拓扑压和维数估计

献给张芷芬教授 90 华诞

曹永罗*, 赵云

苏州大学数学科学学院, 苏州 215006

E-mail: ylcao@suda.edu.cn, zhaoyun@suda.edu.cn

收稿日期: 2016-07-05; 接受日期: 2016-09-13; 网络出版日期: 2016-11-11; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11125103 和 11371271) 资助项目

摘要 本文综述了动力系统中维数理论的一些新进展, 特别是对排斥子和双曲集的维数以及不变测度维数方面的介绍. 在共形情形下, 人们已经很好地理解了维数理论中的重要问题. 在非共形情形下, 虽然取得了许多有趣和非平凡的结果, 但仍然缺乏一个一般的令人满意的方法. 事实上, 我们只对某些特殊的非共形排斥子的维数的理解比较清楚 (如广义的 Sierpiński 毛毯和平均共形排斥子).

关键词 拓扑压 维数 不变测度

MSC (2010) 主题分类 37C45, 37D35, 37C70, 28A80, 28A78

1 引言

在过去的几十年, 动力系统中的维数理论迅速发展成为一个独立的研究领域. 粗略来讲, 维数理论主要从维数观点来研究动力系统中不变量的复杂性, 例如, 研究不变集和不变测度的复杂性. 从动力系统的角度来研究维数理论的第一本专著是 Pesin 的书 [1], 这本专著包括了直至 1997 年这个领域的进展; 对于更新的进展, 参见 Barreira 的专著 [2, 3]. 值得指出的是, 对于共形排斥子的维数理论已经得到很好的解决, 排斥子的各种维数 (如 Hausdorff 维数、下盒和上盒维数) 都相等并由 Bowen 方程的根给出, 且存在唯一一个测度具有最大维数. 对于非共形排斥子的维数, 虽然也取得很多进展, 如自仿集 (可以看作是某个扩张映射的排斥子) 的维数, 但要想获得一个类似于共形情形的结果看起来是一个艰巨的任务. 所以, 近年来人们试图获得非共形排斥子维数的精确的上、下界估计. 本综述主要考虑非共形排斥子的子集的维数, 特别是考虑拓扑压在维数估计中的作用.

如前所述, 对共形排斥子维数的研究, 从 Bowen^[4] 和 Ruelle^[5] 起就已经发展成一个完整的理论. 值得注意的是, 在他们的工作中, Ruelle^[6] 引入的热力学公式起着非常重要的作用. 事实上, 现在所用的用来计算或者估计排斥子维数的方程, 都是 Bowen^[4] 引入的一个用拓扑压来表示的方程在不同情形下的不同表达. 所以, 对维数的研究又推动了热力学公式的研究, 特别是 Falconer^[7] 在某些条件下引入了次可加势函数的拓扑压并得到了其相应的变分原理, 进而用来研究非共形排斥子的维数估计. 近年来对非可加势函数的热力学公式的研究一直不断, 特别是 Cao 等在不对次可加势函数加任何条

英文引用格式: Cao Y L, Zhao Y. Topological pressure and dimension estimation (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 3–20, doi: 10.1360/N012016-00133

件的情形下定义了一般拓扑动力系统次可加拓扑压并证明了其变分原理 (参见文献 [8]), 进而用次可加拓扑压的零点得到了非共形排斥子的维数的上界估计 (参见文献 [9]). 对于其他非可加势函数的拓扑压的定义及变分原理的证明, 可参见文献 [10–12].

从某种程度上讲, 对双曲集的维数研究是类似的. 例如, McCluskey 和 Manning^[13] 也得到了双曲共形情形下的一个相应的完整解答. 但除非有一些额外的条件, 在双曲情形不存在一个支撑在双曲集上的不变测度具有最大维数.

目前对于非共形排斥子或双曲集的维数研究还缺乏一个令人满意的一般的方法. 很多学者在研究这个问题时都要加一些额外的条件. Ban 等^[9] 引入了一个特殊的非共形排斥子—平均共形排斥子, 在不加任何其他条件的情形下得到了次可加拓扑压的零点, 即该排斥子的 Hausdorff 维数. 对于一般情形下的排斥子的维数, 我们通常只能给出其维数的上、下界估计. Rugh^[14] 直接从拓扑压和维数的定义出发, 建立了拓扑压零点与维数之间的关系. Chen 和 Xiong^[15] 也建立了符号空间中子位移的测度熵与维数的关系, 同时考虑了拓扑压的零点在估计集合维数时的应用 (也可参见文献 [16]).

另一方面, 不变测度的维数也是维数理论中的一个研究热点. 本文主要讨论测度的点维数. 当流形是二维曲面时, 对曲面上的一个 $C^{1+\alpha}$ 微分同胚 f 的双曲遍历测度, Young^[17] 证明了该测度的点维数可以由系统的测度熵和 Lyapunov 指数给出. 对高维流形上的 $C^{1+\alpha}$ 微分同胚 f 的双曲遍历测度 μ , Ledrappier 和 Young^[18] 证明了该测度稳定方向和不稳定方向的点维数的存在性, 且稳定方向的点维数与不稳定方向的点维数之和是测度 μ 的点维数的一个上界; 进一步, Barreira 等^[19] 证明了双曲遍历测度的点维数等于其稳定方向的点维数与不稳定方向的点维数之和. Hu^[20] 给出了支撑在 C^2 映射的排斥子上的遍历测度的点维数的上、下界. 需要指出的是, 上述结果都可以用 Pesin 理论进行测度维数的分析. 当映射是 C^1 时, Pesin 理论失效, 但人们仍取得了很大的进展. 文献 [21] 对于光滑流形上 C^1 映射的具有紧支撑的不变测度, 通过考虑 Bowen 球与普通球的包含关系, 得到了测度点维数的上、下界估计. 对支撑在 C^1 映射排斥子上的遍历测度, Cao 等^[22] 引入了非可加势函数的测度压的定义, 进而在文献 [23] 中直接证明了测度压的零点给出了该测度的 Hausdorff 维数和盒维数的上、下界估计, 这可以看作 Bowen 方程在测度形式下的表示.

本文结构如下: 第 2 节主要介绍一些概念和预备知识. 特别地, 我们将介绍关于非可加势函数的拓扑压和测度压的定义. 第 3 节将介绍一些关于排斥子维数和支撑在排斥子上的不变测度的维数方面的研究进展, 特别是关于非共形排斥子及其上的不变测度的维数的研究进展. 另外, 我们简单介绍了关于次可加拓扑压的连续性方面的最新进展. 第 4 节介绍一些关于双曲集和双曲测度的维数方面的研究成果.

2 预备知识和相关概念

本节考虑 $f : X \rightarrow X$ 是紧致度量空间 (X, d) 上的一个连续变换, 其中 d 是空间 X 上的度量. 令 $\mathcal{M}_f$ 和 $\mathcal{E}_f$ 分别表示空间 X 上的所有 f -不变 Borel 概率测度组成的空间和所有 f -不变的遍历的 Borel 概率测度组成的集合. 我们用 $C(X)$ 表示空间 X 上所有的连续函数组成的 Banach 空间, 赋予最大范数 $\|\cdot\|_\infty$.

2.1 Hausdorff 维数和盒维数

本小节简单回顾集合维数和测度维数的各种定义, 详细情形参见文献 [1, 2, 24].

给定 X 的一个子集合 Z , 对 $s \geq 0$ 和 $\delta > 0$, 令

$$\mathcal{H}_\delta^s(Z) := \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s : Z \subset \bigcup_i U_i, |U_i| \leq \delta \right\},$$

其中 $|\cdot|$ 表示集合的直径. 我们称 $\mathcal{H}^s(Z) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(Z)$ 为集合 Z 的 s - 维 Hausdorff 测度. 进而定义集合 Z 的 Hausdorff 维数如下:

$$\dim_H Z := \inf \{s : \mathcal{H}^s(Z) = 0\} = \sup \{s : \mathcal{H}^s(Z) = \infty\}.$$

集合 Z 的下盒维数和上盒维数分别如下定义:

$$\underline{\dim}_B Z := \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(Z, \delta)}{-\log \delta}, \quad \overline{\dim}_B Z := \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(Z, \delta)}{-\log \delta},$$

其中 $N(Z, \delta)$ 表示覆盖集合 Z 所需半径为 δ 的球的最小个数. 当这两个量相等时, 我们记这个值为 $\dim_B Z$, 称为集合 Z 的盒维数. 容易验证上述集合维数满足如下关系:

$$\dim_H Z \leq \underline{\dim}_B Z \leq \overline{\dim}_B Z.$$

设 μ 是 X 上的一个 Borel 概率测度, 定义 μ 的 Hausdorff 维数、下盒维数和上盒维数如下:

$$\begin{aligned} \dim_H \mu &:= \inf \{ \dim_H Y : Y \subseteq X, \mu(Y) = 1 \}, \\ \underline{\dim}_B \mu &:= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \{ \underline{\dim}_B Y : Y \subseteq X, \mu(Y) \geq 1 - \delta \}, \\ \overline{\dim}_B \mu &:= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \{ \overline{\dim}_B Y : Y \subseteq X, \mu(Y) \geq 1 - \delta \}. \end{aligned}$$

由定义可得

$$\dim_H \mu \leq \underline{\dim}_B \mu \leq \overline{\dim}_B \mu.$$

定义 2.1 给定空间 X 上的一个 Borel 概率测度 μ , 分别称

$$\underline{d}_\mu(x) := \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \quad \text{和} \quad \overline{d}_\mu(x) := \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r}$$

为测度 μ 在点 x 处的下、上点维数. 当这两个量相等时, 我们记这个值为 $d_\mu(x)$, 称为测度 μ 在点 x 处的点维数.

