Dini 型多线性 Calderón-Zygmund 算子的多线性迭代交换子在非齐性空间上的有界性

郑涛涛, 陶祥兴*

浙江科技学院数学与信息科学系, 杭州 310028
E-mail: taotzheng@126.com, xxtau@163.com

收稿日期: 2016-04-28; 接受日期: 2017-02-21; 网络出版日期: 2017-03-22; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11571306, 11626213, 11671357 和 11601223) 和浙江省自然科学基金 (批准号: LQ17A010002 和 LY16A010006) 资助项目

摘要 设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 为仅具有几何双倍度量 d 和上双倍测度 μ 的一类新的非齐性空间, 本文考虑 Dini 型多线性 Calderón-Zygmund 奇异积分算子与 $\text{RBMO}(\mu)$ 中的向量值函数 $\mathbf{b}$ 生成的多线性迭代交换子在这非齐性空间 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 上的有界性.

关键词 Dini 型 多线性 交换子**MSC (2010) 主题分类** 42B20, 42B35

1 引言

设 T 为带光滑核 Ω 的 Calderón-Zygmund 算子,

$$Tf(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^d} f(y) dy,$$

其中核 Ω 满足 $\int_{S^{d-1}} \Omega(x') d\sigma(x) = 0$, $|\Omega(x') - \Omega(y')| < |x' - y'|$, 函数 b 属于有界平均振动函数 (BMO) 空间. 1976 年, Coifman 等^[1] 最先研究了交换子

$$[b, T](f)(x) = b(x)T(f)(x) - T(bf)(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

并证明了交换子 $[b, T]$ 是 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上的有界算子, $1 < p < \infty$. 2002 年, Grafakos 和 Torres^[2] 把 Calderón-Zygmund 核推广到了多线性形式, 研究了多线性 Calderón-Zygmund 算子 $\mathcal{T}$. 随后, 2003 年, Pérez 和 Torres^[3] 给出了一种多线性求和形式的交换子 $\mathcal{T}_{\Sigma \mathbf{b}}$ 的定义, 设向量值函数 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \text{BMO}^m$,

$$\mathcal{T}_{\Sigma \mathbf{b}}(f_1, \dots, f_m) = \sum_{j=1}^m \mathcal{T}_{b_j}^j(f_1, \dots, f_m), \quad (1.1)$$

其中

$$\mathcal{T}_{b_j}^j(f_1, \dots, f_m) = b_j \mathcal{T}(f_1, \dots, f_j, \dots, f_m) - \mathcal{T}(f_1, \dots, b_j f_j, \dots, f_m).$$

英文引用格式: Zheng T T, Tao X X. Boundedness for iterated commutators of multilinear singular integrals of Dini's type on non-homogeneous metric measure spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1029–1046, doi: 10.1360/N012016-00089

同时, Pérez 也给出了这个交换子如下形式的有界性:

$$\|\mathcal{T}_{\Sigma \mathbf{b}}(f_1, \dots, f_m)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \left(\sum_{j=1}^m \|b_j\|_{\text{BMO}} \right) \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^d)}, \quad (1.2)$$

其中 $1 < p, p_1, \dots, p_m < \infty$, $1/p = 1/p_1 + \dots + 1/p_m$. 2009 年, Lerner 等^[4] 将 Pérez 的结论中关于 p 的限制范围 $p > 1$ 去掉, 证明了在其余条件不变下 (1.2) 仍成立. 2011 年, Li 等^[5] 将这个交换子 $\mathcal{T}_{\Sigma \mathbf{b}}$ 的有界性推广到 Morrey 空间上.

