关于 Finsler 流形的曲率与基本群

献给胡和生教授 90 华诞

沈一兵^{1*}, 赵唯²

1. 浙江大学数学科学学院, 杭州 310027;

2. 华东理工大学数学系, 上海 200237

E-mail: yibingshen@zju.edu.cn, szhao_wei@yahoo.com

收稿日期: 2017-06-10; 接受日期: 2017-08-23; 网络出版日期: 2017-11-13; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11471246, 11671352 和 11501202) 资助项目

摘要 Finsler 流形是具备没有二次型限制的 Riemann 度量的微分流形, 它是 Riemann 流形的最自然推广. 本文概述 Finsler 流形的曲率与基本群方面的若干进展和新近结果, 内容包括基本群的增长、流形和基本群的熵、第一 Betti 数和基本群的有限性定理等, 为进一步发展整体 Finsler 几何抛砖引玉.

关键词 Ricci 曲率 S-曲率 基本群 熵 第一 Betti 数

MSC (2010) 主题分类 53C60, 53B40

1 引言

Finsler 流形是具备 Finsler 度量的微分流形, Finsler 度量就是没有二次型限制的 Riemann 度量. 因此, Finsler 几何是 Riemann 几何的最自然而又重要的推广. 历史上, Riemann 在他的著名就职演说“论奠定几何学基础的假设” (1854 年) 中, 就已提出了四次微分表达式的四次根度量情形的 Finsler 几何概念 (参见文献 [1]), 他选择微分二次型的度量为代表进行研究, 形成了现在所称的 Riemann 几何. 直到 1918 年, Finsler 才研究了一般度量情形下曲线与曲面的几何, 发展成了现在所称的 Finsler 几何. 著名几何学泰斗陈省身先生认为, 应该称它为 Riemann-Finsler 几何 [2].

流形 M 上的闭连续曲线称为回路 (loop), M 的基本群就是它上面所有回路构成的群, 也称为一维同伦群, 常用 $\pi_1(M)$ 表示. 这是流形的拓扑性质. 整体微分几何的重要方向之一就是研究流形的曲率与拓扑之间的关系, 前者是流形的局部性质, 后者是整体的. 近二十多年来, 整体 Finsler 几何研究取得了全新的重要进展, 使 Finsler 几何的面貌大为改观 (参见文献 [2–4]). 本文的目的是概述 Finsler 流形的曲率与基本群方面的若干进展和新近结果, 内容包括基本群的增长、流形和基本群的熵、第一 Betti 数和基本群的有限性定理等, 企盼为进一步发展整体 Finsler 几何抛砖引玉.

英文引用格式: Shen Y B, Zhao W. On curvatures and fundamental groups of Finsler manifolds (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 807–818, doi: 10.1360/N012017-00122

具体内容安排如下: 第 2 节介绍 Finsler 几何的某些基本概念和重要的曲率, 为后面作准备. 第 3 节讨论 Finsler 流形的基本群的增长, 关于 Finsler 流形的一般体积元, 给出了体积增长与基本群增长的密切关系. 第 4 节介绍基本群的熵, 给出了 Finsler 流形的熵与其基本群熵的关系, 完全推广了 Riemann 流形的相应结果. 第 5 节是关于 Finsler 流形的第一 Betti 数, 给出了在一定的曲率条件下紧致 Finsler 流形的第一 Betti 数的上界估计. 第 6 节讨论 Finsler 流形的基本群的有限性定理, 指出了在满足某些几何条件的紧致 Finsler 流形族中, 仅存在有限多个基本群的同构类. 此外, 我们也提出了某些相关问题.

2 准备工作

2.1 Finsler 度量

设 M 是一个 n 维光滑微分流形, (x^i, y^i) 是它的切丛 TM 上的局部坐标, $F : TM \rightarrow [0, +\infty)$ 是 TM 上的非负函数. 记 $x = (x^i)$, $y = (y^i)$. 若 F 满足

- (i) 正齐性: $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, $\forall \lambda > 0$;
- (ii) 光滑性: 在 $TM \setminus \{0\}$ 上 $F(x, y)$ 是光滑函数;
- (iii) 正定性: 对于任意非零向量 $y \neq 0$, 矩阵 (g_{ij}) 是正定的, 其中

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(x, y), \quad 1 \leq i, j, \dots \leq n,$$

则称 $F(x, y)$ 为 M 上的一个 Finsler 度量. 二次型

$$g = g_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j$$

称为基本二次型, 或基本张量. 显然, 若 g_{ij} 与 y 无关, 这就是 Riemann 度量. 若 $F(x, -y) = F(x, y)$, 则称 Finsler 度量 $F(x, y)$ 是可反的, 否则称为不可反的. 一般 Finsler 度量 $F(x, y)$ 是不可反的, 它的可反系数定义为

$$\lambda_F := \sup_{(x, y) \in TM, y \neq 0} \frac{F(x, -y)}{F(x, y)} \quad (\geq 1).$$

显然, Riemann 度量 $F_R = \sqrt{g_{ij}(x)y^i y^j}$ 作为 Finsler 度量是可反的, 即 $\lambda_{F_R} = 1$.

