线

性迭代, 对于表中最大分段数 $N=80$, 通常迭代次数在 20~70 次内, 在目前普通台式机上 CPU 时间 70 s 以内; 实际上取 $N=40$ 的计算结果即可, CPU 时间 10 s 以内. $m=1$ 的情形是线弹性裂纹, 其精确解 $s_1=-1/2$, 相应的特征函数分别是对称和反对称模型. 本文求

出的 λ_k 总是存在 2 个-1 根和 1 个 0 根, 未放入表中, 他们反映了 3 个刚体位移项. 文献[17]对线弹性裂纹尖端渐进应力场解的分析讨论, 一般在式(1)级数中取 4-6 项即可, 本文按照对称和反对称情形共给出 4+4 阶奇异指数.

文献[12]和本文结果以及文献[9]的反对称情形的 s_1 解与“HRR 解”吻合都很好. 表 1 中可见当材料硬化指数 $m=1.5$ 时的裂纹, 本文结果表明对称模型解存在负的 s_2^I , 尽管 s_2^I 接近于 0, 其奇异性相比 s_1^I 弱的多. 同时随着 m 的增大, s_2^I 转变为正值并逐渐增大; 随着 m 的增大, 反对称的应力奇性指数 s_3^II 和 s_4^II 是复数. 表 2 中 $i=\sqrt{-1}$, 以下类同.

本法同时获得各阶 λ_k 和 s_k 相应的位移和应力特征向量. 对 $\alpha=0, m=5$ 情形, 插值矩阵法取 $N=40$ 时计算的对称 λ_1^I 和反对称 λ_1^{II} 对应的位移特征函数 $\tilde{u}_{r1}(\theta)$ 和 $\tilde{u}_{\theta1}(\theta)$, 见图 2 和图 3. 由式(26)得对称 s_1^I 和反对称 s_1^{II} 对应的应力特征函数 $\tilde{\sigma}_{rr1}(\theta)$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta1}(\theta)$, $\tilde{\sigma}_{r\theta1}(\theta)$ 见图 4 和图 5. 从图 4 可见, 对称情形的特征函数 $\tilde{\sigma}_{rr1}(\theta)$ 约在 $\theta=\pm 152^\circ$ 附近有突变, 影响了数值迭代的收敛性; 而反对称情形的各特征函数没有突变, 各种解法在反对称情形下的应力奇异阶的计算精度较好. 本文插值矩阵法在区间 $[\theta_1, \theta_2]$ 上采用了变步长格式, 较好模拟了 $\tilde{\sigma}_{rr1}(\theta)$ 在 $\theta=\pm 152^\circ$ 附近的突变.

图 2 (网络版彩图)裂纹对称的位移特征向量 $\tilde{u}_{i1}(\theta)$, $\alpha=0$, $m=5, N=40$

Figure 2 (Color online) Symmetrical displacement eigenvectors $\tilde{u}_{i1}(\theta)$ of the crack when $\alpha=0, m=5, N=40$.

图 3 (网络版彩图)裂纹反对称的位移特征向量 $\tilde{u}_{i1}(\theta)$, $\alpha=0$, $m=5, N=40$

Figure 3 (Color online) Antisymmetrical displacement eigenvectors $\tilde{u}_{i1}(\theta)$ of the crack when $\alpha=0, m=5, N=40$.

图 4 (网络版彩图)裂纹对称的应力特征向量 $\tilde{\sigma}_{ij1}(\theta)$, $\alpha=0$, $m=5, N=40$

Figure 4 (Color online) Symmetrical stress eigenvectors $\tilde{\sigma}_{ij1}(\theta)$ of the crack when $\alpha=0, m=5, N=40$.

算例 2 不同张角 α 和硬化指数 m 的塑性材料 V 形切口, 两边界自由, 参见图 1.

这里没有发现精确解, Chen 等人^[9]和 Zhang 等人^[12]给出了对称和反对称的第 1 阶塑性奇异指数 s_1^I 和 s_1^{II} , 但对同样参数的 V 形切口两者解有些差异, 见表 3 和表 4. 本文解法与例 1 相同, 对多种参数情形的切口, 插值矩阵法计算的前 4 阶塑性应力奇异指

图 5 (网络版彩图)裂纹反对称的应力特征向量 $\tilde{\sigma}_{y1}(\theta)$,
 $\alpha=0, m=5, N=40$

Figure 5 (Color online) Antisymmetrical stress eigenvectors $\tilde{\sigma}_{y1}(\theta)$ of the crack when $\alpha=0, m=5, N=40$.

