论 文

一类一阶逻辑公式中的公理化真度理论及其应用

王国俊

陕西师范大学数学研究所, 西安 710062
E-mail: gjwang@snnu.edu.cn

收稿日期: 2011-08-09; 接受日期: 2011-12-23

国家自然科学基金 (批准号: 10771129, 11171200) 资助项目

摘要 设 Φ 是全体不含函数符号的一阶闭逻辑公式之集. 本文基于有限模型和均匀概率的思想对非单调逻辑中的典型案例做了分析, 通过概率计算给出了应当赋予文字的完全闭包及其合取的真度值. 以此为基础, 在 Φ 中建立了公理化的真度理论. 证明了 Φ 中每个公式的真度都是可计算的, 并且证明了 Φ 中逻辑公式的真度之集 H 与命题逻辑中的计算结果相一致, 特别是其中所有闭文字的真度都等于 $\frac{1}{2}$. 在真度理论的基础上引入了 Φ 中公式之间相似度和伪距离的计算方法, 并提出了逻辑理论的相容度理论. 作为应用, 给出了估计 Horn 子句型数据库相容度的一种方法.

关键词 谓词逻辑 一阶逻辑公式 函数符号 真度 可计算性 Horn 子句

1 引言

现实世界中的命题是多种多样的, 人们对这些命题真实性的判断也就是多种多样的: 对的、错的、基本上是对的、多半是对的 ... 等等. 但在传统的经典命题逻辑中^[1], 对于已经符号化了的抽象命题 (称为合式公式或逻辑公式) 而言, 却只有重言式和矛盾式的概念, 分别表示完全正确和完全错误的命题, 而对于既非重言式又非矛盾式的绝大多数逻辑公式, 则不去讨论它们的真实程度. 从某种角度上看, 这不能不说是一种缺陷. 事实上, 早在半个世纪以前, 逻辑学家们就注意到这一问题并提出了区分命题逻辑公式可靠程度的思想^[2], 之后又有许多学者从不同的角度研究了区分逻辑公式真实程度的方法^[3,4]. 2001 年, 我们利用势为 2 的均匀概率空间的无穷乘积在经典的二值命题逻辑中引入了一般逻辑公式的真度概念, 证明了全体逻辑公式的真度之集在单位区间中稠密, 并给出了逻辑公式真度值的计算公式^[5]. 此后包括作者在内的许多学者对文献 [5] 中的方法进行了简化, 并用以成功地在各种多值命题逻辑系统和模糊命题逻辑系统中建立起了系统的真度理论, 并开始向随机真度理论进行推广 (参看文献 [6~33] 等), 在此基础上一种较为系统的计量逻辑学的基本框架已被提出 (参看文献 [34~38] 等).

然而值得注意的是, 以上成果都是在各种命题逻辑系统中基于语义方法而建立的. 由于谓词逻辑的表达能力明显强于命题逻辑的表达能力, 我们自然希望在谓词逻辑中也建立起逻辑公式的真度理论. 只是谓词逻辑的语义理论远比命题逻辑复杂, 要在谓词逻辑中基于语义方法建立真度理论相当困难, 至今只得到了一些尝试性的零散结果 (参看文献 [39,40]). 在文献 [41] 的第 5 章中虽然针对 n 值一阶系统定义了公式的“真值”(truth value), 但当 $n = 2$ 时公式的真值非 1 即 0, 仍然不是我们所关心的程度化理论.

我们在经典的二值命题逻辑和各种多值命题逻辑系统中建立的公式真度理论都是基于语义方法而得出的. 由于一阶逻辑的语义理论远较命题逻辑复杂, 我们很难通过语义的途径建立真度理论, 但是如果我们限于考虑有限解释域的情形, 那么问题就要简单得多. 我们可以选定一个势为 n 的解释域, 比如固定 $D = \{1, 2, \dots, n\}$ 来给出谓词符号和函数符号等的解释, 由于势相同的解释域之间存在一一对应关系, 这些解释自然可以转换为其它解释域中的相应解释. 其实, 本文并不打算从语义的角度出发来建立一阶逻辑公式的真度理论, 而是要采取公理化的方法来建立该理论, 其中的关键一步是将每个不含函数符号的闭原子公式的真度都设定为 $\frac{1}{2}$. 为什么要这样设定呢? 在第 2 节中要介绍这种设定的基本动机, 我们将基于均匀概率的思想从语义的角度来分析这种设定的合理性. 计算结果表明, 这种设定与解释域的势 n 无关, 即, 只要解释域是有限的, 不论它含有多少个元素, 也不论谓词符号是几元的, 都可计算出相应的不含函数符号的闭原子公式的真度具有同一个值 $\frac{1}{2}$. 沿用均匀概率的思想和取概率平均值的方法我们得出了一组基本结论和一个基本设定. 本文以此为出发点在全体不含函数符号的一阶闭逻辑公式之集 Φ 上建立了公理化的真度理论. 其次, 本文把基于真度理论在命题逻辑中所导出的公式之间的相似度和伪距离的概念以及逻辑理论的相容度计算等都推广到了 Φ 中. 最后, 作为应用, 本文对 Horn 子句型知识库相容性的估计提出了一种计算方法.

值得注意的是, 本文在阐述基本动机时虽然立足于语义和概率计算, 但当一组公理确立之后, 真度理论的展开就完全采用严格的逻辑推理而不再借助于任何语义方法和概率计算了.

最后, 我们应当讲清楚一个基本思想, 即, 引入公式的真度的目的是要对公式的真实程度作出估计, 这种估计应当具有两方面的性质: 第一, 对于有限的解释域而言, 这种估计应当和基于均匀概率的平均计算结果相一致; 第二, 公式之间的逻辑关系应当被真度理论所保持, 即, 如果 α 和 β 是两个逻辑公式, 则当 $\alpha \rightarrow \beta$ 是定理时 α 的真度应不超过 β 的真度, 当 α 与 β 可证等价时 α 和 β 的真度应相等. 但这种保持关系只能是单向的, 即, 如果 α 的真度不超过 β 的真度, 那么不一定推出 $\alpha \rightarrow \beta$ 是定理; 如果 α 和 β 的真度值相等, 也不一定推出 α 与 β 逻辑等价. 这其实是命题逻辑真度理论中的熟知事实, 比如, 任二原子公式的真度值都相等, 都等于 $\frac{1}{2}$, 但不同的原子公式之间并无任何逻辑联系.

以下在第 2 节中阐述本文的基本动机和设定, 在第 3 节中提出 Φ 上的公理化真度理论, 并且把基于真度理论在命题逻辑中所导出的公式之间的相似度和伪距离以及逻辑理论的相容度理论推广到 Φ 中, 在第 4 节中证明 Φ 中公式的真度都是可计算的. 最后, 在第 5 节中给出真度理论在一类 Horn 子句型知识库相容性估计上的应用.

2 若干概率计算的结果和一个基本设定

在本节中我们要通过较细致的分析和概率计算说明本文的动机, 在此基础上提出若干基本结论和一个基本设定, 从而为公理的确立打好基础.

2.1 基本动机

在经典的一阶逻辑中, 如果解释已经确定, 那么一个闭逻辑公式要么为真要么为假, 二者必居其一且仅居其一. 但在其它的逻辑系统中, 情况未必如此. 比如, 在非单调逻辑中 (参看文献 [42]), 一个典型的事例是考虑下述几乎是正确的命题 P 的性态问题:

P : 鸟会飞. 如果用 $B(x)$ 表示 x 是鸟, 用 $F(x)$ 表示 x 会飞, 则命题 P 可以用一阶逻辑中的公式表示为 $P: (\forall x)(B(x) \rightarrow F(x))$. 从经典一阶逻辑的观点看, P 是不成立的, 因为企鹅、鸵鸟等都属

于鸟类, 它们都不会飞. 但在非单调逻辑中并不去简单地否定命题 P , 而是设法去弥补它. 比如, 设 $C_1(x), C_2(x), \dots, C_r(x)$ 分别表示 x 是企鹅、 x 是鸵鸟等共 r 种不会飞的鸟, 则将 P 弥补后所得的下述命题 P' 就是正确的了: $P': (\forall x)(B(x) \wedge \neg C_1(x) \wedge \dots \wedge \neg C_r(x) \rightarrow F(x))$.

本文从另一个角度考虑此类问题, 我们对于 P 这种几乎是正确的命题不做弥补, 而是转而从概率的角度考虑它在多大的程度上是正确的, 比如, 设鸟类共有 10000 种 (实际上地球上现存的鸟类共有 156 个科, 9000 余种), 其中不会飞的有 10 种, 则自然认为命题 P 在千分之九百九十九的程度上是正确的, 或者说 P 的真实程度达到了 0.999. 其实, 只要给定了解释域是有限集的解释, 这种简单的概率方法自然也可以用来估计并非几乎是正确的命题的真度. 以一元谓词为例, 考虑一阶逻辑公式 $P = (\forall x)A(x)$, 设解释域 D 为含有 n 个元素的有限集, 一元谓词符号 A 的解释是 D 的含有 k 个元素的子集, 则按均匀概率的思想可以认为 P 的真度等于 $\frac{k}{n}$. 沿此思路我们考虑以下进一步的问题:

(i) 设解释域 D 仍为含有 n 个元素的有限集, 但不限定 A 的解释中元素的个数, 即 k 不定, 如何估计 P 的真度?