我们用

$$G^i(x, y) = \frac{1}{4} g^{ij} \{ [F^2]_{y^j x^k} y^k - [F^2]_{x^j} \}$$

表示 (M, F) 的测地系数, 其中下标表示关于对应变量的偏导数 (参见文献 [4, 第 3.3.3 小节]). 于是, (M, F) 的 Riemann 曲率张量 (参见文献 [4, 第 3.2.2 小节]) 为

$$R_j^i = 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^j} - y^k \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^k \partial y^j} + 2 G^k \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^k \partial y^j} - \frac{\partial G^i}{\partial y^k} \frac{\partial G^k}{\partial y^j}.$$

对于任一基点 $(x, y) \in TM \setminus \{0\}$ 和任一向量 $v \in T_x M$, (M, F) 沿 v 的旗曲率定义为

$$K_y(v) := \frac{g_{ik} R_j^i v^j v^k}{(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) y^i v^j y^k v^l},$$

它类似于 Riemann 流形的截面曲率. 旗曲率的平均称为 Ricci 曲率, 它可表达为

$$\text{Ric}(x, y) := R_i^i.$$

这是 TM 上的一个数量函数. 旗曲率和 Ricci 曲率是 Finsler 流形上最重要的内蕴几何量.

2.2 S- 曲率

在 Finsler 流形 (M, F) 上可定义各种体积元, 如 Busemann-Hausdorff 体积元和 Holmes-Thompson 体积元等 (参见文献 [4, 第 4.1 小节]), 它们在 Riemann 情形下都化为通常的 Riemann 体积元. 设

$$d\mu = \sigma_F(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

为 (M, F) 的某一体积元. 对于任何 $(x, y) \in TM \setminus \{0\}$, 定义 (M, F) 关于 $d\mu$ 的 S- 曲率为

$$S(y) := \left. \frac{d}{dt} [\tau(\dot{\gamma}(t))] \right|_{t=0}, \quad \tau(y) := \log \frac{\sqrt{\det(g_{ij}(x, y))}}{\sigma(x)},$$

其中 $\gamma(t)$ 是满足 $\gamma(0) = x$ 和 $\dot{\gamma}(0) = \frac{dy}{dt}(0) = y$ 的测地线. 显然, 在 Riemann 情形下, $S = 0$. S- 曲率是 Finsler 流形上的非 Riemann 几何量, 它在研究 Finsler 流形的测地线理论和体积比较定理时十分重要 (参见文献 [4, 第 4.2 小节]).

设 $\widetilde{M}$ 为 M 的通用覆盖空间, $\psi: \widetilde{M} \rightarrow M$ 是覆盖映射. 我们可在 $\widetilde{M}$ 上定义 Finsler 度量 $\widetilde{F}$, 使得 ψ 是等距映射. 其实, 只需定义

$$\widetilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) := F(\psi(\tilde{x}), d\psi(\tilde{y})), \quad \forall \tilde{x} \in \widetilde{M}, \quad \tilde{y} \in T_{\tilde{x}}\widetilde{M}.$$

容易看出, 若 (M, F) 是向前完备的 Finsler 流形, 则 $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$ 也是向前完备的.

设 M 的覆盖空间 $\widetilde{M}$ 有一个到自身的同胚 $\zeta: \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$, 使得

$$\psi \circ \zeta = \psi,$$

则称 ζ 为 $(\widetilde{M}, \psi)$ 的舱面变换 (deck transformation). 对任意 $\tilde{x} \in \widetilde{M}$, 有 $x := \psi(\tilde{x})$, 其中 $\psi: \widetilde{M} \rightarrow M$ 为通用覆盖. 对任意 $\alpha \in \pi_1(M, x)$, 取 α 中任意元素 $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$, 那么 γ 存在唯一的提升 $\tilde{\gamma}$ 满足 $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$. 定义 $\alpha\tilde{x} = \tilde{\gamma}(1)$. 可以证明该定义是良定的 [4]. 在此意义下, $\pi_1(M)$ 可以看成是 $\widetilde{M}$ 的舱面变换群, 即若 $\gamma \in \pi_1(M)$, 则 $\psi \circ \gamma = \psi$. 因此, γ 必是 $\widetilde{M}$ 的局部等距映射. γ 的共轭类是集合 $\{\gamma'\gamma'^{-1} \mid \gamma' \in \pi_1(M)\}$. $\gamma = 1$ 的共轭类就是 $\{1\}$.

3 基本群的增长

3.1 多项式增长

设 G 是一个有限生成群, $Q = \{g_i\}$ 是 G 的一个有限生成集. 对每个 $g \in G$, 定义 $\|g\|_{\text{alg}}$ 为用 g_i 及其逆表示 g 的最少个数. 显然, 对每个 i , 有 $\|g_i\|_{\text{alg}} = 1$. $\|\cdot\|_{\text{alg}}: G \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是 G 上的一个模, 且满足

- (i) $\|g\|_{\text{alg}} = 0$ 成立的充要条件是 $g = 1$;
- (ii) $\|gh\|_{\text{alg}} \leq \|g\|_{\text{alg}} + \|h\|_{\text{alg}}$;

(iii) $\|g^{-1}\|_{\text{alg}} = \|g\|_{\text{alg}}$.

称 $\|\cdot\|_{\text{alg}}$ 为关于生成集 Q 的代数模 (algebraic norm). 所有关于 G 的有限生成集的代数模是相互等价的, 即它与 Q 的选取无关.

设 G 和 Q 如上所述. 定义 (关于 Q 的) 计数函数 (counting function) $N(r)$ 为

$$N(r) := \#\{g \in G : \|g\|_{\text{alg}} \leq r\}.$$

如果存在某个常数 $a > 1$, 使得 $N(r) \geq ar$, 那么称 G 有指数增长. 这也等价于 (参见文献 [5])

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log N(r)}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log N(r)}{r} > 0.$$

如果 $N(r) \leq C \cdot r^n$, 其中 C 是某个常数, 那么称 G 有 n 次多项式增长. 显然, 对 G 的有限生成集 Q 的不同选取, 不影响其增长类型, 即保持指数或多项式增长不变.