数 s_k^I 和 s_k^{II} 的值见表 3 和表 4, 随着分段数 N 的增加, 本文方法收敛性很好, 其中只有第 1 阶塑性奇异指数 s_1^I 和 s_1^{II} 小于 0, 并与文献[9,12]的结果相接近. 随着切口张角 α 的增大和材料硬化指数 m 的增大, 第 1 阶应力奇异指数逐渐减弱. 特别是反对称情形的 s_1^{II} 随着切口张角 α 的增大, 其奇异性衰减较快.

本文方法同时获得各阶 λ_k 和 s_k 相应的位移和应力特征函数 $\tilde{u}_{ik}(\theta)$ 和 $\tilde{\sigma}_{ijk}(\theta)$. 对 $m=5, \alpha=30^\circ, \alpha=60^\circ$ 及 $\alpha=90^\circ$ 三种情形, 本文方法取 $N=40$ 时计算的对称 s_1^I 和反对称 s_1^{II} 对应的应力特征函数 $\tilde{\sigma}_{rr1}(\theta), \tilde{\sigma}_{\theta\theta1}(\theta), \tilde{\sigma}_{r\theta1}(\theta)$ 分别见图 6–11. 见图 6, $\alpha=30^\circ$ 时, 对称情形的 $\tilde{\sigma}_{rr1}(\theta)$ 约在 $\theta=\pm 150^\circ$ 附近有突变, 本文插值矩阵法采用了变步长格式, 较好模拟了对称应力特征函数 $\tilde{\sigma}_{rr1}(\theta)$ 在 $\theta=\pm 150^\circ$ 附近的突变, 计算结果较为可靠.

表 3 随着 α 变化塑性裂纹尖端 I 型应力奇异指数 s_k^I (对称解)

Table 3 The stress singularity order s_k^I of mode I in the V-notch with the variation of α

α		$\alpha=30^\circ$		$\alpha=60^\circ$		$\alpha=90^\circ$	
s_k^I	Methods	$m=5$	$m=13$	$m=5$	$m=13$	$m=5$	$m=13$
s_1^I	Chen 等人 ^[9]	-0.165	-0.0709	-0.163	-0.0705	-0.160	-0.0700
	Zhang 等人 ^[12]	—	—	-0.1664	-0.0711	-0.1622	-0.0708
	Present solution						
	$N=20$	-0.166671	-0.0713668	-0.165976	-0.0697537	-0.162580	-0.0713235
	$N=40$	-0.165964	-0.0706132	-0.164893	-0.0707055	-0.162691	-0.0705647
	$N=80$	-0.165389	-0.0708502	-0.164737	-0.0706735	-0.162695	-0.0705643
s_2^I	Present solution						
	$N=20$	0.507324	0.514288	0.373731	0.581990	0.829520 -ix0.237772	0.531631
	$N=40$	0.326372	0.509137	0.324867	0.590605	0.827662 -ix0.236108	0.799747 -ix0.131651
	$N=80$	0.346335	0.505067	0.333399	0.568580	0.827525 -ix0.235978	0.802549 -ix0.132389
s_3^I	Present solution						
	$N=20$	0.793417	0.863585	0.754875	0.854867	0.829520 +ix0.237772	0.853715
	$N=40$	0.785561	0.865655	0.793828	0.854168	0.827662 +ix0.236108	0.799747 +ix0.131651
	$N=80$	0.780092	0.868191	0.783844	0.863464	0.827525 +ix0.235978	0.802549 +ix0.132389
s_4^I	Present solution						
	$N=20$	0.818709	1.09994	0.913438	1.23373	1.82164 -ix0.475558	1.13458
	$N=40$	0.818709	1.08888	0.814627	1.25191	1.81801 -ix0.472216	1.67006 -ix0.263303
	$N=80$	0.858059	1.08098	0.831537	1.20783	1.81774 -ix0.471957	1.67566 -ix0.264778

表 4 随着 α 变化塑性裂纹尖端 II 型应力奇异指数 s_k^{II} (反对称解)

Table 4 The stress singularity order s_k^{II} of mode II in the V-notch with the variation of α