最近, 对于多线性 Calderón-Zygmund 算子 $\mathcal{T}$ 和向量值函数 $\mathbf{b}$, 若 $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$, 学者们研究了如下的多线性形式的迭代交换子 $\mathcal{T}_{\Pi \mathbf{b}}$:

$$\mathcal{T}_{\Pi \mathbf{b}}(f_1, \dots, f_m) = [b_1, [b_2, \dots, [b_{m-1}, [b_m, \mathcal{T}]_m]_{m-1}, \dots]_1(\vec{f}). \quad (1.3)$$

2014 年, Pérez 等^[6] 给出了 $\mathcal{T}_{\Pi \mathbf{b}}$ 的有界性并得到

$$\|\mathcal{T}_{\Pi \mathbf{b}}(f_1, \dots, f_m)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \left(\prod_{j=1}^m \|b_j\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^d)} \right) \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^d)}, \quad (1.4)$$

其中 $1 < p_1, \dots, p_m < \infty$, $1/p = 1/p_1 + \dots + 1/p_m$.

另一方面, 2009 年, Maldonado 和 Naibo^[7] 在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^d$ 上发展了一套 Dini 型双线性 Calderón-Zygmund 算子理论并将其应用到仿积与双线性拟微分算子的研究上. 在 Maldonado 和 Naibo 等的研究基础上, 2014 年, Lu 和 Zhang^[8] 进一步研究了 Dini 型多线性 Calderón-Zygmund 算子交换子的有界性. 对于 $a > 0$, 称 $\omega \in \text{Dini}(a)$, 如果 $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, 且 ω 是非减的并满足

$$|\omega|_{\text{Dini}(a)} := \int_0^1 \omega^a(t) \frac{dt}{t} < \infty. \quad (1.5)$$

我们称核函数 $K(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$ 是 Euclid 空间上的 Dini 型多线性 Calderón-Zygmund 核, 若 K 是 $(\mathbb{R}^d)^{m+1}$ 的对角线 $\{x = y_1 = y_2 = \dots = y_m\}$ 之外的局部可积函数, 且存在正常数 A 使得

(i) 当 $(x, y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^d)^{m+1}$ 且 x 不等于某个 y_i ($1 \leq i \leq m$) 时,

$$|K(x, y_1, \dots, y_m)| \leq \frac{A}{(\sum_{i=1}^m |x - y_i|)^{md}}; \quad (1.6)$$

(ii) 当 $|x - x'| \leq \frac{1}{2} \max_{i \in \{1, \dots, m\}} |x - y_i|$ 时,

$$|K(x, y_1, \dots, y_m) - K(x', y_1, \dots, y_m)| \leq \frac{A}{(\sum_{i=1}^m |x - y_i|)^{md}} \omega\left(\frac{|x - x'|}{\sum_{i=1}^m |x - y_i|}\right); \quad (1.7)$$

(iii) 对于任意满足 $1 \leq i \leq m$ 的 i , 当 $|y_i - y'_i| \leq \frac{1}{2} \max_{i \in \{1, \dots, m\}} |x - y_i|$ 时,

$$\begin{aligned} & |K(x, y_1, \dots, y_j, \dots, y_m) - K(x, y_1, \dots, y'_j, \dots, y_m)| \\ & \leq \frac{A}{(\sum_{i=1}^m |x - y_i|)^{md}} \omega\left(\frac{|y_j - y'_j|}{\sum_{i=1}^m |x - y_i|}\right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Euclid 空间 $\mathbb{R}^d$ 上 Dini 型多线性 Calderón-Zygmund 算子 $\mathcal{T}_\omega$ 由如下形式给出:

$$\mathcal{T}_\omega(f_1, \dots, f_m)(x) = \int_{(\mathbb{R}^d)^m} K(x, y_1, \dots, y_m) f_1(y_1) \cdots f_m(y_m) dy_1 \cdots dy_m.$$

当 $\omega(t) = t^\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) 时, 对应的 $K(x, y_1, \dots, y_m)$ 和 $\mathcal{T}_\omega$ 即为上面提到的多线性 Calderón-Zygmund 核函数和多线性 Calderón-Zygmund 算子 $\mathcal{T}$, 参见文献 [2].