1968 年, Milnor^[5] 证得, 若 M 是具有非负 Ricci 曲率的 n 维完备 Riemann 流形, 则 $\pi_1(M)$ 的任意有限生成子群都有 n 次的多项式增长. 由此提出了至今尚未解决的下列猜想:

假设 1 (Minlor 猜想) 具有非负 Ricci 曲率的完备 Riemann 流形的基本群是有限生成的.

此后有不少国内外学者对 Riemann 流形的基本群作出了很好的研究 (参见文献 [6–8]). 1997 年, 作为 Finsler 流形体积比较定理的应用, Shen^[9] 把上述 Milnor 的结果推广到 Finsler 流形, 证得: 若 (M, F) 是具有非负 Ricci 曲率和零 S- 曲率的 n 维向前完备 Finsler 流形, 则 $\pi_1(M)$ 的任意有限生成子群都有 n 次的多项式增长. 我们进一步放宽了对 S- 曲率的限制.

事实上, 设 $d\mu$ 是 (M, F) 的某一体积元, $\psi: \widetilde{M} \rightarrow M$ 是它的通用覆盖. 对于任一点 $x \in M$ 和 $\pi_1(M)$ 的任意一个具有有限生成集 Q 的子群 G , 设 $N(\cdot)$ 是关于 Q 的计数函数. 那么存在正数 $\eta = \eta(x, Q)$ 和 $\epsilon = \epsilon(x)$ 使得 (参见文献 [10])

$$N(r) \leq \frac{\mu(B_{\tilde{x}}^+(\eta r + \epsilon))}{\mu(B_{\tilde{x}}^+(\epsilon))}, \quad (*)$$

其中 $r > 0$ 是任何正数, $\tilde{x}$ 是纤维 $\psi^{-1}(x)$ 上任一点, $\mu(B_{\tilde{x}}^+(s))$ 表示 $\widetilde{M}$ 上中心为 $\tilde{x}$ 、半径为 s 的向前测地球 $B_{\tilde{x}}^+(s)$ 关于拉回体积元 $\psi^*d\mu$ 的体积.

另一方面, 利用体积比较定理^[11], 若 (M, F) 的 Ricci 曲率和 S- 曲率都非负, 则对于任意有限生成子群都有

$$\begin{aligned} N(r) &\leq \frac{\mu(B_{\tilde{x}}^+(\eta r + \epsilon))}{\mu(B_{\tilde{x}}^+(\epsilon))} \\ &\leq \int_0^{\eta r + \epsilon} t^{n-1} dt \left(\int_0^\epsilon t^{n-1} dt \right)^{-1} \\ &\leq \left(\frac{\eta + \epsilon}{\epsilon} \right)^n r^n. \end{aligned}$$

因此我们得下列 (参见文献 [10]) 定理:

定理 1 设 (M, F) 是 n 维向前完备的 Finsler 流形. 若它的 Ricci 曲率和 S- 曲率都是非负的, 则 $\pi_1(M)$ 的任意有限生成子群都有 n 次的多项式增长.

注 1 如果引进 Finsler 流形的一致常数 (uniformity constant) $\Lambda_F: (M, F) \rightarrow \mathbb{R}^+$ 的概念 (参见文献 [12]), 即

$$\Lambda_F(x) := \sup_{y, z, u \in T_x M \setminus \{0\}} \frac{g_y(u, u)}{g_z(u, u)}, \quad x \in M,$$

则对于 Busemann-Hausdorff 体积元或 Holmes-Thompson 体积元, 定理 1 中“非负 S-曲率”的条件可用“有限一致常数”来代替 (参见文献 [13]).

由此我们自然提出下列问题:

问题 1 Ricci 曲率非负的向前完备 Finsler 流形的基本群是否是有限生成的?

3.2 体积增长

设 $(M, F, d\mu)$ 是向前完备的 Finsler 流形. 如果存在点 $x \in M$, 使得

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \text{Vol}_\mu(B_x^+(r))}{r} > 0,$$

其中 $B_x^+(r)$ 是 M 上以 x 为中心、 r 为半径的向前测地球, Vol_μ 表示 M 上关于体积元 $d\mu$ 的体积, 那么称 M (关于 $d\mu$) 是指数体积增长的. 如果存在某个常数 C 和点 $x \in M$, 使得

$$\text{Vol}_\mu(B_x^+(r)) \leq C \cdot r^n,$$

那么称 M (关于 $d\mu$) 是 n 次多项式体积增长的.

容易验证 (M, F) 的体积增长型与基点 x 的选取无关. 特别地, 如果 (M, F) 是紧的, 那么 M 的万有覆盖 $\psi: \widetilde{M} \rightarrow M$ 的体积增长型与体积元的选取也无关 (参见文献 [4]).

如我们所知, 群的增长型与有限生成集的选取无关. 取 $\pi_1(M)$ 的任意有限生成集 Q . 固定任意 $\tilde{x} \in \widetilde{M}$, 设 $N(\cdot)$ 为 Q 的计数函数. 那么对一切 $r > 0$, (*) 成立.