特别地, Young^[17] 证明了, 如果存在数 d 使得对 μ - 几乎处处的点 x , 有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} = d,$$

则 $\dim_H \mu = \underline{\dim}_B \mu = \overline{\dim}_B \mu = d$.

2.2 拓扑压

热力学公式与维数理论有着密切的联系. 本小节主要回顾拓扑压的概念, 它是热力学公式中非常重要的一个不变量.

给定空间 X 上的一族连续函数 $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \geq 1}$.

(1) 称 Φ 是次可加的, 如果 $\varphi_{m+n} \leq \varphi_m + \varphi_n \circ f^m, \forall m, n \geq 1$;

(2) 称 Φ 是几乎可加的, 如果存在常数 $C > 0$ 使得

$$\varphi_m + \varphi_n \circ f^m - C \leq \varphi_{m+n} \leq \varphi_m + \varphi_n \circ f^m + C, \quad \forall m, n \geq 1;$$

(3) 称 Φ 是渐近可加的, 如果对任意 $\xi > 0$, 存在一个连续函数 $\varphi_\xi \in C(X)$ 使得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|\varphi_n - S_n \varphi_\xi\|_\infty < \xi,$$

其中 $S_n \varphi_\xi := \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_\xi \circ f^j$ 表示 φ_ξ 的 Birkhoff 和;

(4) 称 Φ 是渐近次可加的, 如果对任意 $\xi > 0$, 存在一列次可加连续函数列 $\Phi_\xi = \{\varphi_n^\xi\}_{n \geq 1}$ 使得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|\varphi_n - \varphi_n^\xi\|_\infty < \xi.$$

事实上, 任意几乎可加连续函数列都是渐近可加的, 证明参见文献 [12, 25].

下面主要回顾 Pesin 的专著 [1] 中用 Carathéodory 维数特征来定义的拓扑压, 关于用分离集、生成集或者开覆盖定义的拓扑压, 读者可以参见 Walters 的书 [26]. 给定点 $x, y \in X$, $n \in \mathbb{N}$, 定义度量 $d_n(x, y) := \max\{d(f^i x, f^i y) : 0 \leq i < n\}$. 用 $B_n(x, \epsilon)$ 表示在度量 d_n 下球心在点 x 处半径为 ϵ 的球. 任取 X 的一个子集 $Z \subseteq X$, 我们强调集合 Z 无需是紧的, 也不必是 f -不变的. 给定 $\epsilon > 0$, 称 $\Gamma = \{B_{n_i}(x_i, \epsilon)\}_i$ 是集合 Z 的一个覆盖, 如果 $Z \subseteq \bigcup_i B_{n_i}(x_i, \epsilon)$. 给定空间 X 上的一个次可加连续函数列 $\Psi = \{\psi_n\}_{n \geq 1}$ 和 $s \in \mathbb{R}$, 令

$$M(Z, \Psi, s, N, \epsilon) := \inf_{\Gamma} \sum_i \exp \left(-s n_i + \sup_{y \in B_{n_i}(x_i, \epsilon)} \psi_{n_i}(y) \right), \quad (2.1)$$

其中下确界在所有满足 $n_i \geq N$ ($\forall i$) 的集合 Z 的覆盖 Γ 上取. Carathéodory 维数特征理论保证下面的定义是合理的:

$$m(Z, \Psi, s, \epsilon) := \lim_{N \rightarrow \infty} M(Z, \Psi, s, N, \epsilon), \quad (2.2)$$

$$P_Z(f, \Psi, \epsilon) := \inf\{s : m(Z, \Psi, s, \epsilon) = 0\} = \sup\{s : m(Z, \Psi, s, \epsilon) = \infty\}. \quad (2.3)$$

进而令

$$P_Z(f, \Psi) := \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} P_Z(f, \Psi, \epsilon). \quad (2.4)$$

仿照 Barreira [27] 的做法, 我们称 $P_Z(f, \Psi)$ 是 f 在集合 Z 上关于 Ψ 的拓扑压. 特别地, 当 $Z = X$ 时, Cao 等 [8] 证明了下述关于次可加拓扑压的变分原理.

定理 2.1 假设 $f : X \rightarrow X$ 是紧度量空间 X 上的一个连续变换, $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ 是空间 X 上的一列次可加连续函数列, 则有

$$P_X(f, \Phi) = \sup\{h_\mu(f) + \mathcal{F}_*(\mu, \Phi) : \mu \in \mathcal{M}_f, \mathcal{F}_*(\mu, \Phi) \neq -\infty\},$$

其中 $\mathcal{F}_*(\mu, \Phi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int \varphi_n d\mu$, $h_\mu(f)$ 表示 f 关于测度 μ 的测度熵 (具体定义参见文献 [26]).

注 2.1 (1) 如果有一个 f -不变测度 μ 达到变分原理中的上确界, 则称测度 μ 是拓扑压 $P_X(f, \Phi)$ 的一个平衡态. (2) 如果存在某个连续函数 φ 使得 $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i$, 则此时 $P_X(f, \Phi)$ 就是经典的单个连续函数的拓扑压, 我们简记为 $P_X(f, \varphi)$, 参见文献 [26]. (3) 关于单个连续函数的局部拓扑压的变

分原理 (这里的局部是指在定义拓扑压时固定一个开覆盖), 参见文献 [28]. 关于一系列次可加势函数的局部拓扑压的变分原理, 参见文献 [29, 30]. (4) 当 Φ 是几乎可加的时, 上述变分原理由 Barreira [10] 和 Mummert [11] 各自独立证明. 关于几乎可加拓扑压的详细介绍, 包括变分原理、平衡态测度和 Gibbs 测度的存在性, 以及相关的几乎可加势函数的重分形分析, 参见 Barreira 的综述性文献 [31]. 值得指出的是, 当 Φ 是次可加的时, Falconer [7] 在次可加势函数满足某种 Lipschitz 条件和有界形变的假设下, 也证明了上述变分原理; 当 Φ 是渐近可加或是渐近次可加时, Feng 和 Huang [12] 证明了上述变分原理. (5) 当 $\Phi = 0$, 即 $\varphi_n \equiv 0$ ($\forall n$) 时, $P_Z(f, 0)$ 为集合 Z 上的拓扑熵, 此时我们用 $h_Z(f)$ 来表示 $P_Z(f, 0)$.

下面给出下、上拓扑压的定义. 令

$$\Lambda(Z, \Psi, N, \epsilon) := \inf_{\Gamma} \sum_i \exp \left(\sup_{y \in B_N(x_i, \epsilon)} \psi_N(y) \right),$$

其中下确界是在所有满足 $n_i = N$ ($\forall i$) 的 Z 的覆盖 Γ 上取. 进而令

$$\underline{\text{CP}}_Z(f, \Psi, \epsilon) = \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \Lambda(Z, \Psi, N, \epsilon), \quad (2.5)$$

$$\overline{\text{CP}}_Z(f, \Psi, \epsilon) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \Lambda(Z, \Psi, N, \epsilon). \quad (2.6)$$

分别称两个极限

$$\underline{\text{CP}}_Z(f, \Psi) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underline{\text{CP}}_Z(f, \Psi, \epsilon) \quad \text{和} \quad \overline{\text{CP}}_Z(f, \Psi) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{\text{CP}}_Z(f, \Psi, \epsilon)$$

为 f 在集合 Z 上关于 Ψ 的下、上拓扑压. 特别地, 当 $\Psi = 0$ 时, 我们分别用 $\underline{\text{Ch}}_Z(f)$ 和 $\overline{\text{Ch}}_Z(f)$ 来表示 $\underline{\text{CP}}_Z(f, 0)$ 和 $\overline{\text{CP}}_Z(f, 0)$, 并分别称为集合 Z 上的下、上拓扑熵. 对任意一个子集 Z , 容易证明

$$P_Z(f, \Psi) \leq \underline{\text{CP}}_Z(f, \Psi) \leq \overline{\text{CP}}_Z(f, \Psi).$$

2.3 测度压

本小节简单回顾次可加测度压, 详细情形参见文献 [22], 关于可加势函数的测度压的情形可参见文献 [32].

给定一个不变测度 $\mu \in \mathcal{M}_f$ 和一个次可加势函数 $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \geq 1}$, 令

$$\begin{aligned} P_\mu(f, \Phi, \epsilon) &= \inf \{P_Z(f, \Phi, \epsilon) : \mu(Z) = 1\}, \\ P_\mu(f, \Phi) &= \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} P_\mu(f, \Phi, \epsilon). \end{aligned} \quad (2.7)$$

我们称 $P_\mu(f, \Phi)$ 是 f 关于测度 μ 和势函数 Φ 的次可加测度压. 类似地, 令

$$\begin{aligned} \underline{\text{CP}}_\mu(f, \Phi, \epsilon) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \{\underline{\text{CP}}_Z(f, \Phi, \epsilon) : \mu(Z) \geq 1 - \delta\}, \\ \overline{\text{CP}}_\mu(f, \Phi, \epsilon) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \{\overline{\text{CP}}_Z(f, \Phi, \epsilon) : \mu(Z) \geq 1 - \delta\}. \end{aligned}$$

从而可以类似地定义 f 关于测度 μ 和势函数 Φ 的下、上次可加测度压如下:

$$\underline{\text{CP}}_\mu(f, \Phi) := \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \underline{\text{CP}}_\mu(f, \Phi, \epsilon), \quad (2.8)$$

$$\overline{\text{CP}}_\mu(f, \Phi) := \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{\text{CP}}_\mu(f, \Phi, \epsilon). \quad (2.9)$$

下面仿照 Katok^[33] 定义测度熵的方法, 给出次可加测度压的另外一种定义. 对任意的不变测度 $\mu \in \mathcal{M}_f$, $0 < \delta < 1$, $n \geq 1$ 和 $\epsilon > 0$, 我们称集合 $F \subseteq X$ 是一个 (n, ϵ, δ) -生成集, 如果

$$\mu\left(\bigcup_{x \in F} B_n(x, \epsilon)\right) \geq 1 - \delta.$$

给定空间 X 上的一个次可加势函数 $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \geq 1}$, 一个遍历测度 $\mu \in \mathcal{E}_f$, $0 < \delta < 1$, $n \geq 1$ 和 $\epsilon > 0$, 令

$$\begin{aligned} P_\mu^*(f, \Phi, n, \epsilon, \delta) &= \inf \left\{ \sum_{x \in F} \exp \left[\sup_{y \in B_n(x, \epsilon)} \varphi_n(y) \right] \mid F \text{ 是一个 } (n, \epsilon, \delta)\text{-生成集} \right\}, \\ P_\mu^*(f, \Phi, \epsilon, \delta) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_\mu^*(f, \Phi, n, \epsilon, \delta), \\ P_\mu^*(f, \Phi, \delta) &= \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} P_\mu^*(f, \Phi, \epsilon, \delta), \\ P_\mu^*(f, \Phi) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} P_\mu^*(f, \Phi, \delta). \end{aligned}$$

如果测度是遍历的, 则下述定理表明两种测度压的定义是等价的, 详细证明参见文献 [22].