Dini 型多线性 Calderón-Zygmund 算子 $\mathcal{T}_\omega$ 和向量值函数 $\mathbf{b}$ 的求和形式的交换子可以写成

$$\mathcal{T}_{\omega, \Sigma \mathbf{b}}(f_1, \dots, f_m) = \sum_{j=1}^m \mathcal{T}_{\omega, b_j}^j(f_1, \dots, f_m), \quad (1.9)$$

其中

$$\mathcal{T}_{\omega, b_j}^j(f_1, \dots, f_m) = b_j \mathcal{T}_\omega(f_1, \dots, f_j, \dots, f_m) - \mathcal{T}_\omega(f_1, \dots, b_j f_j, \dots, f_m).$$

定理 A [8] 设 $\mathcal{T}_\omega$ 是 Dini 型多线性 Calderón-Zygmund 算子, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \text{BMO}^m(\mathbb{R}^d)$. 设 $1/p = \sum_{i=1}^m 1/p_i$ 且 $1 < p_i < \infty$, $i = 1, \dots, m$. 若 ω 满足

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} \left(1 + \log \frac{1}{t}\right) dt < \infty,$$

则存在常数 C 使得

$$\|\mathcal{T}_{\omega, \Sigma \mathbf{b}}(f_1, \dots, f_m)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \left(\max_{1 \leq j \leq m} \|b_j\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^d)} \right) \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^d)}.$$

我们注意到以上这些研究工作都是在底空间 $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ 上且其测度 μ 具有双倍性质,

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r)), \quad (1.10)$$

其中 $B(x, r) = \{y \in \mathcal{X} : d(x, y) < r\}$ 是以 x 为中心、 r 位半径的开球. 赋予了此测度 μ 的度量空间 $(\mathcal{X}, d)$ 称作齐性空间. 然而, 最近几年的研究开始转而关注底空间上的测度仅满足多项式增长条件, 即存在正常数 C_0 , 使得对所有的 $x \in \mathcal{X}$ 和 $r \in (0, \infty)$, 有

$$\mu(B(x, r)) \leq C_0 r^d. \quad (1.11)$$

尽管这样的测度不满足双倍条件, 但许多关于经典的 Calderón-Zygmund 理论的结论仍然成立, 可参见文献 [9–16].

本文将在一类新的度量可测空间 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 上考虑带 Dini 型的多线性迭代交换子的有界性. 根据文献 [17], 我们先给出几何双倍和上双倍测度的概念.

定义 1.1 [17] 若存在数 $N \in \mathbb{N}$ 使得任意开球 $B(x, r) \subset \mathcal{X}$ 可以被至多 N 个球 $B(x_i, \frac{r}{2})$ 所覆盖, 则称 $(\mathcal{X}, d)$ 为几何双倍度量空间.

定义 1.2 [17] 度量空间 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 中的 Borel 测度 μ 称为上双倍测度, 若存在控制函数 $\lambda(x, r): \mathcal{X} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 关于 r 是递增的, 且存在正常数 C_λ 使得对任意 $r > 0$ 和 $x, y \in \mathcal{X}$ 均有

$$\mu(B(x, r)) \leq \lambda(x, r) \leq C_\lambda \lambda\left(x, \frac{r}{2}\right),$$

且若 $d(x, y) \leq r$, 则 $\lambda(x, r) \approx \lambda(y, r)$.

本文假定 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是几何双倍度量空间且测度 μ 为上双倍测度. 显然, 这类新的度量测度空间包含了 $\mathbb{R}^d$ 上的齐性空间和带多项式增长条件 (1.11) 的度量空间. 首先把 Dini 型多线性 Calderón-Zygmund 算子和相应的交换子的定义推广到新的度量空间 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 上.