另一方面, 当 M 为紧致时, 可取 $\pi_1(M)$ 的生成群, 使得当 $r > \frac{2(1+\lambda_F)D_M}{\nu} + 1$ 时, 有

$$N(r) \geq \frac{\mu(B_{\tilde{x}}^+(\nu r - (\nu + (1 + 2\lambda_F)D_M)))}{\mu(B_{\tilde{x}}^+(D_M))},$$

其中 λ_F 表示 (M, F) 的可反系数, ν 是只依赖于 $\tilde{x}$ 的正常数, D_M 为 M 的直径 (参见文献 [4]).

因为体积增长的类型与基点的选取无关, 由上式和 (*), 利用体积比较定理, 我们就得下列 (参见文献 [10]) 定理:

定理 2 设 (M, F) 是紧致的 Finsler 流形, $\psi: \widetilde{M} \rightarrow M$ 为其通用覆盖, 则 $\pi_1(M)$ 有多项式 (或指数) 增长的充要条件是 $\widetilde{M}$ 有多项式 (或指数) 体积增长.

注 2 设 $(M, F, d\mu)$ 是紧致 Finsler 流形, $\psi: \widetilde{M} \rightarrow M$ 为其通用覆盖. 假设以下两个条件之一成立:

- (i) M 的旗曲率满足 $\mathbf{K}(V; W) \leq -a^2$;
- (ii) M 具有非正旗曲率, 并且 $\mathbf{Ric}_M \leq -a^2$.

则由文献 [13, 定理 5.5] 知, $(\widetilde{M}, \psi^*F)$ 就有指数体积增长. 再根据定理 2, 这时 $\pi_1(M)$ 有指数增长. 在 Riemann 情形下, 这由 Milnor [5] 得到.

4 基本群的熵

设 G 是一个离散群 (或有限生成群), Q 为其有限生成集. 用 $N(r)$ 表示关于 Q 的计数函数. Q 的熵 (entropy) 定义为

$$h(Q) := \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(N(r))}{r}.$$

G 的熵 $h(G)$ 定义为所有有限生成集的熵的下确界

$$h(G) := \inf_Q \{h(Q)\}.$$

设 $(M, F, d\mu)$ 是向前完备的 Finsler 流形, $\psi: \widetilde{M} \rightarrow M$ 是其通用覆盖. 对于任何 $\tilde{x} \in \widetilde{M}$, 极限

$$h(M, F) := \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(B_{\tilde{x}}^+(r))}{r}$$

称为 (M, F) 的熵, 其中 μ 表示 $\widetilde{M}$ 上关于拉回体积元 $\psi^*(d\mu)$ 的体积.

当 (M, F) 为紧致 Riemann 流形时, 流形的熵与其基本群的熵有如下关系:

$$h(\pi_1(M, x)) \leq 2D_M h(M, F),$$

其中 $x \in M$, D_M 表示 M 的直径 (参见文献 [6, 定理 5.16], 该书印刷有误, 定理中的 $h(V)$ 和 $h(\pi_1(V))$ 应交换位置). 对于 Finsler 流形, 我们有 (参见文献 [10]) 下面的定理:

定理 3 设 (M, F) 是紧致的 Finsler 流形, 其可反系数为 λ_F , 直径为 D_M , 则

$$h(\pi_1(M, x)) \leq (1 + \lambda_F) D_M h(M, F),$$

其中 $h(\pi_1(M, x))$ 表示以 $x \in M$ 为基点的基本群 $\pi_1(M)$ 的熵.

定理的证明要用到下列几何模的概念. 设 $\psi: \widetilde{M} \rightarrow M$ 是 (M, F) 的通用覆盖. 对任意点 $x \in M$, 对每个 $\alpha \in \pi_1(M)$, 伴随 x 的几何模 (geometric norm) 定义为

$$\|\alpha\|_{\text{geo}} = d_{\widetilde{M}}(\tilde{x}, \alpha\tilde{x}),$$

其中 $\tilde{x}$ 为纤维 $\psi^{-1}(x)$ 中的任意点, $d_{\widetilde{M}}$ 是 $(\widetilde{M}, \psi^*F)$ 上的距离函数.

当 M 为紧致时, 其单射半径 i_M 大于 0. 记 $\epsilon = i_M/2$, 则 M 中每条以 x 为基点、长度小于 2ϵ 的回路都同伦于 x . 所以, $\pi_1(M, x)$ 中的 (除单位元外) 每个元素的几何模都大于 ϵ , 这意味着球心在轨道 $\pi_1(M, x)\tilde{x}$ 上的向前度量球 $B_{\alpha\tilde{x}}^+(\epsilon/(2\lambda_F))$ 是互不相交的. 因为 $\pi_1(M, x)$ 是 $(\widetilde{M}, \psi^*F)$ 的覆盖变换群, 故所有这些向前度量球都有相同的体积, 记为 ν . 设 $N_1(R)$ 表示 $\pi_1(M, x)\tilde{x}$ 包含在 $B_{\tilde{x}}^+(R)$ 中的元素个数, 那么,

$$N_1(R) \leq \nu^{-1} \mu\left(B_{\tilde{x}}^+\left(R + \frac{\epsilon}{2\lambda_F}\right)\right).$$

因此,

$$\begin{aligned} h(M, F) &= \liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(B_{\tilde{x}}^+(R + \frac{\epsilon}{2\lambda_F}))}{R} \\ &\geq \liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\log N_1(R)}{R}. \end{aligned}$$

利用三角不等式, 我们可以选取 $\pi_1(M, x)$ 的一个有限生成集

$$Q := \{\alpha \in \pi_1(M, x) : \|\alpha\|_{\text{geo}} \leq (1 + \lambda_F) D_M\},$$

使得伴随于 Q 的几何模和代数模满足不等式 $\|\cdot\|_{\text{geo}} \leq (1 + \lambda_F) D_M \|\cdot\|_{\text{alg}}$. 因此,

$$N(R) = \#\{\alpha \in \pi(M, x) : \|\alpha\|_{\text{alg}} \leq R\} \leq N_1((1 + \lambda_F) D_M R).$$

于是,

$$h(\pi_1(M, x)) \leq \liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\log N(R)}{R} \leq \liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\log N_1((1 + \lambda_F)D_M R)}{R} \leq (1 + \lambda_F)D_M h(M, F).$$

这就证明了定理 3.