(ii) 承上, 如果 n 也是不定的, 如何估计 P 的真度?

(iii) 如果 A 不必为一元谓词, 又该如何估计 P 的真度?

2.2 若干基本的概率计算结论

本文在下面就要回答上述的 3 个问题, 给出既不依赖于 k , 也不依赖于 n 的统一的闭原子公式的真度计算方法, 这种方法只要求解释域有限, 并且原子公式中不出现函数符号就行. 基于此, 我们将建立起一阶逻辑公式的公理化真度理论. 首先, 我们需要一个引理.

引理 1 $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k = 2^{n-1}$.

证明 $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k = \frac{1}{2n} (\sum_{k=0}^n k C_n^k + \sum_{k=0}^n k C_n^{n-k}) = \frac{1}{2n} (\sum_{k=0}^n k C_n^k + \sum_{k=0}^n (n-k) C_n^k) = \frac{1}{2n} \cdot n \sum_{k=0}^n C_n^k = \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$.

回忆命题逻辑中原子公式的真度概念. 设 p 是一个原子公式, 因为 p 是形式化的抽象命题, 它为真和为假的概率应当相等, 所以就自然地定义它的真度为 $\frac{1}{2}$. 用类似的方法可以考虑形如 $\alpha = (\forall x)A(x)$ 的一元闭原子公式的真度问题. 如前所述, 由于一阶逻辑的语义理论相当复杂, 这里仅考虑解释域 $D = \{1, 2, \dots, n\}$ 为有限集的情形, 这时 A 可以解释为 D 的任一子集 E . 如果 A 已经具体化, 则 E 就是 D 的固定子集. 设 E 含有 k 个元素, 则和前面讨论过的“鸟会飞”这一命题的真度计算方法相同, 自然认为 α 的真度等于 $\frac{k}{n}$. 然而现在 A 是形式化的抽象谓词符号, E 就可取为 D 的任意子集, 因为共有 2^n 种不同的取法, 所以将各种情况下的真度作平均就得到 α 的真度. 含有 k 个元素的 D 的子集共有 C_n^k 个, 相应的各真度之和就等于 $\frac{k}{n} C_n^k$. 再让 k 取遍从 0 到 n 的值, 那么由引理 1 知各种情况下的真度之和等于 2^{n-1} . 所以把这些情况下的真度做平均即得 α 的真度为 $\tau((\forall x)A(x)) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$. 由以上分析知:

(i) 把原子公式 $(\forall x)A(x)$ 的真度定为 $\frac{1}{2}$ 是合理的, 计算结果与 D 中元素的个数 n 无关, 即, 不论把 n 换为 $n+1, n+2$ 还是 n^2 等等, 按上述计算永远得出 $(\forall x)A(x)$ 的真度值为 $\frac{1}{2}$.

(ii) 如果在上面把 E 换为 $D - E$, 并以 $n - k$ 取代引理 1 中的 k , 则通过类似的分析和计算知公式 $(\forall x)(\neg A(x))$ 的真度为 $\tau((\forall x)(\neg A(x))) = 1 - \tau((\forall x)A(x)) = \frac{1}{2}$.

(iii) 以上的分析和计算也适用于 m 元谓词符号 Q , 只需把 $(\forall x)A(x)$ 换成 $(\forall x_1) \cdots (\forall x_m)Q(x_1, \dots, x_m)$, 并把 D 换为 D^m 即可. 即, $\tau(\text{cl}Q) = \frac{1}{2}$, 这里 cl 表示完全闭包.

(iv) 以上分析和计算自然也适用于 $\neg Q$.

(v) 从计算概率出发知, $(\forall x)(A(x) \wedge \neg A(x))$ 的真度应当设为 0. 一般地, 矛盾式的真度等于 0. 所以下面的结论是合理的:

结论 1 文字的完全闭包的真度等于 $\frac{1}{2}$.

在上面的 (ii) 中把 A 换为一般的谓词符号 Q , 可得出下面的

结论 2 $\tau(\text{cl}(\neg Q)) = 1 - \tau(\text{cl}Q)$.

把 α 与 $\neg\alpha$ 看作是事件, 因为 α 与 $\neg\alpha$ 互为否命题, 二者就是对立事件. 又, 真度是反映事件成立的概率的, 所以基于概率计算应当有下面的

结论 3 $\tau(\alpha) + \tau(\neg\alpha) = 1$.

把 α 与 β 看作是事件, 则从概率计算知 $\tau(\alpha \vee \beta) = \tau(\alpha) + \tau(\beta) - \tau(\alpha \wedge \beta)$, 所以由结论 3 得 $\tau(\neg\alpha \vee \beta) = \tau(\neg\alpha) + \tau(\beta) - \tau(\neg\alpha \wedge \beta) = 1 - \tau(\alpha) + \tau(\beta) - (1 - \tau(\neg\beta \vee \alpha))$, 整理后可得下面的

结论 4 $\tau(\alpha \rightarrow \beta) + \tau(\alpha) = \tau(\beta \rightarrow \alpha) + \tau(\beta)$.

结论 5 矛盾式的真度等于 0, 定理的真度等于 1.

如果 α 与 β 逻辑等价, 即 $\alpha \rightarrow \beta$ 和 $\beta \rightarrow \alpha$ 都是定理, 则由结论 4 和结论 5 得

结论 6 逻辑等价的公式的真度相等.

现在进一步考虑形如 $\beta = (\forall x)A(x) \wedge (\forall y)(\forall z)B(y, z)$ 的公式的真度计算, 这里 A 是一元谓词符号, B 是二元谓词符号. 由变元代换定理和全称量词对于合取运算的分配性 (参看文献 [32] 中的命题 5.2.3) 知 β 逻辑等价于 $\gamma = (\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(x, y))$. 设解释域为 $D = \{a_1, \dots, a_n\}$, A 和 B 的解释分别是 D^2 的子集 G 和 H . 设 G 是 D^2 的 k 元子集, 这种 G 共有 $C_{n^2}^k$ 个. 固定一个 G , 考虑 $G \cap H$ 中元素的个数. 设 $|G \cap H| = i$, 则 γ 的真度 (即 γ 成立的概率) 应为 $\frac{i}{n^2}$. 这时 H 含有 G 中的 i 个元, 且可含有 $D^2 - G$ 中的任意多个元, 即, $H = G_i \cup C$ 且 $C \subseteq D^2 - G$, 这里 G_i 是 G 的 i 元子集, 共有 C_k^i 种, C 作为 $D^2 - G$ 的任意子集共有 2^{n^2-k} 种. 现在计算各种可能的 $G \cap H$ 的个数. 让 H 按条件 $H = G_i \cup C$ 且 $C \subseteq D^2 - G$ 变化, 共有 $2^{n^2-k} C_k^i$ 种情况. 再让 i 从 0 变到 k , 情况总数等于 $\sum_{i=0}^k 2^{n^2-k} C_k^i$, 所以相应的概率之和等于 $\sum_{i=0}^k \frac{i}{n^2} 2^{n^2-k} C_k^i = \frac{2^{n^2-k}}{n^2} \sum_{i=0}^k i C_k^i = \frac{2^{n^2-k}}{n^2} \cdot k \cdot 2^{k-1} = \frac{k}{n^2} \cdot 2^{n^2-1}$. 最后再令 k 从 0 变到 n^2 , 则概率总和等于 $\sum_{k=0}^{n^2} \frac{k}{n^2} \cdot 2^{n^2-1} \cdot C_{n^2}^k = \frac{2^{n^2-1}}{n^2} \sum_{k=0}^{n^2} k C_{n^2}^k = \frac{2^{n^2-1}}{n^2} \cdot n^2 \cdot 2^{n^2-1} = 2^{2n^2-2}$. 再除以总的可能情况数 $2^{n^2} \cdot 2^{n^2} = 2^{2n^2}$, 即得 $\tau(\gamma) = \frac{1}{2^2}$, 从而 $\tau(\beta) = \frac{1}{2^2}$.

如果 A 和 B 分别是, 比如, 3 元和 4 元的原子公式, 则经过较为复杂的计算知仍然应当把 $\text{cl}A \wedge \text{cl}B$ 的真度设定为 $\frac{1}{2^2}$. 即, 在计算闭原子公式的合取式的真度时可以不考虑其中谓词符号的元数. 再用归纳法通过适当的计算可知下面的结论是合理的:

结论 7 不出现相同谓词符号的 N 个文字的完全闭包的合取的真度等于 $\frac{1}{2^N}$.