定理 2.2 设 $f: X \rightarrow X$ 是紧度量空间 X 上的一个连续变换, $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ 是 X 上的一个次可加连续函数列, 则对任意满足 $\mathcal{F}_*(\mu, \Phi) \neq -\infty$ 的遍历测度 $\mu \in \mathcal{E}_f$, 有

$$P_\mu^*(f, \Phi) = \underline{\text{CP}}_\mu(f, \Phi) = \overline{\text{CP}}_\mu(f, \Phi) = P_\mu(f, \Phi) = h_\mu(f) + \mathcal{F}_*(\mu, \Phi).$$

上述定理对渐近次可加或渐近可加势函数也成立.

3 排斥子的维数

本节考虑 $f: M \rightarrow M$ 是一个光滑的 m -维流形 M 上的可微映射, 并假设 $J \subset M$ 是一个 f -不变的紧集 ($f^{-1}J = J$). 用 $\mathcal{M}(f|J)$ 和 $\mathcal{E}(f|J)$ 分别表示支撑在 J 上的不变测度所组成的集合和遍历测度所组成的集合. 我们称 f 在 J 上是扩张的或者称 J 是 f 的排斥子, 如果

- (1) 存在 J 的一个开邻域 U , 使得 $J = \{x \in U : f^n(x) \in U, \forall n \geq 0\}$;
- (2) 存在常数 $\kappa > 1$ 和 $C > 0$, 使得对任意 $x \in J$ 和任意 $u \in T_x M$, 有

$$\|Df^n(x)u\| \geq C\kappa^n \|u\|, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

其中 $\|\cdot\|$ 是由流形上的度量所诱导的范数.

3.1 共形排斥子的维数

称一个光滑映射 $f: M \rightarrow M$ 是共形的, 如果

$$Df(x) = a(x)\text{Isom}_x, \quad \forall x \in M, \tag{3.1}$$

其中 Isom_x 是 $T_x M$ 上的等距算子, $a(x)$ 是 M 上的一个连续映射. 如果 $|a(x)| > 1, \forall x \in M$, 则称 f 是一个共形的扩张映射. 称一个共形的扩张映射的排斥子为共形排斥子.

对于共形排斥子的维数研究已经有了完整的解决, 我们把这些结果陈述如下:

定理 3.1 假设 J 是一个 $C^{1+\alpha}$ 映射 $f: M \rightarrow M$ 的共形排斥子, 则

- (1) $\dim_H J = \dim_B J = s$, 其中 s 是 Bowen 方程 $P_J(f, -s \log \|Df(x)\|) = 0$ 的唯一的根;
- (2) $0 < \mathcal{H}^s(J) < \infty$ 且 $\mathcal{H}^s$ 与测度 μ 是等价的, 其中 μ 是拓扑压 $P_J(f, -s \log \|Df(x)\|)$ 唯一的平衡态;
- (3) $\dim_H J = s = \dim_H \mu$, 即 μ 是一个具有全 Hausdorff 维数的不变测度.

上述定理的第一个结论, 首先由 Bowen 在一个特殊的情形获得. Ruelle^[5] 证明了 $C^{1+\alpha}$ 映射的共形排斥子的 Hausdorff 维数由 Bowen 方程的根给出, 并同时证明了 $0 < \mathcal{H}^s(J) < \infty$. Falconer^[34] 证明了共形排斥子的 Hausdorff 维数和盒维数是相等的. Gatzouras 和 Peres^[35] 证明了上述定理中的第一和第三个结论对于 C^1 映射的共形排斥子仍然成立, 并且在一些额外的条件下第二个结论也成立. Barreira^[27] 用不同的方法也得出上述定理的第一个结论对 C^1 共形排斥子仍然成立. 上述定理对更一般的连续的弱共形扩张映射仍然成立, 参见文献 [1, 27].

3.2 非共形排斥子的维数

如果一个扩张映射 f 在其排斥子 J 上不满足 (3.1), 则称 J 是 f 的非共形排斥子. 相比于共形排斥子, 对非共形排斥子的维数理论的研究尚处于开始阶段, 有许多问题还不清楚. 我们先介绍一些可微映射的非共形排斥子的维数估计方面的结果.

给定一个遍历测度 $\mu \in \mathcal{E}(f|_J)$, 由 Oseledec 乘法遍历定理知, 下述两个极限对 μ - 几乎处处的点 $x \in J$ 存在:

$$\lambda_1(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)\|, \quad \lambda_s(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log m(Df^n(x)),$$

其中 $\|Df(x)\| = \sup_{0 \neq u \in T_x M} \frac{\|Df(x)u\|}{\|u\|}$, $m(Df(x)) = \inf_{0 \neq u \in T_x M} \frac{\|Df(x)u\|}{\|u\|}$. 我们分别称 $\lambda_1(\mu)$ 和 $\lambda_s(\mu)$ 为 f 关于测度 μ 的最大 Lyapunov 指数和最小 Lyapunov 指数. 令 $\lambda(\mu)$ 为所有 f 关于测度 μ 的 Lyapunov 指数之和.

因为 $\{\log \sup_{x \in J} \|Df^n(x)\|\}_{n \geq 1}$ 和 $\{-\log \inf_{x \in J} m(Df^n(x))\}_{n \geq 1}$ 是次可加的, 所以下述两个极限存在:

$$\sigma_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_{x \in J} \|Df^n(x)\| \quad \text{和} \quad \sigma_- = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \inf_{x \in J} m(Df^n(x)). \quad (3.2)$$

我们分别称 σ_+ 和 σ_- 是 f 的一致最大和最小 Lyapunov 指数. 注意到 f 在 J 上是扩张的, 所以 $\sigma_- > 0$. 如果没有特别指明, 我们用 $h_{\text{top}} = h_{\text{top}}(f|_J)$ 表示 f 的拓扑熵, 用 $P_{\text{top}} = P_J(f|_J, -\log |Df(x)|)$ 表示 $f|_J$ 关于势函数 $-\log |Df(x)|$ 的拓扑压, 其中 $|Df(x)|$ 表示算子 $Df(x): T_x M \rightarrow T_{f(x)} M$ 的 Jacobi 行列式.

定理 3.2 设 f 是 m - 维光滑流形 M 上的一个 C^1 映射, J 是 f 的一个排斥子. 对 J 的任意子集 Z 和 J 上的任意遍历测度 $\mu \in \mathcal{E}(f|_J)$, 有

- (1) $s^* \leq \dim_H Z \leq \overline{\dim}_B Z \leq t^*$, 其中 s^* 和 t^* 分别是方程 $P_Z(f, -s \log \|Df(x)\|) = 0$ 和 $\overline{\text{CP}}_Z(f, -t \log m(Df(x))) = 0$ 的根;
- (2) $s_* \leq \dim_H \mu \leq \overline{\dim}_B \mu \leq t_*$, 其中 s_* 和 t_* 分别是方程 $P_\mu(f, -s \Psi) = 0$, $\Psi = \{\log \|Df^n(x)\|\}$ 和 $P_\mu(f, -t \Phi) = 0$, $\Phi = \{\log m(Df^n(x))\}$ 的根;
- (3) $\frac{h_{\text{top}}}{\sigma_+} \leq \dim_H J \leq \overline{\dim}_B J \leq \frac{h_{\text{top}}}{\sigma_-}$, 另有 $m + \frac{P_{\text{top}}}{\sigma_-} \leq \dim_H J \leq \overline{\dim}_B J \leq m + \frac{P_{\text{top}}}{\sigma_+}$;
- (4) $m - \frac{\lambda(\mu) - h_\mu(f)}{\lambda_s(\mu)} \leq \dim_H \mu \leq \overline{\dim}_B \mu \leq m - \frac{\lambda(\mu) - h_\mu(f)}{\lambda_1(\mu)}$.

关于上述定理的证明, 参见文献 [23]. 对于第一个结论, 当 $Z = J$ 时, Barreira [27] 利用排斥子的 Markov 分解以及非可加拓扑压给出了排斥子的维数估计; 文献 [23] 中的证明方法类似于 Rugh 在文献 [14] 中所用的方法. 在映射是 C^2 的情形下, Hu [20] 利用 Pesin 理论证明了第二个结论; Huang 和 Zhang [21] 利用计算点维数的方法在更一般情形下得出了测度维数的估计; 值得指出的是, 我们在文献 [23] 中利用测度维数和测度压的概念, 直接得到一个类似于第一个结论的测度形式下的维数估计的版本. 第三和第四个结论把文献 [20] 中的相关结果推广到 C^1 映射.