结合 Finsler 流形的 Bonnet-Myers 定理^[2], 即得下面的推论:

推论 1 设 (M, F) 是 n 维向前完备的 Finsler 流形, 其可反系数为 λ_F . 若 (M, F) 的 Ricci 曲率不小于 $(n - 1)k > 0$, 则

$$h(\pi_1(M, p)) \leq (1 + \lambda_F) \frac{\pi}{\sqrt{k}} h(M, F).$$

关于基本群和曲率的进一步考虑, 我们推荐下面的问题, 在 Riemann 情形下, 这就是 Wolf 问题 (参见文献 [14]).

问题 2 设 (M, F) 是旗曲率非正的紧致 Finsler 流形. 如果 $\pi_1(M)$ 有一指标有限的可解子群, 那么 (M, F) 是平坦的吗?

5 第一 Betti 数

设 (M, F) 是 n 维紧致的 Finsler 流形, 可反系数为 λ_F , $\widetilde{M}$ 为其通用覆盖. 根据 Hurewicz 定理^[15], 第一同调群是

$$H_1(M, \mathbb{Z}) = \frac{\pi_1(M)}{[\pi_1(M), \pi_1(M)]},$$

其中 $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ 表示 $\pi_1(M)$ 的交换子群. $H_1(M, \mathbb{Z})$ 通过舱面变换作用在 M 的覆盖空间

$$\bar{M} := \frac{\widetilde{M}}{[\pi_1(M), \pi_1(M)]}$$

上. $H_1(M, \mathbb{Z})$ 是一个有限生成的 Abel 群, 它的秩 (rank) 称为 M 的第一 Betti 数 (the first Betti number), 记为 $b_1(M)$.

记 $\Gamma = H_1(M, \mathbb{Z})$. 注意, Γ 的任意有限指标子群与 Γ 有相同的秩 (参见文献 [6, 第 5 小节第 C 部分]). 类似于文献 [6, 引理 5.19], 在 Finsler 流形 (M, F) 上有如下推广:

引理 1 固定任意点 $x \in \bar{M}$, 存在一个由元素 $\gamma_1, \dots, \gamma_{b_1}$ 生成的有限指标子群 $\Gamma' \subset \Gamma$, 使得

$$d(x, \gamma_i(x)) \leq (1 + \lambda_F)D_M.$$

特别地, 对每个 $\gamma \in \Gamma' - \{1\}$, 有

$$d(x, \gamma(x)) > D_M,$$

其中 d 表示 M 上的距离函数.

利用上述引理就可得下列 (参见文献 [16]) 定理:

定理 4 设 $(M, F, d\mu)$ 是 n 维紧致的 Finsler 流形, 其可反系数为 λ_F , 直径为 D_M . 如果 $(M, F, d\mu)$ 满足

$$\mathbf{Ric} \geq -(n - 1)k^2, \quad \mathbf{S} \geq (n - 1)h,$$

其中 $k (\geq 0)$ 和 h 为实数, $\mathbf{S}$ 表示关于体积元 $d\mu$ 的 S- 曲率, 则存在一个仅依赖于 n, D_M, λ_F, k 和 h 的有限常数 $C(n, D_M, \lambda_F, k, h)$, 使得 M 的第一 Betti 数满足

$$b_1 \leq C(n, D_M, \lambda_F, k, h).$$

特别地, 当 $h \geq 0, kD_M$ 充分小时, $b_1 \leq n$.

事实上, 根据引理 1, 我们可以选取 M 的覆盖 $\bar{M}$, 使对应的舱面变换 $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_{b_1} \rangle$ 是一个自由 Abel 群, 且满足: 存在某个点 $x \in \bar{M}$, 对任意 $\gamma \in \Gamma - \{1\}$, 有

$$d(x, \gamma_i(x)) \leq (1 + \lambda_F)D_M, \quad d(x, \gamma(x)) > D_M.$$

如果 $\gamma = \sum_{i=1}^{b_1} k_i \cdot \gamma_i$, 其中 $(k_i) \in \mathbb{Z}^{b_1}$, 那么,

$$d(x, \gamma(x)) \leq \sum_{i=1}^{b_1} |k_i| d(x, \gamma_i(x)) \leq (1 + \lambda_F)D_M \sum_{i=1}^{b_1} |k_i|.$$

对于任意 $r \in \mathbb{N}$, 定义

$$I_r := \left\{ \gamma \in \Gamma : \gamma = k_1 \cdot \gamma_1 + \dots + k_{b_1} \cdot \gamma_{b_1}, \sum_{i=1}^{b_1} |k_i| \leq r \right\}.$$

那么, 对 $\gamma \in I_r$, 有

$$B_{\gamma(x)}^+ \left(\frac{D_M}{2\lambda_F} \right) \subset B_x^+ \left(r(1 + \lambda_F)D_M + \frac{D_M}{2\lambda_F} \right).$$

所有向前球 $B_{\gamma_i(x)}^+(D_M/(2\lambda_F))$ ($i \in \{1, \dots, b_1\}$) 是互不相交的, 且有相同的体积.