2.3 关于变元替换的基本设定

令 $\alpha = (\forall x)A(x)$, $\beta = (\forall x)(\neg A(x))$, 则由结论 5 知 $\tau(\alpha \wedge \beta) = \tau((\forall x)A(x) \wedge (\forall x)(\neg A(x))) = \tau((\forall x)(A(x) \wedge \neg A(x))) = 0$. 所以由上面在推导结论 4 时用到的概率计算公式 $\tau(\alpha \vee \beta) = \tau(\alpha) + \tau(\beta) - \tau(\alpha \wedge \beta)$ 和结论 1 得 $\tau(\alpha \vee \beta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 = 1$. 另一方面, 由前束范式定理 (参看文献 [32] 中的命题 4.3.1) 得 $\alpha \vee \beta \approx (\forall x)(\neg A(x)) \vee (\forall x)A(x) \approx \neg(\forall x)(\neg A(x)) \rightarrow (\forall y)A(y) \approx (\exists x)A(x) \rightarrow (\forall y)A(y) \approx (\forall x)(\forall y)(A(x) \rightarrow A(y))$. 故由结论 6 知

$$\tau((\forall x)(\forall y)(A(x) \rightarrow A(y))) = 1.$$

又, 由上面的结论容易推出

$$\tau((\forall x)(A(x) \rightarrow A(x))) = \tau((\forall x)(\forall x)(A(x) \rightarrow A(x))) = 1.$$

对比以上两式可见, 在计算公式的真度时, 原子公式 $A(x)$ 和 $A(y)$ 可以等同看待.

基于以上分析, 本文提出以下基本设定:

基本设定 在计算公式的真度时, 其中原子公式中的变元可以相互替换.

值得提出的是, 原子公式中的变元替换只是本文在计算公式真度时的设定, 并不保证这种替换保持逻辑等价性, 像上面的 $(\forall x)(\forall y)(A(x) \rightarrow A(y))$ 和 $(\forall x)(\forall x)(A(x) \rightarrow A(x))$ 就不是逻辑等价的, 后者是定理, 而前者不是.

以下用 Φ 表示全体不含函数符号的一阶闭逻辑公式之集, 并用 $\mathcal{F}$ 表示全体不含函数符号和量词符号的一阶逻辑公式之集.

3 Φ 中公式的公理化真度理论

上节中的 7 条结论和一个基本设定是在解释域为有限集的情况下通过概率计算而得出的. 值得注意的是, 这些计算结果与解释域的势 n 无关, 因而具有某种普适性, 这也正是本节中要建立的公理化真度理论的背景. 不过正如我们在引言中所说, 上述所有计算结果只是为表明提出公理化真度理论的动机, 一旦当该组公理确定之后, 真度理论的展开就完全采用严格的逻辑推理而不再借助于语义理论和概率计算了, 自然也就摆脱了解释域是否有限的问题了.

3.1 Φ 中公式的真度

以下用 α, β, γ 等表示 Φ 中的一阶逻辑公式, 用 A, B, C, P, Q 等表示 $\mathcal{F}$ 中的一阶逻辑公式. 基于第 2 节中的结论和基本设定, 我们提出以下的一组公理:

定义 1 称映射 $\tau: \Phi \rightarrow [0, 1]$ 为公理化真度映射, 若以下条件成立:

(K1) 不出现相同谓词符号的 N 个文字的完全闭包的合取的真度等于 $\frac{1}{2^N}$.

(K2) 若 α 是 Φ 中的定理, 则 $\tau(\alpha) = 1$.

(K3) $\tau(\neg\alpha) = 1 - \tau(\alpha)$, $\alpha \in \Phi$.

(K4) $\tau(\alpha \rightarrow \beta) + \tau(\alpha) = \tau(\beta \rightarrow \alpha) + \tau(\beta)$, $\alpha, \beta \in \Phi$.

(K5) $\tau(\text{cl}(\neg Q)) = 1 - \tau(\text{cl}Q)$.

(K6) 在计算公式的真度时, 其中原子公式中的变元可以相互替换.

当 $\alpha \in \Phi$ 时, 称 $\tau(\alpha)$ 为 α 的公理化真度, 简称为 α 的 τ -真度或真度.

命题 1 真度映射 τ 具有以下性质:

(i) 若 α 是矛盾式, 则 $\tau(\alpha) = 0$.

(ii) 若 α 与 β 逻辑等价, 则 $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$.

(iii) 若 $\tau(\alpha \rightarrow \beta) = 1$, 则 $\tau(\alpha) \leq \tau(\beta)$.

(iv) 若 $\tau(\alpha) \geq a$, $\tau(\alpha \rightarrow \beta) \geq b$, 则 $\tau(\beta) \geq a + b - 1$.

(v) 若 $\tau(\alpha \rightarrow \beta) \geq a$, $\tau(\beta \rightarrow \gamma) \geq b$, 则 $\tau(\alpha \rightarrow \gamma) \geq a + b - 1$.

(vi) $\tau(\alpha \rightarrow \gamma) \geq \tau(\alpha \rightarrow \beta) + \tau(\beta \rightarrow \gamma) - 1$.

(vii) $\tau(\alpha \vee \beta) + \tau(\alpha \wedge \beta) = \tau(\alpha) + \tau(\beta)$.

证明 (i) 由公理 (K2) 和 (K3) 即得命题 1 的 (i).

(ii) 设 α 与 β 逻辑等价, 则 $\alpha \rightarrow \beta$ 和 $\beta \rightarrow \alpha$ 都是定理. 由 (K2) 和 (K4) 得 $1 + \tau(\alpha) = 1 + \tau(\beta)$, 所以 $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$.

(iii) 若 $\tau(\alpha \rightarrow \beta) = 1$, 则由 (K4) 得 $1 + \tau(\alpha) = \tau(\beta \rightarrow \alpha) + \tau(\beta)$, 那么由 $\tau(\beta \rightarrow \alpha) \leq 1$ 即得 $\tau(\alpha) \leq \tau(\beta)$.

(iv) 由 (K4) 得 $\tau(\beta) = \tau(\alpha \rightarrow \beta) + \tau(\alpha) - \tau(\beta \rightarrow \alpha) \geq b + a - \tau(\beta \rightarrow \alpha) \geq a + b - 1$.

(v) 因为 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ 是定理, 由 (K2) 知其真度为 1. 设 $\tau(\alpha \rightarrow \beta) \geq a$, 则由 (iv) 得 $\tau((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \geq a$, 再由 $\tau(\beta \rightarrow \gamma) \geq b$ 即得 $\tau(\alpha \rightarrow \gamma) \geq a + b - 1$.

(vi) 令 $a = \tau(\alpha \rightarrow \beta)$, $b = \tau(\beta \rightarrow \gamma)$, 则由 (v) 即得 (vi).

(vii) 只需证明 $\tau(\alpha \vee \beta) - \tau(\alpha) = \tau(\beta) - \tau(\alpha \wedge \beta)$. 事实上, 由 (K3) 和 (K4) 得 $\tau(\alpha \vee \beta) - \tau(\alpha) = \tau(\neg\alpha \rightarrow \beta) - (1 - \tau(\neg\alpha)) = \tau(\neg\alpha \rightarrow \beta) + \tau(\neg\alpha) - 1 = \tau(\beta \rightarrow \neg\alpha) + \tau(\beta) - 1$. 又, $\tau(\beta) - \tau(\alpha \wedge \beta) = \tau(\beta) - \tau(\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)) = \tau(\beta) - (1 - \tau(\alpha \rightarrow \neg\beta)) = \tau(\alpha \rightarrow \neg\beta) + \tau(\beta) - 1$. 因为 $\alpha \rightarrow \neg\beta$ 与 $\beta \rightarrow \neg\alpha$ 逻辑等价, 所以由 (ii) 即得 $\tau(\alpha \vee \beta) - \tau(\alpha) = \tau(\beta) - \tau(\alpha \wedge \beta)$.

注 1 由于在逻辑等价的意义上全称量词对于合取运算是分配的, 所以由命题 1 的 (ii) 知公理 (K1) 也可表述为

(K1*) 不出现相同原子公式的 N 个文字的合取的完全闭包的真度等于 $\frac{1}{2^N}$.

注 2 设 $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$, 则 α 与 β 不必逻辑等价. 比如, 设 A 与 B 是两个不同的一元谓词符号, 则公式 $(\forall x)A(x)$ 和 $(\forall y)B(y)$ 的 τ -真度都等于 $\frac{1}{2}$, 但 $(\forall x)A(x)$ 和 $(\forall y)B(y)$ 并不是逻辑等价的. 在命题逻辑中, 定理的真度等于 1, 且真度等于 1 的公式必为定理. 但现在这一结论的后一半不再成立, 即, 设 $\tau(\alpha) = 1$, 则 α 不必是定理.

例 1 令 $\gamma = (\forall x)A(x) \vee (\forall x)(\neg A(x))$, 则 γ 不是逻辑有效公式, 从而不是定理, 但 $\tau(\gamma) = 1$. 事实上, 注意 $(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)(\neg A(x))$ 是矛盾式, 从而其真度为 0, 那么由命题 1 的性质 (vii) 得 $\tau(\gamma) = \tau((\forall x)A(x) \vee (\forall x)(\neg A(x))) = \tau((\forall x)A(x)) + \tau((\forall x)(\neg A(x))) - \tau((\forall x)A(x) \wedge (\forall x)(\neg A(x))) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 = 1$.