利用映射的奇异值, 我们也可以得到排斥子维数的一个上界估计. 对 $x \in J$, 算子 $Df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} M$ 的奇异值的对数表示如下:

$$\lambda_1(x, f) \geq \lambda_2(x, f) \geq \cdots \geq \lambda_m(x, f) \geq \log \kappa.$$

最后一个不等式成立是因为 $\|Df^n(x)u\| \geq \kappa^n \|u\|$, $\forall x \in J, \forall 0 \neq u \in T_x M, \forall n \in \mathbb{N}$. 对于 $\alpha \in [0, m]$, 令

$$\varphi^\alpha(x, f) = \sum_{i=m-[\alpha]+1}^m \lambda_i(x, f) + (\alpha - [\alpha])\lambda_{m-[\alpha]}(x, f),$$

可见函数 $x \mapsto \lambda_i(x, f)$ 和 $x \mapsto \varphi^\alpha(x, f)$ 是连续的, 且满足 (证明参见文献 [36])

$$\varphi^\alpha(x, f^{n+l}) \geq \varphi^\alpha(x, f^n) + \varphi^\alpha(f^n x, f^l), \quad \forall x \in J, \quad \forall n, l \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

对 $\forall \alpha \in [0, m]$ 和子集 $Z \subset J$, 令 $P_Z(\alpha) := \overline{\text{CP}}_Z(f, -\varphi^\alpha(x, f))$. 容易验证 $P_Z(\alpha)$ 是关于 α 的严格递减的连续函数.

定理 3.3 设 f 是 m -维光滑流形 M 上的一个 C^1 映射, J 是 f 的排斥子. 对 J 的每个子集 Z , 我们有

$$\dim_H Z \leq t^*,$$

其中 t^* 是方程 $P_Z(\alpha) = 0$ 在区间 $[0, m]$ 中唯一的根.

上述定理的证明参见文献 [23]. 当 $Z = J$ 时, Zhang [36] 首先证明了该定理. 事实上, Ban 等 [9] 证明了此时 J 的 Hausdorff 维数的上界就是次可加拓扑压的 Bowen 方程 $P_J(f, \mathcal{F}(\alpha)) = 0$ 的唯一根, 其中 $\mathcal{F}(\alpha) = \{-\varphi^\alpha(x, f^n)\}_{n \geq 1}$.

问题 3.1 上述定理中的上界估计是否对集合的盒维数同样成立?

3.3 两种特殊的非共形排斥子的维数

虽然对非共形排斥子的维数研究尚处于初始阶段, 但目前对一些具有简单几何结构的非共形排斥子的 Hausdorff 维数和盒维数了解的比较清楚, 如自仿集或可以被自仿集逼近的集合. 关于在这方面的详细进展, 可以参见文献 [1, 37] 以及其后的参考文献. 特别地, 对 C^1 映射的平均共形排斥子的维数也得到了很好的研究结果, 参见文献 [9]. 下面介绍一种广义的 Sierpiński 毛毯和平均共形排斥子的维数公式.

3.3.1 广义的 Sierpiński 毛毯

对自仿集的维数研究可追溯至 Bedford [38] 和 McMullen [39] 的工作. 他们各自独立地研究了平面上一类简单但非平凡的自仿集, 并且用不同的方法得到了这类集合的维数公式. 随后, 这个领域的专家对更一般的自仿集合的维数展开了研究, 例如, Gatzouras 和 Lalley [40] 得到了对角分段线性映射生

成的自仿集合的维数公式; Kenyon 和 Peres^[41] 得到了自仿的 Sierpiński 海绵的维数公式. 事实上, 他们的工作把 Bedford 和 McMullen 的结果推广到高维情形; 随后, Luzia^[42, 43] 考虑了环面上的一类斜积扩张映射的排斥子的维数, 这类排斥子可以看作广义的 Sierpiński 毛毯的 C^2 扰动. 本节简单介绍 McMullen 的工作, 其他更多这方面的进展, 可参见文献 [1, 37].

考虑下述仿射函数:

$$S_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^{-1} & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_i/n \\ l_i/m \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, r,$$

其中 $1 < m \leq n$ 是整数且 $I = \{(k_i, l_i)\}_{i=1}^r \subset \{0, 1, \dots, n-1\} \times \{0, 1, \dots, m-1\}$. 我们称由上述迭代函数系统 $\{S_i\}_{i=1}^r$ 生成的自仿集 J 为广义的 Sierpiński 毛毯. 可以用下面这个更为方便的方法来描述这种自仿集:

$$J = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \begin{pmatrix} n^{-j} & 0 \\ 0 & m^{-j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{i_j} \\ l_{i_j} \end{pmatrix} : (i_1 i_2 \dots) \in \Sigma^+ \right\},$$

其中 $\Sigma^+ = \{1, \dots, r\}^{\mathbb{N}}$. 因此, 我们得到解码映射 $\chi: \Sigma^+ \rightarrow J$,

$$\chi(i_1 i_2 \dots) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} k_{i_j} n^{-j}, \sum_{j=1}^{\infty} l_{i_j} m^{-j} \right).$$

容易验证如上定义自仿集 J 是映射 $f(x, y) = (nx, my)$ 在环面上的排斥子.

利用一些概率论的方法, McMullen^[39] 得到了广义的 Sierpiński 毛毯的维数公式.

定理 3.4 设 J 是如上定义的广义的 Sierpiński 毛毯, 则

- (1) $\dim_H J = \log_m \left(\sum_{l=0}^{m-1} t_l^{\log_n m} \right)$, 其中 $t_l = \#\{k : (k, l) \in I\}$;
- (2) $\dim_B J = \log_m s + \log_n \frac{r}{s}$, 其中 $s = \#\{l : \text{存在 } k \text{ 使得 } (k, l) \in I\}$.

从环面上对角自仿扩张映射的不变集和不变测度的维数研究出发, Feng 和 Huang^[44] 在一般的拓扑动力系统中引入了加权 Bowen 球的概念, 进而定义了关于渐近次可加势函数的加权拓扑压, 并证明了其变分原理.

3.3.2 平均共形排斥子

Ban 等^[9] 引入了一类特殊的非共形排斥子—平均共形排斥子, 这推广了文献 [1, 27] 中拟共形排斥子和渐近共形排斥子的概念. 有例子表明存在非共形的平均共形排斥子, 参见文献 [45]. 特别地, Ban 等^[9] 得到了关于平均共形排斥子维数的 Bowen 方程公式. 本小节主要回顾这个结果.

设 J 是 f 的一个排斥子. 对任意 $x \in J$ 和 $0 \neq v \in T_x M$, 在点 x 处, 向量 v 的 Lyapunov 指数由下述极限定义:

$$\chi(x, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Df_x^n(v)\|.$$

由 Oseledec 乘法遍历定理知, 上述极限对 μ - 几乎处处的点 x 和任一非零向量 $v \in T_x M$ 存在, 令 $\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \dots \leq \lambda_m(x)$ 表示这 m 个 Lyapunov 指数 (包括重数), 其中 $m = \dim M$. 因为 Lyapunov 指数是 f - 不变的, 所以, 如果 μ 是遍历的, 则 Lyapunov 指数 μ - 几乎处处是常数, 令 $\lambda_1(\mu) \leq \lambda_2(\mu) \leq \dots \leq \lambda_m(\mu)$ 表示关于遍历测度 μ 的 Lyapunov 指数.

称 f 的一个排斥子 $J \subset M$ 是平均共形排斥子, 如果对任一遍历测度 $\mu \in \mathcal{E}(f|_J)$, 有 $\lambda_1(\mu) = \lambda_2(\mu) = \dots = \lambda_m(\mu) > 0$. 为简单起见, 我们用 $\lambda(\mu)$ 表示这唯一的 Lyapunov 指数.

定理 3.5 设 J 是 C^1 映射 f 的一个平均共形排斥子, 则

(1) $\dim_H J = \dim_B J = s^*$, 其中 s^* 是 Bowen 方程 $P_J(f, -s\mathcal{F}) = 0$, $\mathcal{F} = \{\log m(Df^n(x))\}_{n \geq 1}$ 的唯一的根;

(2) 存在 $\mu \in \mathcal{E}(f|_J)$, 使得 $\dim_H \mu = \dim_B \mu = \dim_H J = \dim_B J$.

上述第一个结论的证明, 参见文献 [9]. 进一步, Zhao 和 Cao [46] 把该结论推广为随机平均共形排斥子. 第二个结论的证明, 参见文献 [22]. 事实上, 这个满足维数公式的变分原理的测度是拓扑压 $P_J(f, -s\mathcal{F})$ ($\mathcal{F} = \{\log m(Df^n(x))\}_{n \geq 1}$) 的一个平衡态.

3.4 非共形排斥子上拓扑压的连续性

对于 C^1 映射 f 的共形排斥子 J_f , 由定理 3.1 及其后的论述知其 Hausdorff 维数由 Bowen 方程 $P_{J_f}(f, -s \log \|Df(x)\|) = 0$ 唯一的根给出. 特别地, 在这种情形下, 拓扑压 $P_{J_f}(f, -s \log \|Df(x)\|)$ 关于动力系统 f 是连续的. 详细地, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当映射 g 满足 $d_{C^1}(f, g) < \delta$ 时, 存在 g 的排斥子 J_g 使得系统 (J_f, f) 和 (J_g, g) 是拓扑共轭的且

$$|P_{J_g}(g, -s \log \|Dg(x)\|) - P_{J_f}(f, -s \log \|Df(x)\|)| < \epsilon.$$

进而知共形排斥子的 Hausdorff 维数关于 f 也是连续的, 即映射 $f \mapsto \dim_H J_f$ 是连续的. 事实上, Bogenschütz 和 Ochs [47] 证明了共形排斥子的 Hausdorff 维数在随机扰动下是稳定的. 进一步, Zhao 等 [45] 证明了平均共形排斥子的 Hausdorff 维数在随机扰动下也是稳定的.