设 $\mathcal{K}(x, y_1, \dots, y_m)$ 是 $(\mathcal{X})^{m+1}$ 的对角线 $\{x = y_1 = y_2 = \dots = y_m\}$ 之外的局部可积函数, $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是一个非减函数. $C > 0$ 是一个常数, 我们称 $\mathcal{K}(x, y_1, \dots, y_m)$ 是 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 上的 Dini 型多线性 Calderón-Zygmund 核, 若其满足下面的尺寸条件和光滑性条件:

(i) 当 $(x, y_1, \dots, y_m) \in (\mathcal{X})^{m+1}$ 且 x 不等于某个 y_i ($1 \leq i \leq m$) 时,

$$|\mathcal{K}(x, y_1, \dots, y_m)| \leq C \left[\sum_{j=1}^m \lambda(x, d(x, y_j)) \right]^{-m}; \quad (1.12)$$

(ii) 当 $d(x, x') \leq \frac{1}{2} \max_{i \in \{1, \dots, m\}} d(x, y_i)$ 时,

$$\begin{aligned} & |\mathcal{K}(x, y_1, \dots, y_m) - \mathcal{K}(x', y_1, \dots, y_m)| \\ & \leq C \frac{1}{[\sum_{j=1}^m \lambda(x, d(x, y_j))]^m} \omega \left(\frac{d(x, x')}{\sum_{j=1}^m d(x, y_j)} \right); \end{aligned} \quad (1.13)$$

(iii) 对于任意满足 $1 \leq i \leq m$ 的 i , 当 $d(y_i, y'_i) \leq \frac{1}{2} \max_{i \in \{1, \dots, m\}} d(x, y_i)$ 时,

$$\begin{aligned} & |\mathcal{K}(x, y_1, \dots, y_j, \dots, y_m) - \mathcal{K}(x, y_1, \dots, y'_j, \dots, y_m)| \\ & \leq C \frac{1}{[\sum_{j=1}^m \lambda(x, d(x, y_j))]^m} \omega \left(\frac{d(y_j, y'_j)}{\sum_{j=1}^m d(x, y_j)} \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

假如 $\mathfrak{T}$ 是多线性算子, 对 L^∞ 中的有紧支集的可测函数 $f_1, \dots, f_m$ 和几乎处处的 $x \notin \bigcap_{i=1}^m \text{supp } f_i$, 则有

$$\mathfrak{T}(f_1, \dots, f_m)(x) = \int_{(\mathcal{X})^m} \mathcal{K}(x, y_1, \dots, y_m) f_1(y_1) \cdots f_m(y_m) d\mu(y_1) \cdots d\mu(y_m), \quad (1.15)$$

若存在某些 $r_1, r_2, \dots, r_m \in (1, \infty)$ 且 $1/r = \sum_{i=1}^m 1/r_i < 1$, 使得算子 $\mathfrak{T}$ 可以被扩张为 $L^{r_1}(\mu) \times \dots \times L^{r_m}(\mu)$ 到 $L^{r, \infty}(\mu)$ 的有界算子或者存在某些 $r_1, r_2, \dots, r_m \in (1, \infty)$ 使得 $\sum_{i=1}^m 1/r_i = 1$, $\mathfrak{T}$ 可以被扩张为 $L^{r_1}(\mu) \times \dots \times L^{r_m}(\mu)$ 到 $L^1(\mu)$ 的有界算子, 则称 $\mathfrak{T}$ 为 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 上的 Dini 型多线性 Calderón-Zygmund 算子.