值得注意的是, 上述情况无法改进, 即, 要求做到“一个公式是定理当且仅当其真度等于 1”是不可能的, 如果公式的真度可计算的话. 原因很清楚: 因为一阶逻辑是不可判定的, 即, 一个公式是否为定理是不可能有限步之内判定的.

例 2 设 A 和 B 是不同的一元谓词符号, 计算 $\tau((\forall x)A(x) \rightarrow (\forall y)B(y))$.

解 令 $\alpha = (\forall x)A(x) \rightarrow (\forall y)B(y)$, 化 α 为前束范式知 α 与 $(\forall x)(\forall y)(\neg A(x) \vee B(y))$ 逻辑等价, 后者又与 $\beta = (\forall x)(\forall y)(\neg(A(x) \wedge \neg B(y)))$ 逻辑等价. 由公理 (K5) 和 (K1*) 得 $\tau(\alpha) = \tau(\beta) = 1 - \tau(\text{cl}(A(x) \wedge \neg B(y))) = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$.

3.2 Φ 中公式之间的相似度与伪距离

定义 2 设 $\alpha, \beta \in \Phi$, 令

$$\xi(\alpha, \beta) = \tau((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)), \quad (1)$$

称 $\xi(\alpha, \beta)$ 为 α 与 β 之间的相似度.

命题 2 设 $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$, 则

(i) $\xi(\alpha, \beta) = \xi(\beta, \alpha)$.

(ii) 若 α 与 β 逻辑等价, 则 $\xi(\alpha, \beta) = 1$.

(iii) $\xi(\alpha, \beta) = \tau(\alpha \rightarrow \beta) + \tau(\beta \rightarrow \alpha) - 1$.

$$(iv) \xi(\alpha, \beta) = 1 + \tau(\alpha \wedge \beta) - \tau(\alpha \vee \beta).$$

$$(v) \xi(\alpha, \beta) + \xi(\alpha, \neg\beta) = 1.$$

$$(vi) \xi(\alpha, \beta) + \xi(\beta, \gamma) \leq \xi(\alpha, \gamma) + 1.$$

证明 由 (1) 式和公理 (K2) 知命题 2 的 (i) 和 (ii) 成立, 以下证明命题 2 的 (iii)~(vi).

命题 2(iii) 注意 $(\alpha \rightarrow \beta) \vee (\beta \rightarrow \alpha)$ 是定理, 由 (K2) 得 $\tau((\alpha \rightarrow \beta) \vee (\beta \rightarrow \alpha)) = 1$, 所以由命题 1 的性质 7 得 $\xi(\alpha, \beta) = \tau((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)) = \tau(\alpha \rightarrow \beta) + \tau(\beta \rightarrow \alpha) - \tau((\alpha \rightarrow \beta) \vee (\beta \rightarrow \alpha)) = \tau(\alpha \rightarrow \beta) + \tau(\beta \rightarrow \alpha) - 1$.

命题 2(iv) $\xi(\alpha, \beta) = \tau((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)) = \tau((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)) = \tau((\neg\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\alpha \wedge \beta)) = \tau(\neg\alpha \wedge \neg\beta) + \tau(\alpha \wedge \beta) - \tau((\neg\alpha \wedge \neg\beta) \wedge (\alpha \wedge \beta)) = \tau(\neg\alpha \wedge \neg\beta) + \tau(\alpha \wedge \beta) - 0 = \tau(\neg(\alpha \vee \beta)) + \tau(\alpha \wedge \beta) = 1 + \tau(\alpha \wedge \beta) - \tau(\alpha \vee \beta)$.

命题 2(v) 容易验证, $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ 和 $(\alpha \rightarrow \neg\beta) \wedge (\neg\beta \rightarrow \alpha)$ 互为否命题, 所以由定义 2 和公理 (K3) 知 (v) 成立.

命题 2(vi) 因为 $\xi(\alpha, \beta) = \tau(\alpha \rightarrow \beta) + \tau(\beta \rightarrow \alpha) - 1$. 同理, $\xi(\beta, \gamma) = \tau(\beta \rightarrow \gamma) + \tau(\gamma \rightarrow \beta) - 1$, 且 $\xi(\alpha, \gamma) = \tau(\alpha \rightarrow \gamma) + \tau(\gamma \rightarrow \alpha) - 1$. 由以上 3 式和命题 1 的性质 6 即得 $\xi(\alpha, \beta) + \xi(\beta, \gamma) = (\tau(\alpha \rightarrow \beta) + \tau(\beta \rightarrow \alpha) - 1) + (\tau(\beta \rightarrow \gamma) + \tau(\gamma \rightarrow \beta) - 1) \leq \tau(\alpha \rightarrow \gamma) + \tau(\gamma \rightarrow \alpha) = \xi(\alpha, \gamma) + 1$.

推论 1 设 α 是定理, β 是矛盾式, 则 $\xi(\alpha, \beta) = 0$.

证明 这时 $\neg\beta$ 是定理, 与 α 逻辑等价, 由命题 2 的 (ii) 知 $\xi(\alpha, \neg\beta) = 1$, 所以由命题 2 的 (v) 即得 $\xi(\alpha, \beta) = 0$.

注 3 由命题 2(ii) 知, 若 α 与 β 逻辑等价, 则 $\xi(\alpha, \beta) = 1$. 但反之不成立, 即, 存在相似度等于 1 而彼此并不等价的逻辑公式 (反例见命题 3(i) 的证明), 而且通过和注 2 类似的分析可知这一情况也是无法改进的.

定义 3 设 $\alpha, \beta \in \Phi$, 令

$$\rho(\alpha, \beta) = 1 - \xi(\alpha, \beta), \quad (2)$$

称 $\rho(\alpha, \beta)$ 为 α 与 β 之间的伪距离.

命题 3 设 $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$, 则

(i) ρ 是 Φ 上的伪距离, 但不是距离.

$$(ii) \rho(\alpha, \beta) + \rho(\alpha, \neg\beta) = 1.$$

$$(iii) \rho(\alpha, \beta) = \tau(\alpha \vee \beta) - \tau(\alpha \wedge \beta).$$

证明 (i) 由 (2) 式和命题 2 的 (i) 与 (ii) 分别推出 $\rho(\alpha, \beta) = \rho(\beta, \alpha)$ 和 $\rho(\alpha, \alpha) = 0$. 再由 (2) 式和命题 2 的 (vi) 可推出 $\rho(\alpha, \beta) + \rho(\beta, \gamma) \geq \rho(\alpha, \gamma)$. 所以 ρ 是 Φ 上的伪距离. 又, 令 $\beta = (\forall x)A(x) \vee \neg(\forall x)A(x)$, $\gamma = (\forall x)A(x) \vee (\forall x)(\neg A(x))$, 则 β 是定理, 且由注 2 知 γ 满足条件 $\tau(\gamma) = 1$ 但 γ 不是定理. 这时通过简单的逻辑演算知 $\beta \rightarrow \gamma \approx \gamma$ 且 $\gamma \rightarrow \beta$ 是定理, 所以 $\rho(\beta, \gamma) = 1 - \xi(\beta, \gamma) = 1 - \tau((\beta \rightarrow \gamma) \wedge (\gamma \rightarrow \beta)) = 1 - \tau(\gamma) = 0$. 但 $\beta \neq \gamma$, 所以 ρ 不是 Φ 上的距离.

(ii) 由 (2) 式和命题 2 的 (v) 即得命题 3(ii).

(iii) 由命题 2 的 (iv) 和 (2) 式即得命题 3(iii).

例 3 由推论 1 知, 若 α 是定理, β 是矛盾式, 则 $\rho(\alpha, \beta) = 1$.

注 4 在命题逻辑中, 当 $\rho(A, B) = 0$ 时虽然 A 与 B 不必相等, 但它们是逻辑等价的. 然而由上面命题 3 的证明 (i) 中的反例知, 当 $\rho(\beta, \gamma) = 0$ 时 β 与 γ 也不必是逻辑等价的, 因为 β 是定理而 γ 不是定理.

3.3 Φ 中逻辑理论的发散度与相容度

定义 4 设 $\Gamma \subseteq \Phi$, 则称 Γ 为逻辑理论, 简称为理论. 如果从 Γ 可推出矛盾式, 则称理论 Γ 不相容; 否则称理论 Γ 相容. 以下用 $D(\Gamma)$ 表示全体 Γ - 结论之集, 称其为 Γ 的逻辑闭包, 即,

$$D(\Gamma) = \{\alpha \in \Phi \mid \Gamma \vdash \alpha\},$$

其中 $\Gamma \vdash \alpha$ 表示 α 是 Γ - 结论.

如果 Γ 不相容, 则 $D(\Gamma)$ 包含了矛盾式, 从而也就包含了所有的一阶逻辑公式. 从这一意义上说, 对各个不相容的逻辑理论可以不加区别. 然而相容的逻辑理论却是千差万别的: 设 Γ 与 Σ 是两个相容的逻辑理论, 则 $D(\Gamma)$ 与 $D(\Sigma)$ 可以相差很大. 如果 Γ 全由定理组成, 则 $D(\Gamma)$ 也全由定理组成, 即, Γ 是“最小的”相容理论, 因为每个理论的逻辑闭包都包含了所有的定理. 为了区别逻辑理论的相容程度, 本节中我们先引入理论的发散度概念, 然后在此基础上定义逻辑理论的相容度.