α		$\alpha=30^\circ$		$\alpha=60^\circ$		$\alpha=90^\circ$		
s_k^{II}	Methods	$m=5$	$m=13$	$m=5$	$m=13$	$m=5$	$m=13$	
s_1^{II}	Chen 等人 ^[9]	-0.149	-0.067	-0.1166	-0.060	-0.063	-0.046	
	Zhang 等人 ^[12]	-0.1480	-0.0684	-0.1185	-0.0611	-0.067	-0.046	
	Present solution	$N=20$	-0.148909	-0.067667	-0.118838	-0.060621	-0.067626	-0.049224
		$N=40$	-0.148849	-0.067702	-0.118532	-0.060392	-0.066299	-0.044896
		$N=80$	-0.148831	-0.067684	-0.118518	-0.060380	-0.066248	-0.044999
s_2^{II}	Present solution	$N=20$	1.11977	1.37132	1.27675	1.37156	1.41697	1.26330
		$N=40$	1.11234	1.36773	1.26204	1.35716	1.42405	1.34138
		$N=80$	1.11258	1.36653	1.26132	1.35872	1.42412	1.34391
s_3^{II}	Present solution	$N=20$	1.94186 -ix0.135344	1.92223 -ix0.343307	1.76955	2.15336	1.70188	2.57583
		$N=40$	1.90088 -ix0.192385	1.92403 -ix0.336446	1.78111	2.21344	1.70231	2.45667
		$N=80$	1.89643 -ix0.194106	1.92642 -ix0.336517	1.78165	2.21283	1.70163	2.45041
s_4^{II}	Present solution	$N=20$	1.94186 +ix0.135344	1.92223 +ix0.343307	2.67235	2.80376	2.90158	2.64148 -ix0.28945
		$N=40$	1.90088 +ix0.192385	1.92403 +ix0.336446	2.64262	2.77471	2.91440	2.72767
		$N=80$	1.89643 +ix0.194106	1.92642 +ix0.336517	2.64117	2.77783	2.91449	2.73283

图 6 (网络版彩图) V 形切口对称的应力特征向量 $\tilde{\sigma}_{ij1}(\theta)$, $\alpha=30^\circ, m=5, N=40$

Figure 6 (Color online) Symmetrical stress eigenvectors $\tilde{\sigma}_{ij1}(\theta)$ of the V-notch when $\alpha=30^\circ, m=5, N=40$.

图 7 (网络版彩图) V 形切口反对称的应力特征向量 $\tilde{\sigma}_{ij1}(\theta)$, $\alpha=30^\circ, m=5, N=40$

Figure 7 (Color online) Antisymmetrical stress eigenvectors $\tilde{\sigma}_{ij1}(\theta)$ of the V-notch when $\alpha=30^\circ, m=5, N=40$.

图 8 (网络版彩图) V 形切口对称的应力特征向量 $\tilde{\sigma}_{ij1}(\theta)$, $\alpha=60^\circ, m=5, N=40$

Figure 8 (Color online) Symmetrical stress eigenvectors $\tilde{\sigma}_{ij1}(\theta)$ of the V-notch when $\alpha=60^\circ, m=5, N=40$.

图 9 (网络版彩图) V 形切口反对称的应力特征向量 $\tilde{\sigma}_{ij1}(\theta)$, $\alpha=60^\circ, m=5, N=40$

Figure 9 (Color online) Antisymmetrical stress eigenvectors $\tilde{\sigma}_{ij1}(\theta)$ of the V-notch when $\alpha=60^\circ, m=5, N=40$.

见图 8, $\alpha=60^\circ$ 时, $\tilde{\sigma}_{rr1}(\theta)$ 约在 $\theta=\pm 144^\circ$ 附近有突变. 见图 10, $m=5, \alpha=90^\circ$ 时, $\tilde{\sigma}_{rr1}(\theta)$ 没有突变现象.

4 结论

对于塑性材料 V 形切口应力奇异性问题, 本文将切口尖端区域位移场渐近展开成级数形式, 代入塑性全量理论的基本微分方程, 转化成非线性常微分方程组特征值问题. 然后采用插值矩阵法迭代求

图 10 (网络版彩图) V 形切口对称的应力特征向量 $\tilde{\sigma}_{ij1}(\theta)$, $\alpha=90^\circ, m=5, N=40$

Figure 10 (Color online) Symmetrical stress eigenvectors $\tilde{\sigma}_{ij1}(\theta)$ of the V-notch when $\alpha=90^\circ, m=5, N=40$.

图 11 (网络版彩图) V 形切口反对称的应力特征向量 $\tilde{\sigma}_{ij1}(\theta)$, $\alpha=90^\circ, m=5, N=40$

Figure 11 (Color online) Antisymmetrical stress eigenvectors $\tilde{\sigma}_{ij1}(\theta)$ of the V-notch when $\alpha=90^\circ, m=5, N=40$.

解所建立的方程组, 获得应力奇异性指数和相应的特征函数.

文中给出了求解一般塑性材料 V 形切口应力奇异性的算例, 计算结果的收敛性较好, 并与已有文献的相关结果进行了比较和分析. 结果表明本文方法可有效分析幂硬化塑性材料 V 形切口的应力奇异性, 获得一般平面塑性材料 V 形切口的前若干阶应力奇异指数. 同时, 相应的位移和应力特征函数一并获得, 且它们的精度是同样的, 这一性质对以后求解幅值系数 A_k 是非常重要的. 结果显示主要的应力奇异指数 s_1 的值随着材料硬化指数 m 的增大或者切口张角的增大趋向 0, 即应力奇异性随之减弱或消失. 本文结果可作为塑性材料 V 形切口和裂纹尖端应力奇异性研究的参考解.