最近, Feng 和 Shmerkin [48] 证明了自仿情形下次可加拓扑压的连续性, 进而得到了自仿集维数的连续性. 下面简单介绍一下文献 [48] 中的结果, 为此我们首先介绍一些基本概念和记号. 给定一个矩阵 $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, 其奇异值为 A^*A 的特征值的平方根, 记为

$$\alpha_1(A) \geq \dots \geq \alpha_d(A).$$

给定 $k \geq 2$, 令

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{d,k} &= \{\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k) : A_i \in \mathbb{R}^{d \times d}\}, \\ \mathcal{A}_{d,k}^C &= \{\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k) : \mathbf{A} \in \mathcal{A}_{d,k}, \|A_i\| < 1\}, \\ \mathcal{G}_{d,k} &= \{\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k) : A_i \in \text{GL}_d(\mathbb{R})\}, \\ \mathcal{G}_{d,k}^C &= \{\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k) : \mathbf{A} \in \mathcal{G}_{d,k}, \|A_i\| < 1\}, \end{aligned}$$

其中 $\text{GL}_d(\mathbb{R})$ 为所有 $d \times d$ 可逆实矩阵所组成的集合, $\|\cdot\|$ 表示标准的 Euclid 范数. 任给 $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_{d,k}^C$ 和向量 $t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^{kd}$, 存在唯一一个非空紧集 $F = F(\mathbf{A}, t)$ (自仿集) 使得

$$F = \bigcup_{i=1}^k A_i(F) + t_i.$$

特别地, 如果 $A_i(F) + t_i$ 互不相交, 则集合 F 可看作某个逐段扩张映射的排斥子.

对于 $s \geq 0$, 用 $m = [s]$ 表示不大于 s 的最大整数 m , 进而定义奇异值函数 $\varphi^s: \mathbb{R}^{d \times d} \rightarrow [0, +\infty)$ 如下:

$$\varphi^s(A) = \begin{cases} \alpha_1(A) \cdots \alpha_m(A) \alpha_{m+1}(A)^{s-m}, & 0 \leq s \leq d, \\ |\det(A)|^{s/d}, & s > d. \end{cases}$$

奇异值函数是次可乘的^[49], 即 $\varphi^s(AB) \leq \varphi^s(A)\varphi^s(B)$. 给定 $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_{d,k}$ 和 $s \geq 0$, 由奇异值函数的次可乘性, 可定义

$$P(\mathbf{A}, s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{|\mathbf{i}|=n} \varphi^s(A_{\mathbf{i}}) \right) = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{|\mathbf{i}|=n} \varphi^s(A_{\mathbf{i}}) \right),$$

其中 $\mathbf{i} = i_1 \cdots i_n$, $A_{\mathbf{i}} = A_{i_1} \cdots A_{i_n}$. 进一步, 当 $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_{d,k}^C$ 时, 令

$$s(\mathbf{A}) = \inf\{s \geq 0 : P(\mathbf{A}, s) \leq 0\}.$$

特别地, 当 $\mathbf{A} \in \mathcal{G}_{d,k}^C$ 时, $s(\mathbf{A})$ 恰是方程 $P(\mathbf{A}, s) = 0$ 的唯一正根, 详细证明参见文献 [49]. Falconer^[49] 证明了下述结果:

定理 3.6 令 $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_{d,k}$, 则下述结论成立:

- (1) $\overline{\dim}_B F(\mathbf{A}, t) \leq \min\{s(\mathbf{A}), d\}$, $\forall t \in \mathbb{R}^{kd}$;
- (2) 如果 $\|A_i\| < 1/3$, $\forall i$, 则对 Lebesgue 几乎所有的 $t \in \mathbb{R}^{kd}$, 有

$$\dim_H F(\mathbf{A}, t) = \dim_B F(\mathbf{A}, t) = \min\{s(\mathbf{A}), d\}.$$

Solomyak^[50] 进一步指出第二个结论在 $\|A_i\| < 1/2$ ($\forall i$) 时仍然成立. 需要指出的是, Falconer 在陈述定理时是假设矩阵可逆的, 但事实上他的证明过程中并不需要这个假设. 进一步, Falconer 和 Sloan^[51] 在一些特殊情形下证明了 $P(\mathbf{A}, s)$ 关于 $\mathbf{A}$ 的连续性. Feng 和 Shmerkin^[48] 在更一般的情形下证明了 $P(\mathbf{A}, s)$ 和 $s(\mathbf{A})$ 关于 $\mathbf{A}$ 的连续性, 我们把他们的结果陈述如下:

定理 3.7 对于如上定义的 $P(\mathbf{A}, s)$ 和 $s(\mathbf{A})$, 下述性质成立:

- (1) 对任意 $s \geq 0$, 映射 $\mathbf{A} \mapsto P(\mathbf{A}, s)$ 在 $\mathcal{A}_{d,k}$ 上连续;
- (2) 映射 $\mathbf{A} \mapsto s(\mathbf{A})$ 在 $\mathcal{A}_{d,k}^C$ 上连续;
- (3) 如果 $(\mathbf{A}, s) \in \mathcal{A}_{d,k} \times [0, \infty)$ 且 $\mathbf{A} \in \mathcal{G}_{d,k}$ 或者 $s \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, 则函数 $P(\mathbf{A}, s)$ 在点 $(\mathbf{A}, s)$ 处连续.

下面考虑 $C^{1+\epsilon}$ 可微映射 f 的非共形排斥子 J_f 上的次可加拓扑压的连续性. 设 $\varphi^\alpha(x, f)$ 为第 3.2 小节中所定义的函数, 令 $\Phi_f = \{-\varphi^\alpha(x, f^n)\}_{n \geq 1}$, 可见 Φ_f 是 J_f 上的次可加连续函数列, 我们考虑次可加拓扑压 $P_{J_f}(f, \Phi_f)$ 关于动力系统 f 的连续性.

定理 3.8 设 J_f 是 $C^{1+\epsilon}$ 映射 f 的非共形排斥子, 则映射 $g \mapsto P_{J_g}(g, \Phi_g)$ 在 f 点处连续.

下面简单地给出上述定理的证明思路. 首先因为

$$P_{J_f}(f, \Phi_f) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{J_f} \left(f, -\frac{1}{n} \varphi^\alpha(x, f^n) \right) = \inf_{n \geq 1} P_{J_f} \left(f, -\frac{1}{n} \varphi^\alpha(x, f^n) \right)$$

且 $P_{J_f}(f, -\frac{1}{n} \varphi^\alpha(x, f^n))$ 在 f 的 C^1 小邻域上是连续的, 所以, $P_{J_f}(f, \Phi_f)$ 在 f 的 C^1 小邻域上是上半连续的. 另一方面, 由于 f 是扩张的, 所以熵映射 $\mu \mapsto h_\mu(f)$ 是上半连续的, 进而由定理 2.1 知, 存在 $\mu \in \mathcal{E}(f | J_f)$ 使得

$$P_{J_f}(f, \Phi_f) = h_\mu(f) + (\Phi_f)_*(\mu).$$

令 $\tilde{J}_f$ 表示系统 (J_f, f) 的逆极限空间, θ 表示 $\tilde{J}_f$ 上的左移映射, $\pi : \tilde{J}_f \rightarrow J$ 表示自然的投射 (即 $\pi(\{x_n\}) = x_0$). 对上述测度 μ , 存在一个 θ - 不变的遍历测度 $\tilde{\mu}$ 使得 $\tilde{\mu} \circ \pi = \mu$. 对于测度 $\tilde{\mu}$, 存在 $\Delta \subset \tilde{J}_f$ 使得 $\tilde{\mu}(\Delta) = 1$, 对任一 $\tilde{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \Delta$, 存在 $T_{x_0}M$ 的分解

$$T_{x_0}M = E_1(\tilde{x}) \oplus E_2(\tilde{x}) \oplus \cdots \oplus E_{r(\tilde{x})}(\tilde{x})$$

和数 $0 < \lambda_1(\tilde{x}) < \cdots < \lambda_{r(\tilde{x})}(\tilde{x}) < +\infty$ 以及 $m_i(\tilde{x})$ ($i = 1, \dots, r(\tilde{x})$), 使得对任意 $i = 1, \dots, r(\tilde{x})$, 有

$$\dim E_i(\tilde{x}) = m_i(\tilde{x}) \quad \text{和} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x_0)v\| = \lambda_i(\tilde{x}), \quad \forall 0 \neq v \in E_i(\tilde{x}).$$

任给 $\epsilon > 0$, 对任意的 $\tilde{x} \in \Delta$, 定义 Lyapunov 度量 $|\cdot|_{\tilde{x}}$, 它满足

$$e^{\lambda_i - \epsilon}|v|_{\tilde{x}} \leq |Df(\tilde{x})v|_{\theta(\tilde{x})} \leq e^{\lambda_i + \epsilon}|v|_{\tilde{x}}, \quad \forall v \in E_i(\tilde{x}).$$