定义 5 设 $\Gamma \subseteq \Phi$, 令

$$\text{div}(\Gamma) = \sup\{\rho(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in D(\Gamma)\}. \quad (3)$$

称 $\text{div}(\Gamma)$ 为逻辑理论 Γ 的发散度. 若 $\text{div}(\Gamma)=1$, 则称 Γ 是全发散的.

推论 2 不相容理论是全发散的.

证明 设 Γ 不相容, 则 $D(\Gamma)$ 包含了矛盾式. 又, $D(\Gamma)$ 中包含着定理, 所以由例 3 和 (3) 式知 $\text{div}(\Gamma)=1$.

注 5 设 Γ 不相容, 则 Γ 的结论之集 $D(\Gamma)$ 无所不包, 其直径达到了最大值 1. 但直径等于 1 和无所不包并不等价, 事实上, 存在相容的理论, 其逻辑闭包的直径也能达到 1, 但它并不是无所不包的.

例 4 设 $A_1, A_2, \dots$ 是可数多个互不相同的一元谓词符号, 令 $\Gamma = \{(\forall x_1)A_1(x_1), (\forall x_2)A_2(x_2), \dots\}$, 则 $\text{div}(\Gamma) = 1$. 事实上, 对任一自然数 n , $\alpha = (\forall x_1)A_1(x_1) \wedge \dots \wedge (\forall x_n)A_n(x_n) \in D(\Gamma)$. 又, 设 β 是定理, 则 $\beta \in D(\Gamma)$. 由公理 (K1) 知 $\tau(\alpha) = \frac{1}{2^n}$. 这时 $\alpha \rightarrow \beta$ 是定理, $\beta \rightarrow \alpha \approx \alpha$, 所以 $\rho(\alpha, \beta) = 1 - \xi(\alpha, \beta) = 1 - \tau((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)) = 1 - \tau(\alpha) = 1 - \frac{1}{2^n}$. 因为 n 可以取得任意大, 所以由 (3) 式得 $\text{div}(\Gamma)=1$. 任取二元谓词符号 Q , 则 $(\forall x)(\forall y)Q(x, y)$ 不是 Γ - 结论, 可见 $D(\Gamma)$ 不是无所不包的, 所以 Γ 是相容的.

定义 6 设 $\alpha \in \Phi$. 如果 $\tau(\alpha) = 1$, 则称 α 为广义定理; 如果 $\tau(\alpha) = 0$, 则称 α 为广义矛盾式. 称逻辑闭包不含广义矛盾式的逻辑理论是纯相容理论.

例 5 (i) 定理是广义定理; 矛盾式是广义矛盾式.

(ii) 设 $\alpha = (\forall x)(\forall y)(A(x) \rightarrow A(y))$, 则由公理 (K6) 知 $\tau(\alpha) = \tau((\forall x)(A(x) \rightarrow A(x))) = 1$, 所以 α 是广义定理, 但 α 不是定理.

(iii) 设 $\beta = (\forall x)(\forall y)(\neg(A(x) \rightarrow A(y)))$, 则 β 是广义矛盾式, 但 β 不是矛盾式.

命题 4 设 Γ 是逻辑理论, 如果 $D(\Gamma)$ 中含有广义矛盾式, 则 Γ 是全发散的.

证明 设 α 是 $D(\Gamma)$ 中的定理, β 是 $D(\Gamma)$ 中的广义矛盾式. 这时 $\beta \rightarrow \alpha$ 是定理, $\alpha \rightarrow \beta \approx \beta$. 所以由命题 2 的 (iii) 得 $\xi(\alpha, \beta) = \tau(\alpha \rightarrow \beta) + \tau(\beta \rightarrow \alpha) - 1 = \tau(\beta) + 1 - 1 = 0$. 再由 (2) 式得 $\rho(\alpha, \beta) = 1$, 所以由定义 5 知 $\text{div}(\Gamma)=1$, 从而 Γ 是全发散的.

注 6 由例 4 知命题 4 的逆不成立, 即, 全发散的逻辑理论的逻辑闭包不必包含广义矛盾式.

定义 7 令

$$i(\Gamma) = \max\{\rho(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in D(\Gamma)\}, \quad (4)$$

$$\eta(\Gamma) = 1 - \frac{1}{2} \text{div}(\Gamma)(1 + i(\Gamma)), \quad (5)$$

这里 $[\rho(\alpha, \beta)]$ 表示 $\rho(\alpha, \beta)$ 的整数部分. 称 $i(\Gamma)$ 为 Γ 的极指标, 称 $\eta(\Gamma)$ 为 Γ 的相容度.

由 (5) 式可见, 当 $\text{div}(\Gamma)$ 和 $i(\Gamma)$ 都取最大值 1 时, $\eta(\Gamma)$ 取最小值 0; 当 $\text{div}(\Gamma)$ 和 $i(\Gamma)$ 都取最小值 0 时, $\eta(\Gamma)$ 取最大值 1. 易证 $0 \leq \eta(\Gamma) \leq 1$.

命题 5 设 Γ 是 Φ 中的逻辑理论, 则

- (i) $i(\Gamma) = 0$ 当且仅当 Γ 是纯相容的.
- (ii) $i(\Gamma) = 1$ 当且仅当 Γ 不是纯相容的.
- (iii) $\eta(\Gamma) = 1$ 当且仅当 Γ 中的公式都是广义定理.
- (iv) 若 $\frac{1}{2} < \eta(\Gamma) < 1$, 则 Γ 是纯相容的.
- (v) 若 $\eta(\Gamma) = \frac{1}{2}$, 则 Γ 是纯相容的全发散理论.
- (vi) 若 $\eta(\Gamma) = 0$, 则 Γ 的逻辑闭包包含广义矛盾式.

证明 (i) 设 $i(\Gamma) = 0$, 则对任意的 $\alpha, \beta \in D(\Gamma)$ 均有 $[\rho(\alpha, \beta)] = 0$, 即, $\rho(\alpha, \beta) < 1$. 特别取 α 为定理, 则对每个 $\beta \in D(\Gamma)$, β 不能是广义矛盾式, 所以 Γ 是纯相容的. 反之, 设 Γ 不是纯相容的, 则由定义 6 知 $D(\Gamma)$ 中含有某广义矛盾式 β , 取 α 为 $D(\Gamma)$ 中的定理, 则 $[\rho(\alpha, \beta)] = 1$, 从而 $i(\Gamma) = 1$.

(ii) 与上面类似可证, $i(\Gamma) = 1$ 当且仅当 $D(\Gamma)$ 中含有广义矛盾式.

(iii) 由 (5) 式知 $\eta(\Gamma) = 1$ 等价于 $\text{div}(\Gamma) = 0$, 即, 对任意的 $\alpha, \beta \in D(\Gamma)$ 均有 $\rho(\alpha, \beta) = 0$, 也就是 $\xi(\alpha, \beta) = \tau((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)) = 1$. 由于 α 和 β 可分别取为定理, 由命题 1 易证这最后条件等价于 $\tau(\alpha) = \tau(\beta) = 1$, 即, α 和 β 均为广义定理.

(iv) 设 Γ 不是纯相容的, 则由 (ii) 知 $i(\Gamma) = 1$, 且 $D(\Gamma)$ 中含有广义矛盾式从而 $\text{div}(\Gamma) = 1$. 那么由 (5) 式知 $\eta(\Gamma) = 0$, 与 $\frac{1}{2} < \eta(\Gamma) < 1$ 相矛盾!

(v) 注意当 $i(\Gamma) = 1$ 时 $\text{div}(\Gamma) = 1$, 从而有 $\text{div}(\Gamma)(1 + i(\Gamma)) = 2$ 和 $\eta(\Gamma) = 0$. 所以由 (5) 式知, 若 $\eta(\Gamma) = \frac{1}{2}$, 则有 $i(\Gamma) = 0$ 和 $\text{div}(\Gamma) = 1$, 那么由证明 (i) 和定义 5 知 Γ 是纯相容的全发散理论.

(vi) 若 $\eta(\Gamma) = 0$, 则由 (5) 式知 $i(\Gamma) = 1$, 所以由命题 5(ii) 知 Γ 的逻辑闭包包含广义矛盾式.