不难见

$$T(r) := \sharp I_r = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \binom{b_1 + r - i}{r}.$$

因此, 结合定理的假设条件, 用 $\text{Vol}_{\bar{\mu}}$ 表示关于拉回到 $\bar{M}$ 上的体积元的体积, 我们有

$$\begin{aligned} b_1 &\leq T(r) \leq \frac{\text{Vol}_{\bar{\mu}}(B_x^+(r(1 + \lambda_F)D_M + \frac{D_M}{2\lambda_F}))}{\text{Vol}_{\bar{\mu}}(B_x^+(\frac{D_M}{2\lambda_F}))} \\ &\leq \left(\int_0^{r(1 + \lambda_F)D_M + D_M/(2\lambda_F)} [e^{-ht} \text{sh}(kt)]^{n-1} dt \right) \left(\int_0^{D_M/(2\lambda_F)} [e^{-ht} \text{sh}(kt)]^{n-1} dt \right)^{-1} \\ &=: C(n, D_M, \lambda_F, k, h) < \infty. \end{aligned}$$

至于定理的第二个论断, 只要考虑 $k > 0$ 的情形就可以了. 易知存在 $\eta > 0$, 使得当 $0 < t < \eta$ 时,

$$\frac{1}{5} < \frac{\text{sh}(t)}{t} < 5.$$

取 $kD_M < \eta/((2 + \lambda_F)r)$. 因为 $h \geq 0$, 根据 Gromov 引理^[17], 有

$$\begin{aligned} \frac{r^{b_1}}{b_1!} &\leq T(r) \leq \left(\int_0^{(2 + \lambda_F)kD_M r} (5t)^{n-1} dt \right) \left(\int_0^{kD_M/(2\lambda_F)} (t/5)^{n-1} dt \right)^{-1} \\ &\leq \frac{(2\lambda_F(2 + \lambda_F)r)^n}{(1/5)^{2(n-1)}}, \end{aligned}$$

因此, 当 r 充分大时 (即 kD_M 充分小时), 有 $b_1 \leq n$.

当 (M, F) 为 Riemann 流形时, $\mathbf{S} = 0, \lambda_F = 1$, 这就是文献 [6, 定理 5.21].

注 3 由文献 [13, 18] 可见, S - 曲率有下界也可用一致常数 Λ_F (见注 1) 有上界来代替. 注意到 $\lambda_F \leq \sqrt{\Lambda_F}$, 我们就得到 $b_1 \leq C(n, D_M, \Lambda_F, k)$. 由于在紧致流形上 Λ_F 总是有界的, 因此有下面的推论:

推论 2 设 (M, F) 是具有非负 Ricci 曲率的 n 维紧致 Finsler 流形, 则它的第一 Betti 数 $b_1 \leq n$. 这些结果完全推广了 Riemann 流形的情形 (参见文献 [6]).

问题 3 设 (M, F) 是旗曲率非负的 n 维向前完备 Finsler 流形, 它的可反系数 $\lambda_F < \infty$. 是否存在一个仅依赖于 n 和 λ_F 的常数 $C(n, \lambda_F)$, 使得 $b_1 \leq C(n, \lambda_F)$?

6 基本群的有限性定理

Finsler 流形 (M, F) 中不可收缩的最短回路的长度称为 (M, F) 的第一收缩数 (the first systole), 用 $\text{sys}_1(M)$ 表示. 可以证明: 设 (M_i, F_i) ($i = 1, 2$) 是两个连通的向前完备的 Finsler 流形, 它们的可反系数不大于 δ , 且满足

$$\text{sys}_1(M_i) \geq (1 + \delta)\sigma, \quad i = 1, 2,$$

其中 σ 是某个正数. 如果 $d_{GH}^\delta(M_1, M_2) < \frac{\sigma}{\delta(4+3\delta)}$, 那么 $\pi_1(M_1)$ 和 $\pi_1(M_2)$ 是同构的 (参见文献 [16]). 这里 $d_{GH}^\delta(M_1, M_2)$ 表示 M_1 与 M_2 之间的 δ -Gromov-Hausdorff 距离 (参见文献 [19]).

设 $\mathfrak{M}(n, \delta)$ 是可反系数不大于 δ 的 n 维向前完备 Finsler 流形 (相对于 δ -Gromov-Hausdorff 距离) 的预紧族 (参见文献 [19]). 这意味着对每个 $\epsilon > 0$, 在 $\mathfrak{M}(n, \delta)$ 中存在有限多个元素 $M_1, \dots, M_{N(\epsilon)}$, 使得对每个 $M \in \mathfrak{M}(n, \delta)$, 存在 $i \in \{1, \dots, N(\epsilon)\}$ 满足 $d_{GH}^\delta(M, M_i) < \epsilon$. 再令

$$\mathfrak{M}(n, \delta, \sigma) = \{(M, F) \in \mathfrak{M}(n, \delta) \mid \text{sys}_1(M) \geq \sigma\}.$$