对充分小的 $\delta > 0$, 把上述 Lyapunov 度量拓广到球 $B(\tilde{x}, \delta)$ 上. 给定 $\xi \in (0, 1)$, $\tilde{y} \in B(\tilde{x}, \delta)$, 定义 $T_{y_0}M$ 中的锥如下:

$$\begin{aligned} V_i(\tilde{y}, \xi) &= \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in E_1 \oplus \cdots \oplus E_i, v_2 \in E_{i+1} \oplus \cdots \oplus E_r, |v_2|_{\tilde{y}} < \xi|v_1|_{\tilde{y}}\}, \\ U_i(\tilde{y}, \xi) &= \{(w_1, w_2) \mid w_1 \in E_i \oplus \cdots \oplus E_r, w_2 \in E_1 \oplus \cdots \oplus E_{i-1}, |w_2|_{\tilde{y}} < \xi|w_1|_{\tilde{y}}\}, \end{aligned}$$

可证得

$$Df^{-1}(\tilde{y})V_i(\tilde{y}, \xi) \subset V_i(\theta^{-1}\tilde{y}, \lambda\xi) \quad \text{和} \quad Df(\tilde{y})U_i(\tilde{y}, \xi) \subset U_i(\theta\tilde{y}, \lambda\xi),$$

其中 $e^{-\lambda_1 + \epsilon} < \lambda < 1$. 固定某个 $\alpha \in [0, d]$, 其中 $d = \dim M$, 有

$$P_{J_f}(f, \Phi_f) = h_{\tilde{\mu}}(\theta) - [\lambda_1(\tilde{\mu}) + \cdots + \lambda_{[\alpha]}(\tilde{\mu}) + (\alpha - [\alpha])\lambda_{[\alpha]+1}(\tilde{\mu})].$$

另一方面, 利用 Katok 的思想方法, 可以构造一个 θ - 不变的紧集 $\tilde{\Lambda} \subset \tilde{J}$ 使得下述成立:

- (1) $h_{\text{top}}(\theta, \tilde{\Lambda}) \geq h_{\tilde{\mu}}(\theta) - \epsilon$;
- (2) $T_{\tilde{\Lambda}}M$ 有一个连续的具有控制性质的直和分解 $E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$;
- (3) $e^{\lambda_i - 2\epsilon}|v|_{\tilde{y}} \leq |Df(\tilde{y})v|_{\theta(\tilde{y})} \leq e^{\lambda_i + 2\epsilon}|v|_{\tilde{y}}, \forall \tilde{y} \in \tilde{\Lambda}, v \in E_i(\tilde{y})$.

记 $\Lambda := \pi(\tilde{\Lambda})$, 则 Λ 是 f 的紧不变扩张集, 且 $T_{\Lambda}M$ 有一个具有控制性质的直和分解. 由扩张不变集的结构稳定性, 当 g 是 f 的一个 C^1 小扰动时, 存在 g 的紧不变集 Λ_g , 使得 (Λ_g, g) 拓扑共轭于 (Λ, f) 且 $T_{\Lambda_g}M$ 有一个连续的具有控制性质的直和分解

$$T_{\tilde{\Lambda}_g}M = F_1(\tilde{y}) \oplus \cdots \oplus F_r(\tilde{y}), \quad \tilde{y} \in \tilde{\Lambda}_g,$$

其中 $\tilde{\Lambda}_g$ 是 Λ_g 的关于 g 的逆极限空间. 进一步, 注意到对任意 $\tilde{y} \in \tilde{\Lambda}_g$ 和任意 $v \in F_i(\tilde{y})$, 有

$$e^{\lambda_i - 3\epsilon}|v|_{\tilde{y}} \leq |Dg(\tilde{y})v|_{\theta(\tilde{y})} \leq e^{\lambda_i + 3\epsilon}|v|_{\tilde{y}}.$$

记 $\tilde{\mu}_g$ 和 J_g 分别是 $\tilde{\mu}$ 和 J_f 关于 g 的对应测度和集合, 则有

$$\begin{aligned} P_{J_g}(g, \Phi_g) &\geq P_{\tilde{\Lambda}_g}(\theta, \Phi_g \circ \pi) \\ &\geq h_{\tilde{\mu}_g}(\theta) - [\lambda_1(\tilde{\mu}_g) + \cdots + \lambda_{[\alpha]}(\tilde{\mu}_g) + (\alpha - [\alpha])\lambda_{[\alpha]+1}(\tilde{\mu}_g)] \\ &\geq h_{\tilde{\mu}}(\theta) - [(\lambda_1(\tilde{\mu}) + 3\epsilon) + \cdots + (\lambda_{[\alpha]}(\tilde{\mu}) + 3\epsilon) + (\alpha - [\alpha])(\lambda_{[\alpha]+1}(\tilde{\mu}) + 3\epsilon)] \\ &\geq h_{\tilde{\mu}}(\theta) - [\lambda_1(\tilde{\mu}) + \cdots + \lambda_{[\alpha]}(\tilde{\mu}) + (\alpha - [\alpha])\lambda_{[\alpha]+1}(\tilde{\mu})] - 3\alpha\epsilon \\ &= P_{J_f}(f, \Phi_f) - 3\alpha\epsilon. \end{aligned}$$

因而, $P_{J_f}(f, \Phi_f)$ 在 f 处是下半连续的. 综上可知, 映射 $g \mapsto P_{J_g}(g, \Phi_g)$ 在 f 点是连续的.

4 双曲集的维数

本节考虑双曲集的维数.

设 $f: M \rightarrow M$ 是一个微分同胚, $J \subset M$ 是一个紧致的 f -不变集. 我们称 J 是 f 的一个双曲集, 如果对每个 $x \in J$, 都存在切空间的一个分解

$$T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$$

使得 $Df(x)E^i(x) = E^i(fx)$ ($i = s, u$) 且存在常数 $\lambda \in (0, 1)$ 和 $c > 0$ 使得

$$\max\{\|Df^n(x)|E^s(x)\|, \|Df^{-n}(x)|E^u(x)\|\} \leq c\lambda^n, \quad \forall x \in J, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

给定 $\epsilon > 0$, 对每个 $x \in J$, 考虑集合

$$V^s(x) = \{y \in B(x, \epsilon) : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon, \forall n \geq 0\},$$

$$V^u(x) = \{y \in B(x, \epsilon) : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon, \forall n \leq 0\},$$

其中 d 是流形 M 上的度量, $B(x, \epsilon) \subset M$ 表示以 x 为圆心半径为 ϵ 的开球. 如果 J 是一个 C^1 微分同胚的双曲集, 则存在 $\epsilon > 0$ 使得对每个 $x \in J$, 集合 $V^s(x)$ 和 $V^u(x)$ 是含有点 x 的光滑流形且满足 $T_x V^i(x) = E^i(x)$, $i = s, u$. 分别称流形 $V^s(x)$ 和 $V^u(x)$ 为点 x 处 (尺寸为 ϵ) 的局部稳定流形和局部不稳定流形. 进一步, 存在 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, 如果 $d(x, y) < \delta$, 则集合 $V^s(x) \cap V^u(y)$ 只含有一个点. 称函数

$$[\cdot, \cdot] : \{(x, y) \in J \times J : d(x, y) < \delta\} \rightarrow M, \quad [x, y] = V^s(x) \cap V^u(y)$$

为乘积构造. 关于更多这方面基础知识, 参见文献 [52].

如果一个双曲集 J 是局部最大的, 即存在 J 的一个开邻域 U 使得 $J = \bigcap_{n \geq 0} f^n U$, 则存在 $\delta(\epsilon) > 0$ 使得对任意满足 $d(x, y) < \delta$ 的点 $x, y \in J$, 有 $\sharp[x, y] = 1$ 且 $[x, y] \in J$. 称一个非空闭集 $R \subset J$ 为矩形, 如果 $\text{diam} R < \delta$, $R = \overline{\text{int} R}$ 且 $[x, y] \in R, \forall x, y \in R$. 称有限个矩形 $R_1, \dots, R_p$ 是 J 的一个 Markov 分解, 如果 $\{R_1, \dots, R_p\}$ 是 J 的一个覆盖且满足下述条件:

(1) 当 $i \neq j$ 时, $\text{int} R_i \cap \text{int} R_j = \emptyset$;

(2) 若 $x \in \text{int} R_i \cap f^{-1}(\text{int} R_j)$, 则有 $f(V^s(x) \cap R_i) \subset V^s(f(x)) \cap R_j$ 和 $V^u(f(x)) \cap R_j \subset f(V^u(x) \cap R_i)$.

任一局部最大双曲集有直径任意小的 Markov 分解, 且通过 Markov 分解双曲系统拓扑半共轭于一个符号系统, 参见文献 [53].

不利用拓扑压, Fathi^[54] 获得了双曲集盒维数的一个上界估计.

定理 4.1 如果 J 是 C^1 微分同胚 f 的一个双曲集, 则 $\overline{\dim}_B J \leq \frac{-2h_{\text{top}}(f)}{L}$, 其中

$$L = \max \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \max_{x \in J} \|Df^n(x)|E^s\|, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \max_{x \in J} \|(Df^n(x))^{-1}|E^u\| \right\},$$

$h_{\text{top}}(f)$ 表示映射 f 的拓扑熵.

4.1 共形情形

本小节讨论共形映射的双曲集的维数. 我们称一个可微映射 $f: M \rightarrow M$ 在双曲集 $J \subset M$ 上是共形的, 如果对任意 $x \in J$, 算子 $Df(x)|E^s$ 和 $Df(x)|E^u$ 满足 (3.1). 例如, 当 M 是一个曲面且

$\dim E^s(x) = \dim E^u(x) = 1, \forall x \in J$ 时, f 在 J 上就是共形的. 令

$$\varphi_s(x) := \log \|Df(x) | E^s\|, \quad \varphi_u(x) := -\log \|Df(x) | E^u\|.$$

定理 4.2 设 J 是 C^1 微分同胚 f 的一个局部极大双曲集, 且 f 在 J 上是拓扑传递和共形的, 则

- (1) $\dim_H(V^s(x) \cap J) = \underline{\dim}_B(V^s(x) \cap J) = \overline{\dim}_B(V^s(x) \cap J) = t_s, \forall x \in J;$
- (2) $\dim_H(V^u(x) \cap J) = \underline{\dim}_B(V^u(x) \cap J) = \overline{\dim}_B(V^u(x) \cap J) = t_u, \forall x \in J;$
- (3) $\dim_H J = \underline{\dim}_B J = \overline{\dim}_B J = t_s + t_u,$

其中 t_s 和 t_u 是唯一的实数使得 $P_J(f, t_s \varphi_s) = P_J(f, t_u \varphi_u) = 0$.