命题 6 设 $\Gamma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, 若 Γ 中不含广义矛盾式, 则

$$\eta(\Gamma) = \frac{1}{2}(1 + \tau(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n)). \quad (6)$$

证明 设 $\alpha, \beta \in D(\Gamma)$, 由命题 3 的 (iii) 知 $\rho(\alpha, \beta) = \tau(\alpha \vee \beta) - \tau(\alpha \wedge \beta)$. 由此可见, 当 $\tau(\alpha \vee \beta)$ 取最大值且 $\tau(\alpha \wedge \beta)$ 取最小值时, $\rho(\alpha, \beta)$ 的值最大. 这时由 $\beta \in D(\Gamma)$ 知 $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ 是定理, 从而由命题 1 的 (iii) 和公理 (K2) 知 $\tau(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \leq \tau(\beta)$, 即, $\tau(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n)$ 的值最小. 取 α 为定理, β 为 $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$, 则易证 $\text{div}(\Gamma) = \rho(\alpha, \beta) = 1 - \tau(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n)$. 又, Γ 中不含广义矛盾式, 这时 $D(\Gamma)$ 中也不含广义矛盾式, 从而由命题 5 的 (i) 知 $i(\Gamma) = 0$. 所以由 (5) 式即得 (6) 式.

4 Φ 中公式真度的可计算性

以 Σ 记 $\mathcal{F}$ 中全体文字之集, 则 Σ 是可数集, 以下设 $\Sigma = \{Q_1, Q_2, \dots\}$. 设 A 是 $\mathcal{F}$ 中不含量词的一阶逻辑公式, 如果 A 既非矛盾式又非逻辑有效公式, 则 A 逻辑等价于一个用 Σ 中文字表达的析取范式, 也逻辑等价于一个用 Σ 中文字表达的合取范式 (参看文献 [32] 的 4.5 节 “不含量词的公式”).

命题 7 设 A 是 $\mathcal{F}$ 中 n 个不含相同原子公式的文字 $B_1, \dots, B_n$ 的析取式, 即, $A = B_1 \vee \dots \vee B_n$, 则 A 的完全闭包的真度是可计算的, 且 $\tau(\text{cl}A) = 1 - \frac{1}{2^n}$.

证明 因为 $\neg B_1, \dots, \neg B_n$ 是 n 个不出现相同原子公式的文字, 所以由公理 (K1*) 得 $\tau(\text{cl}(\neg A)) = \tau(\text{cl}(\neg B_1 \wedge \dots \wedge \neg B_n)) = \frac{1}{2^n}$. 再由公理 (K5) 即得 $\tau(\text{cl}A) = 1 - \frac{1}{2^n}$.

为完成进一步的计算, 我们需要一个引理.

引理 2 设 A 和 B 是 $\mathcal{F}$ 中不含量词的公式, 则 $\text{cl}A \rightarrow \text{cl}(A \vee B)$ 是定理.

证明 以 A, B 都是一元原子公式为例进行证明. 考虑公式 $\alpha = (\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)(\forall y)(A(x) \vee B(y))$. 由约束变元的替换法则知 α 等价于 $\beta = (\forall x)A(x) \rightarrow (\forall u)(\forall v)(A(u) \vee B(v))$. 因为 $(\forall x)A(x)$ 中没有自由出现的变元, 所以 β 可等价地化为前束范式, 即, $\beta \approx (\forall u)(\forall v)(\forall x)(A(x) \rightarrow (A(u) \vee B(v))) \approx (\forall x)(\forall y)(\forall x)(A(x) \rightarrow (A(x) \vee B(y)))$. 因为 $A(x) \rightarrow (A(x) \vee B(y))$ 是定理, 所以 β 是定理, 从而 α 是定理.

基于合取范式的结构特点, 可以证明下面的

命题 8 设 R 是 $\mathcal{F}$ 中不含量词的一阶逻辑公式, 且 R 逻辑等价于一个合取范式如下:

$$R \approx (Q_{11} \vee \dots \vee Q_{1k}) \wedge \dots \wedge (Q_{m1} \vee \dots \vee Q_{mk}), \quad Q_{ij} \in \Sigma \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, k). \quad (7)$$

则 $\text{cl}R$ 的真度是可计算的, 且

$$\tau(\text{cl}R) = 1 - \frac{m}{2^k}. \quad (8)$$

例 6 设 A 和 B 是不同的一元谓词符号, 令 $\alpha = (\forall x)A(x)$, $\beta = (\forall y)B(y)$, 求 $\rho(\alpha, \beta)$.

解 $\rho(\alpha, \beta) = 1 - \tau((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)) = 1 - \tau(((\forall x)A(x) \rightarrow (\forall y)B(y)) \wedge ((\forall y)B(y) \rightarrow (\forall x)A(x)))$. 由于 $(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall y)B(y)$ 可等价地化为前束范式 $(\forall x)(\forall y)(A(x) \rightarrow B(y))$, 且 $(\forall y)B(y) \rightarrow (\forall x)A(x)$ 可等价地化为前束范式 $(\forall x)(\forall y)(B(y) \rightarrow A(x))$, 所以由 (8) 式得 $\rho(\alpha, \beta) = 1 - \tau(\text{cl}((A(x) \rightarrow B(y)) \wedge (B(y) \rightarrow A(x)))) = 1 - \tau(\text{cl}((\neg A(x) \vee B(y)) \wedge (\neg B(y) \vee A(x)))) = 1 - (1 - \frac{2}{2^2}) = \frac{1}{2}$.

定理 1 Φ 中公式的真度是可计算的.

为了证明定理 1, 我们需要一个引理如下:

引理 3 设 $(\Delta_1 x_1) \dots (\Delta_n x_n)R$ 是一个前束范式, 这里 R 是 $\mathcal{F}$ 中不含量词的逻辑公式, 则

$$(\forall x_1) \dots (\forall x_n)R \leq (\Delta_1 x_1) \dots (\Delta_n x_n)R \leq (\exists x_1) \dots (\exists x_n)R. \quad (9)$$

这里 Δ_i 是全称量词 $\forall$ 或存在量词 $\exists$ ($1 \leq i \leq n$), $\alpha \leq \beta$ 表示 $\alpha \rightarrow \beta$ 是定理 ($\alpha, \beta \in \Phi$).

证明 设 α 是一阶逻辑公式, 则容易验证 $(\forall x)\alpha \rightarrow (\exists x)\alpha$ 是逻辑有效公式, 从而是定理. 所以

$$(\forall x)\alpha \leq (\exists x)\alpha. \quad (10)$$

由此可知 (9) 式当 $n = 1$ 时成立. 又, 容易验证

$$\text{若 } \lambda \leq \mu, \text{ 则 } (\forall y)\lambda \leq (\forall y)\mu, (\exists y)\lambda \leq (\exists y)\mu, \quad (11)$$

这里 λ, μ 是一阶逻辑公式. 现在设 (9) 式当 $n = k$ 时成立, 那么由 (10), (11) 两式以及 $(\Delta_1 x_1) \dots (\Delta_{k+1} x_{k+1})R = (\Delta_1 x_1)((\Delta_2 x_2) \dots (\Delta_{k+1} x_{k+1}))R$ 知 (9) 式当 $n = k + 1$ 时也成立. 所以引理 3 成立.

定理 1 的证明 设 α 是 Φ 中的任一公式, 则 α 逻辑等价于一个前束范式 β . 设 R 是 β 中不含量词的部分且 R 中的自由变元共有 n 个, 则 $\beta = (\Delta_1 x_1) \dots (\Delta_n x_n)R$. 不妨设 R 不是定理, 则 R 逻辑等价于一个合取范式 (7). 这时由 (8) 式知 $\tau(\text{cl}R) = 1 - \frac{m}{2^k}$. 又, 设 $\gamma = (\forall x_1) \dots (\forall x_n)R$, $\delta = (\exists x_1) \dots (\exists x_n)R$, 则由引理 3 知 $\gamma \leq \beta \leq \delta$. 所以由命题 1 的 (iii) 知 $\tau(\gamma) \leq \tau(\beta) \leq \tau(\delta)$.

已知 $\tau(\gamma) = \tau(\text{cl}R) = 1 - \frac{m}{2^k}$. 又, 由公理 (K3) 和 (K5) 得 $\tau(\delta) = \tau(\neg(\forall x_1) \cdots (\forall x_n)(\neg R)) = 1 - \tau((\forall x_1) \cdots (\forall x_n)(\neg R)) = 1 - (1 - \tau((\forall x_1) \cdots (\forall x_n)R)) = \tau((\forall x_1) \cdots (\forall x_n)R) = \tau(\gamma) = 1 - \frac{m}{2^k}$. 所以由命题 1 的 (iii) 即得 $\tau(\alpha) = \tau(\beta) = 1 - \frac{m}{2^k}$. 定理 1 证毕.

