压电介质机电耦合裂尖场的杂交元数值分析

刘 鸣 吴长春

(中国科学技术大学力学与机械工程系, 合肥 230026)

摘要 为分析压电介质的断裂问题建立了一种适于机电耦合分析的优化杂交有限元模型——压电 **P-S** 元. 通过对耦合裂尖场的数值计算, 再现了解的 $1/\sqrt{r}$ 奇异性. 所得结果校验了理论解, 为探讨这类耦合断裂的机制提供了数值依据.

关键词 压电介质 断裂 杂交有限元

由于压电介质在智能结构中的广泛应用使得对其断裂行为的研究获得了越来越多学者的关注. 虽然借助于各种理论方法, 人们对于机电耦合裂尖场的性质获得了一定的了解^[1~3], 可是在实际问题的处理上, 由于几何形状和加载情况的复杂性, 不得不求助于各种数值方法, 而且数值方法也能为理论分析提供十分有效的辅助手段, 然而这一方面的数值研究却十分有限. Kumar 和 Singh^[5] 采用八节点二维等参元并结合裂尖奇异元分析了双边缺口试件在裂纹尖端的应力分布, 然而得到的结果不能合理再现裂尖场的 $1/\sqrt{r}$ 奇异性. 最近, 杨和匡^[4] 利用刚度微分法分析了应力强度因子.

鉴于杂交元在应力分析和特殊问题处理上的优势^[6], 这里将杂交元方法引入机电耦合奇性问题的分析. 作为弹性问题杂交元优化设计^[7] 的推广, 文中建立了一个适用于机电耦合分析的优化杂交元. 对 iv 型耦合裂尖场的具体计算和分析显示出新单元的高效和可靠. 该模型为模拟复杂的压电断裂问题提供了一种有力的数值手段.

1 机电耦合体系的杂交模式——压电 **P-S** 元

对于弹性体, 吴等人^[7] 证明了非协调体系的一个能量相容条件和模式优化方法, 并指出它是获得合理的变分近似解的基础. 这一能量相容条件以及模式优化方法可被进一步推广到机电耦合问题, 由此作者导得下列非协调体系机电耦合问题的能量相容条件:

$$\int_{\partial\Omega} \left(\left| \sigma_{ij} n_j \right| u_i^\lambda + \left| D_j n_j \right| \varphi \right) ds = 0, \quad (1)$$

参 考 文 献

- 1 Arnold V I. On an a priori estimate in the theory of hydrodynamical stability. *Izv Uchebn Zaved Matematika*, 1966, 54: 3~ 5
- 2 Mu Mu. Nonlinear stability of Two-dimensional quasi-geostrophic motions. *Geophys Astrophys Fluid Dynam*, 1992, 65: 57~ 76
- 3 Pedlosky J. *Geophysical Fluid Dynamics*. New York: Springer-Verlag, 1979
- 4 Mu Mu, Shepherd T G. On Arnold's second nonlinear stability theorem for two-dimensional quasigeostrophic flow *Geophys. Astrophys Fluid Dyn*, 1994, 75: 21~ 37
- 5 Mu Mu, Xiang Jie. On the evolution of finite-amplitude disturbance to the barotropic and baroclinic quasigeostrophic flows. *Advances in Atmospheric Sciences*, 1998, 15: 113~ 123

(1998-03-26 收稿, 1998-06-27 收修改稿)

<https://engine.scichina.com/doi/10.1360/csb1999-44-6-603>

其中 $i, j = 1, 2, 3$. σ_{ij} , D_j 分别表示应力分量和电位移分量. φ 和 u_i 分别表示电势和位移分量. n_j 表示指向边界外法线方向的单位矢量. λ 表示非协调插值部分. 式(1)的力学意义是, 单元表面 $\partial\mathcal{V}$ 上表面力和表面电荷对非协调位移和非协调电势所作虚功之和必须为零.

记 σ_{ij}^c 和 D_i^c 为单元的常应力和常电位移, 则单元的高阶应力和高阶电位移分别为

$$\sigma_{ij}^h = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c, \quad D_i^h = D_i - D_i^c. \quad (2)$$

于是由式(1)可得机电耦合问题杂交元的优化条件(OPC):

$$\int_{\partial\mathcal{V}} [\sigma_{ij}^h n_j u_i^\lambda + D_i^h n_i \varphi^\lambda] ds = 0. \quad (3)$$

条件(3)保证了耦合体系能量相容条件的严格实现, 从而改善了单元的数值性能.