参考文献

- 1 Hutchinson J W. Singular behavior at the end of a tensile crack in hardening materials. *J Mech Phys Solids*, 1968, 16: 13–31
- 2 Rice J R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J Appl Mech*, 1968, 35: 379–386
- 3 Rice J R, Rosengren G F. Plane strain deformation near crack tip in a power law hardening materials. *J Mech Phys Solids*, 1968, 16: 1–12
- 4 Sharma S M, Aravas N. Determination of higher-order terms in asymptotic elastoplastic crack tip solutions. *J Mech Phys Solids*, 1991, 39: 1043–1072
- 5 Yang S, Chao Y J, Sutton M. Higher order asymptotic crack tip fields in a power-law hardening materials. *Eng Fract Mech*, 1993, 45: 1–20
- 6 Xia L, Wang T C, Shih C F. Higher-order analysis of crack tip fields in elastic power-law hardening materials. *J Mech Phys Solids*, 1993, 41: 665–687
- 7 Rahman A, Lau A C W. Singular stress fields in interfacial notches of hybrid metal matrix composites. *Composites Part B*, 1998, 29B: 763–768
- 8 Xu J Q, Fu L D, Motoh Y. A method for determining elastic-plastic stress singularity at the interface edge of bonded power law hardening materials. *JSME Int J*, 2002, A45(2): 177–183
- 9 Chen D H, Ushijima K. Plastic stress singularity near the tip of a V-notch. *Int J Fracture*, 2000, 106: 117–134
- 10 Lazzarin P, Zambardi R, Livieri P. Plastic notch stress intensity factors for large V-sharped notches under mixed load conditions. *Int J Fracture*, 2001, 107: 361–377
- 11 Filippi F, Ciavarella M, Lazzarin P. An approximate, analytical approach to the ‘HRR’-solution for sharp V-notches. *Int J Fracture*, 2002, 117: 269–286
- 12 Zhang N S, Joseph P F. A nonlinear finite element eigenanalysis of singular plane stress fields in bimaterial wedges including complex eigenvalues. *Eng Fract Mech*, 1998, 90: 175–207
- 13 Loghin A, Joseph P F. Asymptotic solutions for mixed mode loading of cracks and wedges in power law hardening materials. *Eng Fract Mech*, 2001, 68: 1511–1534
- 14 Williams M L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in tension. *J Appl Mech*, 1952, 19: 526–528
- 15 Yosibash Z, Szabó B A. A note on numerically computed eigenfunctions and generalized stress intensity factors associated with singular points. *Eng Fract Mech*, 1996, 54: 593–595
- 16 Niu Z R, Ge D L, Cheng C Z, et al. Evaluation of the stress singularities of plane V-notches in bonded dissimilar materials. *Appl Math Model*, 2009, 33: 1776–1792
- 17 Cheng C Z, Niu Z R, Recho N. Effect of non-singular stress on the brittle fracture of V-notched structure. *Int J Fracture*, 2012, 174: 127–138

Evaluation of plastic stress singularities of plane V-notches and cracks in hardening materials

NIU ZhongRong^{1*}, GE RenYu¹, RECHO Naman², CHENG ChangZheng¹
& HU ZongJun¹

¹ *School of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China;*

² *ERMES/EPF-Ecoles d'Ingénieurs, Sceaux 92330, France*

A higher-order analysis of the stress singularity of the plane V-notches and cracks in power law hardening materials is studied. First the asymptotic displacement field in terms of radial coordinates at the notch tip is adopted. When the material near the notch tips arises in plastic deformation, the Von Mises yield criterion and the plastic 'total strain' theory are used. By introducing the displacement expressions into the governing differential equations of the plastic theory, it results in a set of the eigenvalue problem of nonlinear ordinary differential equations with the stress singularity orders and the associated eigenfunctions. Then the interpolating matrix method established by the first author is used to solve the eigenvalue problem by an iteration process. The several leading plastic stress singularity orders of plane V-notches and cracks have been obtained. Simultaneously the associated eigenvectors of the displacement and stress fields in the notch tip region have been determined with the same degree of accuracy. Finally two numerical examples have been given to illustrate the accuracy and the effectiveness of the present method to determine the singularity orders of the plastic V-notch and crack. Based on the computed results, some characteristics related to the stress singularity of the plastic notches and cracks are discussed.

stress singularity, V-notch, plasticity, hardening material, interpolating matrix method

PACS: 62.20.Fe, 81.40.Lm, 46.35.+z

doi: 10.1360/132012-951