McCluskey 和 Manning^[13] 证明了上述定理第一和第二个结论中关于 Hausdorff 维数的公式; 当 f 是 C^2 微分同胚时, Takens^[55] 证明了上述定理的第一和第二个结论, 进一步 Palis 和 Viana^[56] 证明了这两个结论的一般情形; 关于第一和第二个结论基于热力学公式的证明, 可参见文献 [1, 27]. 关于第三个结论的详细证明, 参见文献 [1], 也可参见文献 [27] 中关于 f 是曲面上的微分同胚时的证明.

当 f 是曲面上的一个微分同胚时, Barreira 和 Wolf^[57] 证明了具有最大维数的测度的存在性. 他们的方法可以把这个结果推广到一般的双曲集上的共形映射 (参见文献 [2]), 我们把该定理陈述如下:

定理 4.3 设 J 是一个 $C^{1+\alpha}$ 微分同胚 f 的极大双曲集, 且 f 在 J 上是拓扑混合和共形的, 则存在一个遍历测度 $\mu \in \mathcal{E}(f | J)$ 使得

$$\dim_H \mu = \sup\{\dim_H \mu : \mu \in \mathcal{M}(f | J)\}.$$

4.2 非共形情形

本小节陈述一些利用拓扑压来估计非共形双曲集维数的结果. 为此, 我们先介绍一些记号. 假设 J 是 C^1 微分同胚 f 的一个局部极大双曲集, 定义函数

$$\varphi_s(x) := -\log \|(Df(x))^{-1} | E^s\| \quad \text{和} \quad \bar{\varphi}_s(x) := \log \|Df(x) | E^s\|, \quad x \in J,$$

以及函数

$$\varphi_u(x) := -\log \|Df(x) | E^u\| \quad \text{和} \quad \bar{\varphi}_u(x) := \log \|(Df(x))^{-1} | E^u\|, \quad x \in J.$$

令 $R_1, \dots, R_p$ 是 J 的一个 Markov 分解. 给定一个点 $x \in J$, 设 R_{i_0} 是上述 Markov 分解中包含 x 的一个矩形, 令

$$A^s(x) = V^s(x) \cap R_{i_0}, \quad A^u(x) = V^u(x) \cap R_{i_0}.$$

设 $\underline{t}_s(x)$ 和 $\bar{t}_s(x)$ 分别是下述拓扑压方程唯一的根:

$$P_{A^s(x)}(f, \underline{t}_s \varphi_s) = 0, \quad P_{A^s(x)}(f, \bar{t}_s \varphi_s) = 0.$$

类似地, 令 $\underline{t}_u(x)$ 和 $\bar{t}_u(x)$ 分别是下述方程唯一的根:

$$P_{A^u(x)}(f, \underline{t}_u \varphi_u) = 0, \quad P_{A^u(x)}(f, \bar{t}_u \varphi_u) = 0.$$

Barreira^[27] 证明了下述结果:

定理 4.4 设 J 是 C^1 微分同胚 f 的一个局部极大双曲集, 且 f 在 J 上是拓扑传递的, 则对任意 $x \in J$, 有

$$\underline{t}_s(x) \leq \dim_H(V^s(x) \cap J) \leq \underline{\dim}_B(V^s(x) \cap J) \leq \dim_B(V^s(x) \cap J) \leq \bar{t}_s(x),$$

$$\underline{t}_u(x) \leq \dim_{\mathrm{H}}(V^u(x) \cap J) \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}}(V^u(x) \cap J) \leq \dim_{\mathrm{B}}(V^u(x) \cap J) \leq \bar{t}_u(x).$$

当 J 是一个 C^2 微分同胚 f 的双曲集时, Shafikov 和 Wolf^[58] 证明了

$$\dim_{\mathrm{H}} J \leq \dim M + \frac{P_J(f, -\log |\det Df| | E^u|)}{\sigma_+},$$

其中 σ_+ 由 (3.2) 定义. 设紧不变集 J (不一定是双曲集) 上的切丛满足某种等变化条件, Franz^[59] 和 Gelfert^[60] 分别得到了集合 J 的 Hausdorff 维数和盒维数的一个上界估计.

4.3 双曲测度的点维数

如果已知测度的点维数的上、下界, 容易验证这个上、下界也是测度的 Hausdorff 维数或者是盒维数的上、下界. 所以, 本小节主要介绍光滑系统中关于测度点维数方面的一些结果.

设 μ 是一个 $C^{1+\alpha}$ 微分同胚 f 的不变测度且具有紧支撑, 我们称测度 μ 是双曲的, 如果关于 μ 的 Lyapunov 指数都非零. 对于一个 $C^{1+\alpha}$ 微分同胚 f 的双曲遍历测度 μ , Ledrappier 和 Young^[18] 证明了该测度在稳定方向和不稳定方向的点维数的存在性, 且稳定方向的点维数与不稳定方向的点维数之和是测度 μ 的点维数的一个上界; Barreira 等^[19] 进一步证明了测度 μ 的点维数等于其稳定方向的点维数与不稳定方向的点维数之和. 特别地, 当 f 是曲面上的一个 $C^{1+\alpha}$ 微分同胚时, 对于一个双曲的遍历测度 μ , Young^[17] 证明了

$$d_{\mu}(x) = h_{\mu}(f) \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right), \quad \mu\text{-几乎处处 } x,$$

其中 $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ 是关于测度 μ 的 Lyapunov 指数. Barreira 和 Wolf^[61] 把这个结论推广到非遍历测度情形, 即

$$d_{\mu}(x) = h_{\mu}(x) \left(\frac{1}{\lambda_1(x)} - \frac{1}{\lambda_2(x)} \right), \quad \mu\text{-几乎处处 } x,$$

其中 $h_{\mu}(x)$ 是测度 μ 在点 x 处的局部熵, $\lambda_1(x) > 0 > \lambda_2(x)$ 是测度 μ 在点 x 处的 Lyapunov 指数.

当 f 是 C^1 微分同胚或映射时, 对于双曲测度的点维数的估计也有一些进展, 下面作一个简单的介绍.

设 f 是一个 m -维光滑 Riemann 流形 M 上的 C^1 映射, μ 是一个具有紧支撑的 f 不变遍历测度. 令 $\lambda_1(\mu)$ 和 $\lambda_m(\mu)$ 分别表示关于测度 μ 的最小和最大 Lyapunov 指数. Huang 和 Zhang^[21] 证明了下述结果:

定理 4.5 设 μ 的紧支撑集为 J , 在上述假设下, 下列结论成立:

- (1) 如果 $\lambda_m(\mu) > 0$, 则 $\underline{d}_{\mu}(x) \geq \frac{h_{\mu}(f)}{\lambda_m(\mu)}$, μ -几乎处处 $x \in M$;
- (2) 如果 f 在 J 上是非退化的且 $\lambda_1(\mu) > 0$, 则

$$\frac{h_{\mu}(f)}{\lambda_m(\mu)} \leq \underline{d}_{\mu}(x) \leq \bar{d}_{\mu}(x) \leq \frac{h_{\mu}(f)}{\lambda_1(\mu)}, \quad \mu\text{-几乎处处 } x \in M.$$

称切空间 TM 的一个 Df -不变分解 $\mathrm{TM} = E \oplus F$ 是控制分解, 如果存在正整数 $N > 1$ 使得对任意 $x \in M$, 任意非零向量 $v \in E(x)$ 和 $w \in F(x)$, 有

$$\|Df^N(x)v\| \leq \frac{1}{2} \|Df^N(x)w\|.$$

对于一个给定的双曲遍历测度 μ , 如果它相应的 Oseledet 分解是控制分解, Wang 和 Cao^[62] 证明了下述结果:

定理 4.6 令 $f : M \rightarrow M$ 是 m - 维紧致流形 M 上的 C^1 微分同胚, μ 是 M 上的一个双曲的遍历测度且其 Oseledet 分解 $E^u \oplus E^s$ 是控制分解, 其中 E^u 和 E^s 分别是正、负 Lyapunov 指数对应的 Lyapunov 空间的直和. 假设存在 $0 < k < p$ ($0 < p \leq m$) 使得测度 μ 的 Lyapunov 指数满足 $\lambda_1(\mu) < \cdots < \lambda_k(\mu) < 0 < \lambda_{k+1}(\mu) \leq \cdots \leq \lambda_m(\mu)$, 则

$$h_\mu(f) \left(\frac{1}{\lambda_m(\mu)} - \frac{1}{\lambda_1(\mu)} \right) \leq \underline{d}_\mu(x) \leq \bar{d}_\mu(x) \leq h_\mu(f) \left(\frac{1}{\lambda_{k+1}(\mu)} - \frac{1}{\lambda_k(\mu)} \right), \quad \mu\text{- 几乎处处 } x \in M.$$

进一步, 如果上述定理中的遍历测度 μ 只有一正、一负两个 Lyapunov 指数, 即存在 $1 < k < m$ 使得 $\lambda_1(\mu) = \cdots = \lambda_k(\mu) < 0 < \lambda_{k+1}(\mu) = \cdots = \lambda_m(\mu)$, 则由上述定理立得

$$d_\mu(x) = h_\mu(f) \left(\frac{1}{\lambda_m(\mu)} - \frac{1}{\lambda_1(\mu)} \right), \quad \mu\text{- 几乎处处 } x \in M.$$