单元位移和电势场被定义为协调部分(双线性插值)和非协调部分之和, 即

$$\begin{bmatrix} u \\ \mathbf{v} \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_q \\ \mathbf{v}_q \\ \varphi_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_\lambda \\ \mathbf{v}_\lambda \\ \varphi_\lambda \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) \begin{bmatrix} u_i \\ \mathbf{v}_i \\ \varphi_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_\lambda \\ N_\lambda \\ N_\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_6 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中 $N_\lambda = [1 - \xi^2 \quad 1 - \eta^2]$ 取为 Wilson 非协调插值函数.

单元应力和电位移场初始假定为由单元参数 β_i 定义的一线性分布:

$$\begin{aligned} \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ D_x \\ D_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_5 \\ \vdots \\ \beta_9 \\ \vdots \\ \beta_{15} \end{bmatrix} \\ &= \beta_c + [\phi_{iv} \mid \phi_{\mathbb{E}}] \begin{bmatrix} \beta_{iv} \\ \beta_{\mathbb{E}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

优化条件(3)可表示为

$$[M_{iv} \mid M_{\mathbb{E}}] \begin{bmatrix} \beta_{iv} \\ \beta_{\mathbb{E}} \end{bmatrix} = 0, \quad (6)$$

其中

$$[M_{iv} \mid M_{\mathbb{E}}] = \oint_{\partial A} \mathbf{N}^T \mathbf{n} [\phi_{iv} \mid \phi_{\mathbb{E}}] ds. \quad (7)$$

从式(6)和(5)中消去 $\beta_{\mathbb{E}}$, 得

$$\sigma = \phi \beta = \begin{bmatrix} 1 & & & & a_1^2 \eta & a_3^2 \xi & 0 & 0 \\ & 1 & & & b_1^2 \eta & b_3^2 \xi & 0 & 0 \\ & & 1 & & a_1 b_1 \eta & a_3 b_3 \xi & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & a_1 \eta & a_3 \xi \\ & & & & 1 & 0 & b_1 \eta & b_3 \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_9 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

式(8)即是推广的机电耦合优化杂交元(压电 P-S 元)的应力、电位移列式. 其中单元几何系数为

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

2 机电耦合问题杂交元离散

耦合体系的 Rissner 能量泛函可以表示为^[8]

$$\begin{aligned} \Pi_R(u_i, \alpha_{ij}, \varphi, D_i) = & \int_{\Omega} [R - u_{i,j} \alpha_{ij} + u f_i - \varphi_{,i} D_i - \varphi q_b] d\Omega + \\ & \int_{S_u} (u_i - \bar{u}_i) \alpha_{ij} n_j ds + \int_{S_\varphi} (\varphi - \bar{\varphi}) D_i n_j ds + \int_{S_\sigma} u_i \bar{T}_i ds - \int_{S_\omega} \varphi \bar{q}_s ds, \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$R(\alpha_{ij}, D_i) = \frac{1}{2} s_{ijkl}^D \alpha_{ij} \alpha_{kl} - \frac{1}{2} \beta_{ij}^\sigma D_i D_j + g_{kij} \alpha_{ij} D_k,$$

式中 f_i, q_b 分别表示体力分量和体电荷密度, $S_u, S_\sigma, S_\varphi, S_\omega$ 分别表示位移边界、力边界、电势边界和电位移边界; $\bar{u}_i, \bar{T}_i, \bar{\varphi}, \bar{q}_s$ 分别表示在相应边界上给定的位移和力分量以及电势和电荷; $s_{ijkl}^D, \beta_{ij}^\sigma, g_{kij}$ 分别为开路弹性柔度张量、压电电压常数张量、自由介电隔离率常数张量. 由式(10)的驻值条件, 则可得到耦合体系的控制方程、几何关系以及边界条件.

取单元应力和电位移插值函数为式(8), 单元位移和电势取为双线性插值(参见式(4)中协调部分). 将泛函(10)写作矩阵形式, 且不计体力和体电荷以及边界载荷的影响, 对于单个单元则可得

$$\Pi_R^e(q, \beta) = -\frac{1}{2} \beta^T H \beta + \beta^T G q, \quad (11)$$

式中

$$H = \int_{\Omega} \phi^T \begin{bmatrix} s^D & g^T \\ g & -\beta^\sigma \end{bmatrix} \phi d\Omega, \quad G = \int_{\Omega} \phi^T (B N_q) d\Omega$$

$$B = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & 0 & \partial/\partial y \end{bmatrix}.$$

在单元一级对 β 进行静力凝聚, 得

$$\Pi_R(q) = \frac{1}{2} q^T K q, \quad (12)$$

其中 $K = G^T H^{-1} G$ 为压电单元的刚度矩阵.