对任意 $\sigma > 0$, 记 $\epsilon = \frac{\sigma}{\delta(1+\delta)(4+3\delta)}$, 则在 $\mathfrak{M}(n, \delta)$ 中存在有限多个元素 $M_1, \dots, M_{N(\epsilon/2)}$, 使得

$$\mathfrak{M}(n, \delta, \sigma) \subset \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon/2)} B^\delta\left(M_i, \frac{\epsilon}{2}\right), \quad B^\delta\left(M_i, \frac{\epsilon}{2}\right) \cap \mathfrak{M}(n, \delta, \sigma) \neq \emptyset,$$

其中

$$B^\delta\left(M_i, \frac{\epsilon}{2}\right) := \left\{ Y \in \mathfrak{M}(n, \delta) \mid d_{GH}^\delta(M_i, Y) < \frac{\epsilon}{2} \right\}.$$

对每个 $1 \leq i \leq N(\epsilon/2)$, 取元素 $M'_i \in B^\delta(M_i, \epsilon/2) \cap \mathfrak{M}(n, \delta, \sigma)$. 因为 δ -Gromov-Hausdorff 距离是可反的, 所以有

$$\mathfrak{M}(n, \delta, \sigma) \subset \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon/2)} B^\delta(M'_i, \epsilon).$$

因此, 对每个 i , $B^\delta(M'_i, \epsilon) \cap \mathfrak{M}(n, \delta, \sigma)$ 中流形的基本群都是同构的. 由此可得下列 (参见文献 [16]) 定理: 对任意 $\sigma > 0$, 记 $\epsilon = \frac{\sigma}{\delta(1+\delta)(4+3\delta)}$, 那么, 在 $\mathfrak{M}(n, \delta)$ 中存在有限多个元素 $M_1, \dots, M_{N(\epsilon/2)}$, 使得

$$\mathfrak{M}(n, \delta, \sigma) \subset \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon/2)} B^\delta\left(M_i, \frac{\epsilon}{2}\right), \quad B^\delta\left(M_i, \frac{\epsilon}{2}\right) \cap \mathfrak{M}(n, \delta, \sigma) \neq \emptyset,$$

其中

$$B^\delta\left(M_i, \frac{\epsilon}{2}\right) := \left\{ Y \in \mathfrak{M}(n, \delta) \mid d_{GH}^\delta(M_i, Y) < \frac{\epsilon}{2} \right\}.$$

对每个 $1 \leq i \leq N(\epsilon/2)$, 取元素

$$M'_i \in B^\delta\left(M_i, \frac{\epsilon}{2}\right) \cap \mathfrak{M}(n, \delta, \sigma).$$

因为 δ -Gromov-Hausdorff 距离是可反的, 所以有

$$\mathfrak{M}(n, \delta, \sigma) \subset \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon/2)} B^\delta(M'_i, \epsilon).$$

因此, 对每个 i , $B^\delta(M'_i, \epsilon) \cap \mathfrak{M}(n, \delta, \sigma)$ 中流形的基本群都是同构的. 由此可得下面的定理 (参见文献 [16]):

定理 5 在 Finsler 流形族 $\mathfrak{M}(n, \delta, \sigma)$ 中仅存在有限多个基本群的同构类.

在 Riemann 情形下, 类似的结果可参见文献 [20].

类似于文献 [6, 命题 5.28], 对于紧致 Finsler 流形 (M, F) 和它的通用覆盖 $\widetilde{M}$, 可以证明: 对于每点 $x \in M$, 存在基本群 $\pi_1(M, x)$ 的有限生成集 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, 使得 $d(\tilde{x}, \gamma_i \tilde{x}) \leq (1 + \lambda_F) D_M$, 其中 $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ 是 x 上纤维中的一点, 且这些生成元的关系都形如 $\gamma_i \gamma_j \gamma_k^{-1} = 1$, 这里 λ_F 和 D_M 表示 (M, F) 的可反系数和直径 (参见文献 [16]).

对于 $n \in \mathbb{N}$, $k, h \in \mathbb{R}$, $\delta \in [1, \infty)$, $v, D \in (0, \infty)$, 我们用 $\mathfrak{M}(n, k, h, \delta, v, D)$ 表示满足以下条件的 n 维紧致 Finsler 流形族 $\{(M_i, F_i, d\mu_i)\}$:

$$\mathbf{Ric}_{M_i} \geq (n-1)k, \quad \mathbf{S}_{M_i} \geq (n-1)h, \quad \lambda_{F_i} \leq \delta, \quad \text{Vol}_{\mu_i}(M_i) \geq v, \quad D_{M_i} \leq D,$$

其中 $\text{Vol}_{\mu_i}(M_i)$ 表示 (M_i, F_i) 关于 $d\mu_i$ 的体积. 我们有下列定理:

定理 6 对固定的 n, k, h, δ, v 和 D , 紧致 Finsler 流形族 $\mathfrak{M}(n, k, h, \delta, v, D)$ 中仅存在有限多个基本群的同构类.