致谢 感谢审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Pesin Y. Dimension Theory in Dynamical Systems, Contemporary Views and Applications. Chicago: University of Chicago Press, 1997
- 2 Barreira L. Dimension and Recurrence in Hyperbolic Dynamics. Progress in Mathematics, vol. 272. Basel: Birkhäuser, 2008
- 3 Barreira L. Thermodynamic Formalism and Applications to Dimension Theory. Progress in Mathematics, vol. 294. Basel: Birkhäuser, 2011
- 4 Bowen R. Hausdorff dimension of quasi-circles. Publ Math Inst Hautes Études Sci, 1979, 50: 11–26
- 5 Ruelle D. Repellers for real analytic maps. Ergodic Theory Dynam Systems, 1982, 2: 99–107
- 6 Ruelle D. Statistical mechanics on a compact set with $\mathbb{Z}^\nu$ action satisfying expansiveness and specification. Trans Amer Math Soc, 1973, 185: 237–251
- 7 Falconer K J. A subadditive thermodynamic formalism for mixing repellers. J Phys A, 1988, 21: 737–742
- 8 Cao Y, Feng D, Huang W. The thermodynamic formalism for sub-additive potentials. Discrete Contin Dyn Syst, 2008, 20: 639–657
- 9 Ban J, Cao Y, Hu H. Dimensions of average conformal repeller. Trans Amer Math Soc, 2010, 362: 727–751
- 10 Barreira L. Nonadditive thermodynamic formalism: Equilibrium and Gibbs measures. Discrete Contin Dyn Syst, 2006, 16: 279–305
- 11 Mummert A. The thermodynamic formalism for almost-additive sequences. Discrete Contin Dyn Syst, 2006, 16: 435–454
- 12 Feng D, Huang W. Lyapunov spectrum of asymptotically sub-additive potentials. Comm Math Phys, 2010, 297: 1–43
- 13 McCluskey H, Manning A. Hausdorff dimension for horseshoes. Ergodic Theory Dynam Systems, 1983, 3: 251–260
- 14 Rugh H. On the dimensions of conformal repellers: Randomness and parameter dependency. Ann of Math (2), 2008, 168: 695–748
- 15 Chen E, Xiong J. Dimension and measure theoretic entropy of a subshift in symbolic space. Chinese Sci Bull, 1997, 42: 1193–1196
- 16 陈二才, 熊金城. 符号空间中子位移的测度熵与维数. 科学通报, 1997, 42: 910–912
- 17 Young L S. Dimension, entropy and Lyapunov exponents. Ergodic Theory Dynam Systems, 1982, 2: 109–129
- 18 Ledrappier F, Young L. The metric entropy of diffeomorphisms, II: Relations between entropy, exponents and dimension. Ann of Math (2), 1985, 122: 540–574
- 19 Barreira L, Pesin Y, Schmeling J. Dimension and product structure of hyperbolic measures. Ann of Math (2), 1999, 149: 755–783
- 20 Hu H. Dimensions of invariant sets of expanding maps. Comm Math Phys, 1996, 176: 307–320

- 21 Huang W, Zhang P. Pointwise dimension, entropy and Lyapunov exponents for C^1 map. *Trans Amer Math Soc*, 2012, 364: 6355–6370
- 22 Cao Y, Hu H, Zhao Y. Non-additive measure-theoretic pressure and applications to dimensions of an ergodic measure. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2013, 33: 831–850
- 23 Wang J, Cao Y, Zhao Y. Dimension estimates in non-conformal setting. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2014, 34: 3847–3873
- 24 Falconer K. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. New York: Wiley, 2003
- 25 Zhao Y, Zhang L, Cao Y. The asymptotically additive topological pressure on the irregular set for asymptotically additive potentials. *Nonlinear Anal*, 2011, 74: 5015–5022
- 26 Walters P. *An Introduction to Ergodic Theory*. New York: Springer-Verlag, 1982
- 27 Barreira L. A non-additive thermodynamic formalism and applications to dimension theory of hyperbolic dynamical systems. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1996, 16: 871–927
- 28 Huang W, Yi Y. A local variational principle of pressure and its applications to equilibrium states. *Israel J Math*, 2007, 161: 29–94
- 29 Zhang G. Variational principles of pressure. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2009, 24: 1409–1435
- 30 Chen B, Ding B, Cao Y. The local variational principle of topological pressure for sub-additive potentials. *Nonlinear Anal*, 2010, 73: 3525–3536
- 31 Barreira L. Almost additive thermodynamic formalism: Some recent developments. *Rev Math Phys*, 2010, 22: 1147–1179
- 32 He L, Lv J, Zhou L. Definition of measure-theoretic pressure using spanning sets. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2004, 20: 709–718
- 33 Katok A. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Publ Math Inst Hautes Études Sci*, 1980, 51: 137–173
- 34 Falconer K. Dimension and measures of quasi self-similar sets. *Proc Amer Math Soc*, 1989, 106: 543–554
- 35 Gatzouras D, Peres Y. Invariant measures of full dimension for some expanding maps. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1997, 17: 147–167
- 36 Zhang Y. Dynamical upper bounds for Hausdorff dimension of invariant sets. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1997, 17: 739–756
- 37 Chen J, Pesin Y. Dimension of non-conformal repellers: A survey. *Nonlinearity*, 2010, 23: 93–114
- 38 Bedford T. Crinkly curves, Markov partitions and box dimension of self-similar sets. PhD Thesis. Coventry: University of Warwick, 1984
- 39 McMullen C. The Hausdorff dimension of general Sierpiński carpets. *Nagoya Math J*, 1984, 96: 1–9
- 40 Gatzouras D, Lalley S. Hausdorff and box dimensions of certain self-affine fractals. *Indiana Univ Math J*, 1992, 41: 533–568
- 41 Kenyon R, Peres Y. Measures of full dimension on affine-invariant sets. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1996, 16: 307–323
- 42 Luzia N. A variational principle for the dimension for a class of non-conformal repellers. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2006, 26: 821–845
- 43 Luzia N. Measure of full dimension for some non-conformal repellers. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2010, 26: 291–302
- 44 Feng D, Huang W. Variational principle for weighted topological pressure. *J Math Pures Appl (9)*, 2016, 106: 411–452
- 45 Zhao Y, Cao Y, Ban J. The Hausdorff dimension of average conformal repellers under random perturbation. *Nonlinearity*, 2009, 22: 2405–2416
- 46 Zhao Y, Cao Y. Dimensions of random average conformal repellers. *J Math Anal Appl*, 2013, 408: 165–176
- 47 Bogenschütz T, Ochs G. The Hausdorff dimension of conformal repellers under random perturbation. *Nonlinearity*, 1999, 12: 1323–1338
- 48 Feng D, Shmerkin P. Non-conformal repellers and the continuity of pressure for matrix cocycles. *Geom Funct Anal*, 2014, 24: 1101–1128
- 49 Falconer K. The Hausdorff dimension of self-affine fractals. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 1988, 103: 339–350
- 50 Solomyak B. Measure and dimension for some fractal families. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 1998, 124: 531–546
- 51 Falconer K, Sloan A. Continuity of subadditive pressure for self-affine sets. *Real Anal Exchange*, 2009, 34: 413–427
- 52 张筑生. 微分动力系统原理. 北京: 科学出版社, 2006
- 53 Bowen R. *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*. Berlin: Springer-Verlag, 1975
- 54 Fathi A. Expansiveness, hyperbolicity, and Hausdorff dimension. *Comm Math Phys*, 1989, 126: 249–262
- 55 Takens F. Limit capacity and Hausdorff dimension of dynamically defined Cantor sets. In: *Dynamical Systems*. Berlin: Springer, 1988, 196–212

- 56 Palis J, Viana M. On the continuity of Hausdorff dimension and limit capacity for horseshoes. In: Dynamical Systems. Berlin: Springer, 1988, 150–160
- 57 Barreira L, Wolf C. Measures of maximal dimension for hyperbolic diffeomorphisms. *Comm Math Phys*, 2003, 239: 93–113
- 58 Shafikov R, Wolf C. Stable sets, hyperbolicity and dimension. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2005, 12: 403–412
- 59 Franz A. Hausdorff dimension estimates for invariant sets with an equivariant tangent bundle splitting. *Nonlinearity*, 1998, 11: 1063–1074
- 60 Gelfert K. Dimension estimates beyond conformal and hyperbolic dynamics. *Dyn Syst*, 2005, 20: 267–280
- 61 Barreira L, Wolf C. Pointwise dimension and ergodic decompositions. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2006, 26: 653–671
- 62 Wang J, Cao Y. The Hausdorff dimension estimation for an ergodic hyperbolic measure of C^1 -diffeomorphism. *Proc Amer Math Soc*, 2016, 144: 119–128

Topological pressure and dimension estimation

CAO YongLuo & ZHAO Yun

Abstract In this paper, we give a survey of recent results in the dimension theory of dynamical systems, with emphasis on the dimension of repellers and hyperbolic sets and the dimension of invariant measures. In the case of conformal dynamics, the theory is completely well understood. However, it still lacks today a satisfactory general approach for the non-conformal case, although a number of interesting and nontrivial developments have been obtained. Indeed, we only well understand some particular non-conformal repellers, e.g., generalized Sierpiński carpets and average conformal repellers.

Keywords topological pressure, dimension, invariant measure

MSC(2010) 37C45, 37D35, 37C70, 28A80, 28A78

doi: 10.1360/N012016-00133