3 机电耦合 iv 型裂尖场数值分析

为了便于比较, 将压电 P-S 元具体应用于 PZT-4 材料平面应变问题在机电耦合载荷下 iv 型裂尖场的奇异性分析, 对此 Sosa^[3] 给出了相应问题的精确解.

试件的几何尺寸见图1, 裂纹长为2个单位, 试件宽为4个单位. 由于对称性, 实际计算中仅取试件的1/4进行计算(如图示阴影部分), 并且取边界AC上 x 方向的位移为零, 边界DB上取 y 方向位移和电势均为零, 裂纹表面AD上力自由, 且法向电位移为零. 网格如图2(a)所示, 图2(b)为裂尖网格的放大图, 计算中共取700个节点, 646个单元. 材料常数同文献[3].

为了与精确解进行比较, 必须进行有限尺寸修正. 在算例中采用的Brown修正因子为1.18.

为了验证应力和电位移的角分布和 $1/\sqrt{r}$ 阶奇异性, 计算中同时考查了距裂纹尖端距离分别为 3×10^{-4} , 7×10^{-4} , 15×10^{-4} , 31×10^{-4} 单位的4个围道(依次记为1, 2, 3, 4,)上的应力和电位移的角分布. 为了便于比较, 结果同时乘以 $\sqrt{2r/a}$ 来归一化.

压电陶瓷是一种脆性材料, 环向应力 σ_θ 是导致压电体破坏的主要因素. 本文中将主要分析环向应力的分布情况. 图3中给出了纯电载荷下的环向应力的角分布曲线. 为了考查裂尖应力的 $1/\sqrt{r}$ 阶奇异性, 图中同时公布了4条围道上的计算结果, 并且为了便于精度比较, 图中还给出了位移等参元Q4的计算结果, 其中虚线为Q4元的结果, 实线是压电P-S元的结果, 可以看到, Q4元所给出的解较Sosa的精确解有相当大的偏离, 压电P-S元的结果非常理想, 由此可见文中发展的机电耦合优化杂交模型在耦合奇性分析中的优越性和可靠性.

图1 中心拉伸裂纹试件(CCP)

图2 计算网格图

(a) 整体网格, (b) 裂尖网格

图4(a)给出了在耦合载荷下环向应力的角分布曲线, 由于不同围道之间数值结果的一致

图3 电位移载荷(D_{∞})下裂尖环向应力角分布

...表 Q4 元, —表压电 P-S 元. ▼, ▲, ◆, ■ 分别表围道 1~4 对应的解

性, 图中只给出了第 2 条围道的结果. 可以看到对于纯拉应力加载情形($k=0$ 时), 环向应力在 $\theta=0^\circ$ 时取最大值. 按照最大环向拉应力准则, 这说明裂纹有沿原裂纹方向扩展的趋势, 也就是说, 在纯应力载荷下压电介质的机电耦合特性对裂纹扩展特点没有影响. 一般意义上的应力强度因子 K_{IV} 的定义就是 $\theta=0^\circ$ 方向的环向应力的值, 因此对于这种荷载情形, 应力强度因子准则能够预测裂纹的扩展. 然而电载荷的介入将使得断裂机制变得十分复杂. 对于 $k>0$ 的正电场加载情形(此时外加电场的方向与极化方向相同), 正电场将产生环向压应力, 因此可能抑制裂纹的扩展; 而负电场($k<0$) 加载将会引入环向拉应力, 因此会促进裂纹的扩展. 同时由图 4(a) 可以看到随着电载荷所占比例的增加, 环向应力的最大值将会偏离原裂纹 0° 方向. 例如, 对于 $k=\pm 5\times 10^{-8}$ 时, 这种偏离就非常明显了. 上述数值结果与 Sosa^[3] 给出的理论解(图 4(b)) 相吻合. 计算结果表明负电载荷会导致裂纹扩展偏离原方向.