我们将在度量空间上研究 Dini 型多线性 Calderón-Zygmund 算子 $\mathfrak{T}$ 与局部可积函数 b 生成的迭代交换子:

$$\mathfrak{T}_{\Pi b}(f_1, \dots, f_m)(x) = [b_1, [b_2, \dots, [b_{m-1}, [b_m, T]_m]_{m-1}, \dots]_2]_1(f_1, \dots, f_m)(x). \quad (1.16)$$

为此还需要引进度量空间 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 上的正则有限平均振荡函数 (RBMO) 空间, 它是 John 和 Nirenberg 引入的经典的 BMO 空间的推广. Tolsa^[13] 引入了多项式增长条件下的 $\mathbb{R}^d$ 上的 RBMO 空间. 回顾一些记号, 给定 $\alpha, \beta > 1$, 球 $B \subset \mathcal{X}$ 称为 (α, β) 倍测球, 如果 $\mu(\alpha B) \leq \beta \mu(B)$. Hytönen^[17] 指出, 对于任意的 $\alpha \in (1, \infty)$, $\beta \in (C_\lambda^{\log_2 \alpha}, \infty)$ 以及任意的球 $B \subset \mathcal{X}$, 都存在某些 $j \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $\alpha^j B$ 是 (α, β) 倍测球. 下文中, 对固定的 $\rho \in [1, \infty)$, 倍测球 B 总是指 B 为 $(30\rho, \beta_{30\rho})$ 倍测球且

$$\beta_{30\rho} > \max\{(30\rho)^{3n}, C_\lambda^{3 \log_2(30\rho)}\}.$$

对任意的 $\rho \in [1, \infty)$ 和任意的 $B \subset \mathcal{X}$, 记 $\tilde{B}$ 为形如 $(30\rho)^j B$ 的最小 $(30\rho, \beta_{30\rho})$ 倍测球, 其中 $j \in \mathbb{Z}_+$.

对于两个球 $B \subset S \subset \mathcal{X}$, 记

$$K_{B,S} = 1 + \int_{2S \setminus B} \frac{1}{\lambda(x_B, d(x, x_B))} d\mu(x).$$

对于所有的球 $B \subset R \subset S$, 有 $K_{B,R} \leq K_{B,S}$. $K_{B,S}$ 由 Hytönen [17] 引入, 当 $(\mathcal{X}, d, \mu) = (\mathbb{R}^d, |\cdot|, \mu)$ 且测度 μ 如 (1.11) 所示时, $K_{B,S}$ 的类似定义可参见文献 [13].

下面还需要引入一个离散形式的 $\tilde{K}_{B,S}$ (参见文献 [18]), 对于任意两个球 $B \subset S$, 有

$$\tilde{K}_{B,S} := 1 + \sum_{k=1}^{N_{B,S}} \frac{\mu(6^k B)}{\lambda(x_B, 6^k r_B)},$$

其中 $N_{B,S}$ 是最小的正整数使得 $6^{N_{B,S}} r_B \geq r_S$, 显然有 $K_{B,S} \leq \tilde{K}_{B,S}$.

定义 1.3 [18] 记 $\eta > 1$ 且 b 为 μ 局部可积函数. 称 b 属于 $\text{RBMO}(\mu)$ 空间, 如果存在常数 $C_1 > 0$, 使得

$$\sup_B \frac{1}{\mu(\eta B)} \int_B |b(x) - m_{\tilde{B}}(b)| d\mu(x) \leq C_1, \quad (1.17)$$

以及对任意的 $(30\rho, \beta_{30\rho})$ 倍测球 B 和 S , 有

$$|m_B(b) - m_S(b)| \leq C_1 K_{B,S}. \quad (1.18)$$

记号 $m_B b = \frac{1}{\mu(B)} \int_B b(x) d\mu(x)$. 满足 (1.17) 和 (1.18) 中的 C_1 的最小值定义为 b 的 $\text{RBMO}(\mu)$ 范数, 并记作 $\|b\|_*$.

本文的主要定理如下.