定理 2 设 H 是 Φ 中全体公式的真度之集, 则

$$H = \left\{ \frac{j}{2^k} \mid j = 0, 1, \dots, 2^k; k = 1, 2, \dots \right\}. \quad (12)$$

证明 设 $\tau: \Phi \rightarrow [0, 1]$ 是公理化真度映射, 令 $J = \tau(\Phi)$. 设 $\alpha \in \Phi$. 如果 α 是定理, 则 $\tau(\alpha) = 1 \in H$. 如果 α 不是定理, 则由定理 1 的证明知 $\tau(\alpha) = 1 - \frac{m}{2^k} \in H$ 仍成立, 所以 $J \subseteq H$. 以下只需证明相反的包含关系成立. 事实上, 任取 $\frac{j}{2^k} \in H$. 如果 $j = 2^k$ 或 $j = 0$, 则分别在 Φ 中取定理或矛盾式, 则其真度就等于 $\frac{j}{2^k}$. 设 $0 < j < 2^k$. 取 k 个不含相同的谓词符号的原子公式 $A_1, \dots, A_k$. 设 $t = (s_1, \dots, s_k)$ 是 k 维 0-1 向量, 约定 $0A = \neg A$, $1A = A$, $\varphi(t) = s_1 A_1 \vee \dots \vee s_k A_k$. 任取 $2^k - j$ 个 k 维 0-1 向量 $t_1, \dots, t_{2^k - j}$, 令 $R = \wedge \{\varphi(t_i) \mid i = 1, \dots, 2^k - j\}$, $\alpha = \text{cl}R$, 则由命题 8 的证明中的 (8) 式知 $\tau(\alpha) = 1 - \frac{2^k - j}{2^k} = \frac{j}{2^k}$. 所以 $H \subseteq J$, 从而 $J = H$. 这就证明了定理 2.

注 7 (i) 由 (12) 式可见, Φ 中全体公式的真度之集 H 与文献 [5] 中计算出的命题逻辑中全体公式的真度之集相等.

(ii) 在定理 1 的证明中用到了把不含量词符号的公式 R 化为等价的合取范式的方法. 在实际计算时使用下面的命题是方便的:

命题 9 设 $S = \wedge \{A_{i1} \vee \dots \vee A_{ik_i} \mid i = 1, \dots, n\}$, 这里 A_{ij} ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, k_i$) 是不含相同谓词符号的文字, 则

$$\tau(\text{cl}S) = \frac{\delta}{2^\sigma}, \quad (13)$$

这里

$$\sigma = \sum_{i=1}^n k_i, \quad \delta = \prod_{i=1}^n (2^{k_i} - 1). \quad (14)$$

由命题 9 容易得出下面的

推论 3 设 $T = \wedge \{A_{i1} \vee \dots \vee A_{ik_i} \mid i = 1, \dots, n\}$, 则

$$\tau(\text{cl}T) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^n. \quad (15)$$

例 7 计算 $\alpha = \text{cl}(A_1 \vee \dots \vee A_n) \wedge \text{cl}(B_1 \vee \dots \vee B_m)$ 的真度, 其中 A_i 和 B_j 是不含相同谓词符号的文字 ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$), 并计算当 $n = 3, m = 2$ 时 α 的真度.

解 把 α 化为等价的逻辑公式 $\beta = \text{cl}((A_1 \vee \dots \vee A_n) \wedge (B_1 \vee \dots \vee B_m))$, 则由命题 9 知 $\tau(\alpha) = \tau(\beta) = \frac{(2^n - 1)(2^m - 1)}{2^{n+m}} = 1 - \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+m}}$. 又, 当 $n = 3, m = 2$ 时 $\tau(\alpha) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{21}{32}$.

5 Horn 子句型知识库相容性的估计

本节中对一类 Horn 子句型知识库的相容性作出估计.

定义 8^[43, P.8] 一个确定程序子句 (definite program clause) 是如下形式的逻辑公式的完全闭包:

$$A \leftarrow B_1, \dots, B_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

这里 $A, B_1, \dots, B_n$ 都是原子公式, A 称为是这个子句的头 (head), $B_1, \dots, B_n$ 称为是这个子句的体 (body).

(16) 式的逻辑意义是

$$A \vee \neg B_1 \vee \cdots \vee \neg B_n. \quad (17)$$

从而一个确定程序子句 γ 是一个形如 $\text{cl}(A \vee \neg B_1 \vee \cdots \vee \neg B_n)$ 的逻辑公式. 当 $n = 0$ 时, 称 $A \leftarrow$ 为单子句 (unit clause). 一个确定程序是由有限多个确定程序子句构成的集合. Horn 子句是确定程序子句或在确定程序子句中去掉头所得的子句. 有限多个 Horn 子句之集叫 Horn 子句型知识库.

以下将全称量词 cl 略去不写, 那么确定程序子句就可写为 (16) 式或 (17) 式, 对 Horn 子句也有同样的约定.

注 8 Horn 子句型知识库可能是不相容的, 比如, $H = \{A \leftarrow, \leftarrow A\}$ 就是一个简单的例子. 但以下只考虑相容的 Horn 子句型知识库. 又, 由 (8) 式知形如 (17) 式的公式的完全闭包的真度等于 $1 - \frac{1}{2^{n+1}} > 0$, 所以 Horn 子句型知识库 H 中不含广义矛盾式.

定义 9 称形如 $\gamma = \text{cl}(A \vee \neg B_1 \vee \cdots \vee \neg B_n)$ 的逻辑公式的长度等于 $n + 1$, 记为 $L(\gamma) = n + 1$; 称形如 $\gamma = \text{cl}(\neg B_1 \vee \cdots \vee \neg B_n)$ 的逻辑公式的长度等于 n , 记为 $L(\gamma) = n$.

定理 3 设 $H = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ 是 Horn 子句型知识库, 且其中不出现相同的谓词符号. 若

$$m \leq L(\gamma_i) \leq n, \quad i = 1, \dots, k; \quad m, n \in \mathbb{Z}^+, \quad (18)$$

则 H 的相容性满足条件

$$\frac{1}{2} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{2^m} \right)^k \right) \leq \eta(H) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)^k \right). \quad (19)$$

证明 由命题 7 知 Horn 子句的真度随其长度的增加而增加, 由此可知几个 Horn 子句的合取的真度也随各子句长度的增加而增加. 又, 设各 γ_i 的长度都等于 m , 则由推论 3 知 $\tau(\wedge H) = (1 - \frac{1}{2^m})^k$. 同理, 设各 γ_i 的长度都等于 n , 则 $\tau(\wedge H) = (1 - \frac{1}{2^n})^k$. 所以由 (6) 式和 (18) 式即得 (19) 式.

例 8 设 Horn 子句型知识库 H 由 4 个程序子句组成, 即,

$$\begin{aligned} H_1 &= A(x) \leftarrow Q(a, y), R(x, y), B(z), \\ H_2 &= S(x, y) \leftarrow C(x), D(y), W(y, z), \\ H_3 &= T(y, z) \leftarrow E(y), V(x, y), F(y), \\ H_4 &= G(z) \leftarrow M(x, y), N(x, y), P(y, b). \end{aligned}$$

则 $m = n = 4, k = 4$, 所以由 (19) 式得 $\eta(H) = \frac{1}{2}(1 + (1 - \frac{1}{2^4})^4) \approx 0.8862$.

6 结束语

本文在不含函数符号的一阶闭逻辑公式中建立了较为系统的真度理论, 证明了这种真度是可计算的, 且全体真度值之集与命题逻辑中所得之结果一致. 提出了一阶逻辑公式之间的相似度和伪距离概念, 这为进一步像命题逻辑中的情形一样展开一阶逻辑度量空间及其中的近似推理理论奠定了基础. 本文还建立了一类一阶逻辑理论的相容度理论, 作为应用, 给出了估计 Horn 子句型知识库相容度的方法. 定理 3 虽然要求不出现相同的谓词符号, 但如果出现相同的谓词符号, 比如一个子句的头出现在另一个子句的体中等情况, 由本文第 4 节的可计算性定理知, 这时也可以估算该数据库的相容度, 只

不过计算过程要复杂一些而已. 如何将本文的结果进一步推广到允许含有函数符号的情形是一个值得关注的研究课题.

致谢 作者感谢审稿人提出的有益建议.