图4 耦合载荷($D_{\infty}, \sigma_{\infty}$)下裂尖环向应力角分布

(a) 本文数值解(P-S 元), (b) Sosa 的理论解. $\sigma_{\infty}>0, k=D_{\infty}/\sigma_{\infty}$. 1—— $k=0$, 2—— $k=10^{-8}$,
3—— $k=5\times 10^{-8}$, 4—— $k=10^{-7}$, 5—— $k=5\times 10^{-7}$

4 结论

作为弹性问题的推广, 文中建立了一个适于机电耦合分析的压电 P-S 元. 通过对 PZT-4 材料平面应变 iv 型裂尖场的数值分析和比较, 证明这一单元模型对于耦合性奇异场的分析是十分有效的. 通过对裂尖环向应力角分布的分析发现, 压电介质在力载荷和电载荷下会表现出不同的断裂特性. 纯拉应力载荷不会影响裂纹的扩展方向, 而由负电场产生的环向拉应力则会导致裂纹的偏离扩展. 由此推知按照传统方法所定义的常规的应力强度因子准则将不再

适用于这类压电断裂问题的分析.

致谢 本工作为国家自然科学基金(批准号:19772051)资助项目.

参 考 文 献

- 1 Parton V Z. Fracture mechanics of piezoelectric materials. *Acta Astronaut*, 1976, 3: 671~ 683
- 2 Deeg W F. The analysis of dislocation, crack and inclusion problem in piezoelectric solids. Ph D Thesis, Standford University, 1980
- 3 Sosa H A. On the fracture mechanics of piezoelectric solids. *Int J Solids Structures*, 1992, 29(21): 2613~ 2622
- 4 杨晓翔, 匡震邦. 刚度微分法计算压电材料平面断裂问题. *力学学报*, 1997, 29(3): 314~ 322
- 5 Kumar S, Singh R N. Crack propagation in piezoelectric materials under combined mechanical and electrical loadings. *Acta Mater*, 1996, 44(1): 173~ 200
- 6 吴长春, 卞学谦. 非协调数值分析与杂交元方法. 北京: 科学出版社, 1997
- 7 吴长春, Bufler H. 多变量有限元: 相容性与模式优化. *中国科学, A 辑*, 1990, 9: 946~ 956
- 8 EerNisse E P. Variational method for electroelastic vibration analysis. *IEEE Trans J Sonics & Ultrasonics*, 1983, 14: 59~ 67

(1998-07-23 收稿, 1998-11-20 收修收稿)

三维连续网络结构增强金属基复合材料及其制备

周 伟 胡文彬 张 荻

(上海交通大学金属基复合材料国家重点实验室, 上海 200030)

摘要 在金属基复合材料中引入了三维连续网络结构增强相的概念并给出了制备这种特殊结构复合材料的一种方法. 以 $\text{Al-TiO}_2\text{-C}$ 系为例, 对利用自蔓延高温合成方法(SHS)制备的 $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-TiC}$ 多孔连通网络陶瓷骨架进行真空高压浸渍 Al 液获得这种复合材料的整个制备过程进行了研究. 重点研究了相关 SHS 反应过程中连通孔隙率的形成规律并利用扫描电镜和光学显微镜对 $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-TiC}$ 多孔陶瓷材料以及得到的三维连续网络结构增强金属基复合材料的微观形貌特征进行了观察.

关键词 三维连续网络结构 金属基复合材料 SHS 真空压力浸渍

传统的复合材料, 其增强相一般是晶须、长纤维、短纤维或颗粒^[1]. 近来, 一种新型的复合材料网络交叉复合材料(Interpenetrating phase composites)^[2]引起了人们的注意. 其基体与增强相在整个材料中形成各自的三维空间连续网络结构并且互相缠绕在一起. 实际上自然界中大量存在着这种材料, 比如骨骼、树木等. 在这种复合材料中, 每一种组成相的特性能够被保留, 从而为获得具有多功能的复合材料提供了可能. 比如说, 陶瓷相可用来提高耐磨性或断裂强度, 而金属相就用来提高导电性或塑性. 对于这种新型复合材料的研究现在还处于起步阶段, 目前国外主要集中在陶瓷基与聚合物基复合材料方面. 其中对于用金属相来增韧的陶瓷基复合材料, 在制备工艺和增韧机理模型的研究方面人们已经做了比较多的工作^[3~6]. 它们有时被称作 C^4 材料(continuous ceramic composites)^[7]. 与传统的复合材料相比, 它们具有更高的机械强度和韧性, 显示出网络交叉结构其潜在的优势. 然而, 在金属基复合材料方面, 国内外尚无这方面的报道.

本文提出在金属基复合材料中引入三维连续网络结构增强相, 这不仅拓宽了增强相的选择范围, 使之不再局限于颗粒、纤维、晶须等, 更重要的是提出了一种新的增强结构和方式, 将