事实上, 取 $\pi_1(M, x)$ 的一个如上面所述的生成集, 设它的生成元个数为 m (可能无穷). 因为生成元之间的关系数目小于 2^{m^3} , 所以只要证明 m 是有界的. 设 $\Omega_x \subset \widetilde{M}$ 为基本域 (参见文献 [4, 第 8.1 小节]). $\{\gamma_i(\Omega_x)\}$ ($1 \leq i \leq m$) 是互不相交的, 且它们有相同的体积. 因为 $d(\tilde{x}, \gamma_i \tilde{x}) \leq (1 + \delta_F) D_M$, 所以, 对每个 $1 \leq i \leq m$, 有

$$\gamma_i(\Omega_x) \subset B_{\tilde{x}}^+(2(1 + \delta) D_M).$$

于是, 应用体积比较定理, 有

$$\begin{aligned} m &\leq \frac{\mu(B_{\tilde{x}}^+(2(1 + \delta) D_M))}{\mu(\Omega_x)} \\ &\leq \frac{V_{k, h, n}(2(1 + \delta) D_M)}{v} \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

其中 (参见文献 [16])

$$V_{k, h, n}(r) := \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^r [e^{-ht} \mathbf{s}_k(t)]^{n-1} dt,$$

$$s_k(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}t), & k > 0, \\ t, & k = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k}t), & k < 0, \end{cases}$$

这里 $\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})$ 表示 $n-1$ 维欧氏球面的标准体积. 这就证明了定理 6. 对于 Riemann 流形的情形, $S = 0$, $\lambda_F = 1$, 这就是文献 [21, 定理 2.3].

结合定理 1 的证明, 从定理 6 可得下列推论, 它是文献 [22, 定理 1] 在 Finsler 情形的推广.

推论 3 对任意常数 $\delta \geq 1$ 和 $v > 0$, 存在 $\epsilon = \epsilon(n, \delta, v) > 0$, 使得若一个 n 维紧致 Finsler 流形 $(M, F, d\mu)$ 满足以下条件:

$$\text{Ric} \geq -\epsilon, \quad S \geq 0, \quad D_M = 1, \quad \lambda_F \leq \delta, \quad \text{Vol}_\mu(M) \geq v,$$

则 $\pi_1(M)$ 的增长是次数不大于 n 的多项式增长.

注 4 定理 4 和 6 的详细证明可参见文献 [16], 在那里我们采用 Busemann-Hausdorff 体积元, 其实对一般体积元也成立, 因为我们的体积比较定理是关于一般体积元的 (参见文献 [11]).

问题 4 对于向前完备的 Finsler 流形族, 是否有类似于定理 6 的结果?

致谢 第一位作者衷心感谢胡和生先生的长期关怀和教诲. 感谢审稿人的有益建议.

参考文献

- 1 Riemann B. 黎曼全集 (第一卷). 中译本. 北京: 高等教育出版社, 2016, 243–254
- 2 Bao D, Chern S S, Shen Z. An Introduction to Riemann-Finsler Geometry. New York: Springer-Verlag, 2000
- 3 Bao D, Bryant R, Chern S S, et al. A Sampler of Riemann-Finsler Geometry. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
- 4 Shen Y B, Shen Z. Introduction to Modern Finsler Geometry. Beijing: Higher Education Press, 2013
- 5 Milnor J. A note on curvature and fundamental group. J Differential Geom, 1968, 2: 1–7
- 6 Gromov M. Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces. Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser, 1999
- 7 Yau S T. On the fundamental group of manifolds of non-positive curvature. Proc Natl Acad Sci USA, 1970, 67: 509–511
- 8 Xin Y L. Ricci curvature and fundamental group. Chin Ann Math Ser B, 2006, 27: 113–120
- 9 Shen Z. Volume comparison and its applications in Riemann-Finsler geometry. Adv Math, 1997, 128: 306–328
- 10 Shen Y B, Zhao W. On fundamental groups of Finsler manifolds. Sci China Math, 2011, 54: 1951–1964
- 11 Zhao W, Shen Y B. A universal volume comparison theorem for Finsler manifolds and related results. Canad J Math, 2013, 65: 1401–1435
- 12 Egloff D. Uniform Finsler Hadamard manifolds. Ann Inst H Poincaré, 1997, 66: 323–357
- 13 Wu B Y. Volume form and its applications in Finsler geometry. Publ Math Debrecen, 2011, 78: 723–741
- 14 Wolf J A. Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds. J Differential Geom, 1968, 2: 421–446
- 15 Spanier E. Algebraic Topology. New York: McGraw-Hill, 1966
- 16 Shen Y B, Zhao W. Some results on fundamental groups and Betti numbers of Finsler manifolds. Internat J Math, 2012, 23: 1250063
- 17 Gromov M. Isoperimetric inequalities in Riemannian manifolds. In: Lecture Notes in Mathematics, vol. 1200. Berlin: Springer-Verlag, 1986, 114–129
- 18 Wu B Y. Some results on curvature and topology of Finsler manifolds. Ann Polon Math, 2013, 107: 309–320
- 19 Shen Y B, Zhao W. Gromov pre-compactness theorems for nonreversible Finsler manifolds. Differential Geom Appl, 2010, 28: 565–581
- 20 Rosenberg S, Yang D. Bounds on the fundamental group of a manifold with almost nonnegative Ricci curvature. J Math Soc Japan, 1994, 46: 267–287
- 21 Anderson M T. Short geodesics and gravitational instantons. J Differential Geom, 1990, 31: 265–275

- 22 Wei G. On the fundamental groups of manifolds with almost-nonnegative Ricci curvature. Proc Amer Math Soc, 1990, 110: 197–199

On curvatures and fundamental groups of Finsler manifolds

Yibing Shen & Wei Zhao

Abstract Finsler manifolds are differentiable manifolds equipped with Riemannian metrics without the quadratic restriction. In this paper, some recent developments and new results on curvatures and fundamental groups of Finsler manifolds are summarized briefly. The contents contain the growth of fundamental groups, the entropy of manifolds and fundamental groups, the first Betti number and the finiteness of fundamental groups.

Keywords Ricci curvature, S-curvature, fundamental group, entropy, the first Betti number

MSC(2010) 53C60, 53B40

doi: 10.1360/N012017-00122