参考文献

- 1 Hamilton A G. Logic for Mathematicians. London: Cambridge University Press, 1978
- 2 Rosser J B, Turquette A R. Many-Valued Logic. Amsterdam: North-Holland, 1952
- 3 Pavelka J. On fuzzy logic I,II,III. Zeit Math Logic Grundl Math, 1979, 25: 45–52, 119–134, 447–464
- 4 De Glas M. Knowledge representation in a fuzzy setting. Tech Rep 89/48, Universite Paris VI, Laforia, 1989
- 5 Wang G J, Fu L, Song J S. The truth degree theory in two-valued propositional logic. Sci China Ser A, 2001, 31: 998–1008 [王国俊, 傅丽, 宋建社. 二值命题逻辑中命题的真度理论. 中国科学 (A 辑), 2001, 31: 998–1008]
- 6 Wang G J, Wang W. The logic metric spaces. Acta Math Sin, 2001, 44: 159–168 [王国俊, 王伟. 逻辑度量空间. 数学学报, 2001, 44: 159–168]
- 7 Wang G J, Leung Y. Integrated semantics and logic metric spaces. Fuzzy Set Syst, 2003, 136: 71–91
- 8 Wang G J, Li B J. The truth degree theory in n -valued Lukasiewicz propositional logic and the limit theorem. Sci China Ser E, 2005, 35: 561–569 [王国俊, 李璧镜. Lukasiewicz n 值命题逻辑中公式的真度理论和极限定理. 中国科学 (E 辑), 2005, 35: 561–569]
- 9 Wang G J, Zhang W X. Consistency degrees of finite theories in Lukasiewicz propositional fuzzy logic. Fuzzy Set Syst, 2005, 149: 275–284
- 10 Zhou X N, Wang G J. Consistency degrees of theories in some systems of propositional fuzzy logic. Fuzzy Setd Syst, 2005, 152: 321–331
- 11 Wang G J, She Y H. A topological characterization of consistency of logic theories in propositional logic. Math Logic Q, 2006, 52: 470–477
- 12 Zhou H J, Wang G J. A new consistency index based on deduction theorems in several logic systems. Fuzzy Set Syst, 2006, 157: 427–443
- 13 Li J, Wang G J. The truth degree theory in logic system L_n^* . Sci China Ser E, 2006, 36: 631–643 [李骏, 王国俊. 逻辑系统 L_n^* 中命题的真度理论. 中国科学 (E 辑), 2006, 36: 631–643]
- 14 Zhou H J, Wang G J. Generalized consistency degrees of theories w.r.t. formulas in several standard complete logic systems. Fuzzy Set Syst, 2006, 157: 2058–2073
- 15 Li L F, Wang G J. Distributions of the integrated truth degrees, divergent degrees and consistency degrees in Lukasiewicz logic. J Shaanxi Norm Univ, 2006, 24: 5–8 [李立峰, 王国俊. Lukasiewicz 命题集的积分真度、发散度与相容度分布. 陕西师范大学学报, 2006, 24: 5–8]
- 16 Ru Y M, Wang G J. Distributions of the truth degrees in several three-valued propositional logic. J Shaanxi Norm Univ, 2005, 33: 6–10 [茹永梅, 王国俊. 几个三值命题逻辑系统中命题真度的分布. 陕西师范大学学报, 2005, 33: 6–10]
- 17 Wang W, Wang G J. Gödel implication operator is not suitable for establishing fuzzy propositional logic. Fuzzy Syst Math, 2005, 2: 14–18 [王伟, 王国俊. 论 Gödel 蕴涵算子不宜用于建立模糊逻辑系统. 模糊系统与数学, 2005, 2: 14–18]
- 18 Li J, Wang G J. Theory of α -truth degrees in n -valued Lukasiewicz propositional logic. Comput Eng Appl, 2006, 31: 16–18 [李骏, 王国俊. n 值 Lukasiewicz 命题逻辑中命题的 α -真度理论. 计算机工程与应用, 2006, 31: 16–18]
- 19 Zhang X F, Meng G W. Theory and applications of truth degree of first-order fuzzy predicate formulas based on interpretation model. J Syst Sci Math Sci, 2008, 28: 588–593 [张兴芳, 孟广武. 一阶谓词的解释模型真度理论及其应用. 系统科学与数学, 2008, 28: 588–593]

- 20 Wu H B. The theory of Σ - Γ -fuzzy truth degree relent to finite theory in propositional logic system L_n^* . Fuzzy Syst Math, 2008, 22: 1–7 [吴洪博. 命题逻辑系统 L_n^* 公式关于有限理论的 Σ - Γ -真度理论. 模糊系统与数学, 2008, 22: 1–7]
- 21 Li J, Wang G J. Formalized solutions for problems of generalized Modus Ponens under theory of sustentation degree. Acta Electron Sin, 2008, 36: 2190–2194 [李骏, 王国俊. 基于支持度理论的广义 MP 问题的形式化解. 电子学报, 2008, 36: 2190–2194]
- 22 Hui X J, Wang G J. The randomized approach of classical inference scheme with application. Sci China Ser E, 2007, 37: 801–812 [惠小静, 王国俊. 经典推理模式的随机化研究及其应用. 中国科学 (E 辑), 2007, 37: 801–812]
- 23 Hui X J, Wang G J. Randomization of R_0 three-valued propositional logic system. Acta Math Appl Sin, 2009, 32: 19–27 [惠小静. 三值 R_0 命题逻辑系统的随机化. 应用数学学报, 2009, 32: 19–27]
- 24 Pei D W, Wang G J. A semantically complete extension sequence of the system $\mathcal{L}^*$ and their completeness. Sci Chana Ser F, 2003, 46: 81–89
- 25 Pei D W, Wang G J. The extensions $\mathcal{L}_n^*$ of the formal system $\mathcal{L}^*$. Inf Sci, 2003, 152: 155–166
- 26 Pei D W. On equivalent forms of fuzzy logic systems NM and IMTL. Fuzzy Set Syst, 2003, 138: 187–195
- 27 Ma L N, Wang G J. Formalized theory of α -triple I solutions for problems of generalized modus ponens. J Shaanxi Norm Univ, 2011, 39: 13–16 [马丽娜, 王国俊. 广义 MP 问题的 α -三 I 解的形式化理论. 陕西师范大学学报, 2011, 39: 13–16]
- 28 Wang Q P, Zhang X F. Stochastic study in Lukasiewicz's ternary logic system. J Front Comput Sci Technol, 2009, 3: 210–217 [王庆平, 张兴芳. Lukasiewicz 三值逻辑系统中的随机化研究. 计算机科学与探索, 2009, 3: 210–217]
- 29 Zhou H J, Wang G J. Consistency degrees of theories and method of graded reasoning in n-valued Ro-logic (NM-logic). Int J Approx Reason, 2006, 43: 117–132
- 30 Zhou H J, Wang G J. Characterizations of maximal consistent theories in the formal deductive system L^* (NM-logic) and Cantor space. Fuzzy Set Syst, 2007, 158: 2591–2604
- 31 Wang G J, Hui X J, Song J S. The R_0 -type fuzzy logic metric space and an algorithm for solving fuzzy modus ponens. Comput Math Appl, 2008, 55: 1974–1987
- 32 Wang G J. Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle. 2nd Ed. Beijing: Science Press, 2006 [王国俊. 数理逻辑引论与归结原理. 第二版. 北京: 科学出版社, 2006]
- 33 Wang G J. Nonclassical Mathematical Logic and Approximate Reasoning. 2nd Ed. Beijing: Science Press, 2008 [王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 第二版. 北京: 科学出版社, 2008]
- 34 Wang G J, Song J S. The graded method in propositional logic. Acta Electron Sin, 2005, 34: 252–257 [王国俊, 宋建社. 命题逻辑中的程度化方法. 电子学报, 2005, 34: 252–257]
- 35 Wang G J. Quantitative Logic (I). Chin J Eng Math, 2006, 23: 191–215 [王国俊. 计量逻辑学 (I). 工程数学学报, 2006, 23: 191–215]
- 36 Wang G J, Zhou H J. Quantitative logic. Inf Sci, 2009, 179: 226–247
- 37 Han B H, Li Y M. Approximate reasoning in quantitative logic. Fuzzy Syst Math, 2010, 24: 1–7 [韩邦合, 李永明. 计量逻辑学中的近似推理. 模糊系统与数学, 2010, 24: 1–7]
- 38 Cao B Y, Wang G J, Chen S L, et al. Quantitative Logic and Soft Computing. Berlin: Springer Verlag, 2010
- 39 Wang G J, Qing X Y, Zhou X N. An intrinsic fuzzy set on the universe of discourse of predicate formulas. Fuzzy Set Syst, 2006, 157: 3145–3158
- 40 Wang G J, Duan Q L. Theory of (n) truth degrees of formulas in modal logic and a consistency theorem. Sci China Ser F, 2009, 52: 70–83
- 41 Hájek P. Metamathematics of Fuzzy Logic. London: Kluwer Academic Publishers, 1998
- 42 Reiter R. A logic for default reasoning. Artif Intell, 1980, 13: 81–123
- 43 Lloyd J W. Foundations of Logic Programming. London: Springer-Verlag, 1987

Axiomatic theory of truth degree for a class of first-order formulas and its application

WANG GuoJun

Institute of Mathematics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China

E-mail: gjwang@snnu.edu.cn

Abstract Let Φ be the set consisting of all closed first-order formulas containing no function symbols. Based on the finite model and uniformly distributed probability theory, the present paper analyses a classic example in non-monotone logic, and proposes the truth degrees of conjunctions of universal closures of literals. Then the present paper establishes an axiomatic theory of truth degree on Φ and proves that truth degrees of formulas in Φ are computable. Moreover, this paper proves that the set H of truth degrees of formulas in Φ coincides with the set of truth degrees of propositional formulas, and especially, truth degrees of universal closures of literals are equal to $1/2$. Lastly, the present paper introduces the concepts of similarity degree and pseudo-metric between formulas of Φ , and proposes the theory of consistency degree for logic theories. As an application, the consistency degree of a kind of Horn type data base is calculated.

Keywords predicate logic, first-order logic formula, function symbol, truth degree, computability, Horn clause

WANG GuoJun was born in 1935. He graduated from Shaanxi Normal University in 1958. At present he is a Professor and Director of Institute of Mathematics of Shaanxi Normal University. Currently he serves as a co-editor-in-chief of the Chinese Journal of Engineering Mathematics as well as an editor of the journals Studies in Logic, Fuzzy Mathematics, and New Mathematics and Natural Computation, etc. His research interests include

fuzzy topology, many-valued logic, and quantitative logic.