定理 1.4 假定 $\mu(\mathcal{X}) = \infty$, 设 $\mathcal{K}(x, y_1, \dots, y_m)$ 是满足 (1.12)–(1.14) 的 Dini 型多线性 Calderón-Zygmund 核, $\mathfrak{T}$ 是由 (1.15) 所定义的多线性算子, 并假定算子 $\mathfrak{T}$ 满足 $L^1(\mu) \times \dots \times L^1(\mu) \rightarrow L^{1/m, \infty}(\mu)$ 端点弱性有界, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \text{RBMO}^m$, $\mathfrak{T}_{\Pi \mathbf{b}}$ 为 (1.16) 所定义的多线性交换子. $1/p = \sum_{i=1}^m 1/p_i$ 且 $1 < p, p_i < \infty$, $i = 1, \dots, m$. 若 ω 还满足

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} \left(1 + \left(\log \frac{1}{t} \right)^m \right) dt < \infty, \quad (1.19)$$

则存在常数 C 使得

$$\|\mathfrak{T}_{\Pi \mathbf{b}}(f_1, \dots, f_m)\|_{L^p(\mathcal{X})} \leq C \left(\prod_{j=1}^m \|b_j\|_* \right) \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathcal{X})}.$$

注 1.5 特别地, 若 $\omega(t) = t^\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) 时, 定理 1.4 将包含文献 [19] 中的结论. 注意到文献 [19] 中其控制函数 λ 需满足额外的条件, 即存在 $t \in (0, \infty)$ 使得对所有的 $x \in \mathcal{X}$ 和 $a, r \in (0, \infty)$ 都有 $\lambda(x, ar) = a^t \lambda(x, r)$. 而在本文的定理证明中, 不需要假设 λ 满足这额外的条件.

推论 1.6 假定 $\mu(\mathcal{X}) = \infty$, 设 $\mathcal{K}(x, y_1, \dots, y_m)$ 是满足 (1.12)–(1.14) 的 Dini 型多线性 Calderón-Zygmund 核, $\mathfrak{T}$ 是由 (1.15) 所定义的多线性算子, 并假定算子 $\mathfrak{T}$ 满足 $L^1(\mu) \times \dots \times L^1(\mu) \rightarrow L^{1/m, \infty}(\mu)$ 端点弱性有界, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \text{RBMO}^m$, 对于求和形式的多线性交换子,

$$\mathfrak{T}_{\Sigma \mathbf{b}}(f_1, \dots, f_m) = \sum_{j=1}^m \mathfrak{T}_{b_j}^j(f_1, \dots, f_m), \quad (1.20)$$

其中

$$\mathfrak{T}_{b_j}^j(f_1, \dots, f_m) = b_j \mathfrak{T}(f_1, \dots, f_j, \dots, f_m) - \mathfrak{T}(f_1, \dots, b_j f_j, \dots, f_m).$$

若 $1 < p, p_i < \infty, i = 1, \dots, m$, 且 $1/p = \sum_{i=1}^m 1/p_i$, ω 还满足

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} \left(1 + \log \frac{1}{t}\right) dt < \infty,$$

则存在常数 C 使得

$$\|\mathfrak{T}_{\Sigma b}(f_1, \dots, f_m)\|_{L^p(\mathcal{X})} \leq C \left(\max_{j=1, \dots, m} \|b_j\|_* \right) \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathcal{X})}.$$

事实上, 本文定理涵盖已有的相关工作, 且至少在下面两个方面同时作了推广完善, 其一是从 Euclid 空间推广到一类很一般的底空间 $(\mathcal{X}, d, \mu)$, 且测度 μ 不要求满足多项式增长性条件; 其二是经典 Calderón-Zygmund 算子的交换子推广到 Dini 型多线性 Calderón-Zygmund 算子的多线性迭代交换子. 在定理的证明中, 我们需要引进新办法克服新度量空间 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 及其上 RBMO 空间带来的困难, 以及 Dini 型多线性 Calderón-Zygmund 核带来的复杂. 下面给出本文常用的一些记号. 对于 $p \geq 1$, $p' = p/(p-1)$ 表示 p 的对偶指标. C 表示常数, 在不同式中可表示不同常数, $f \lesssim g$ 表示存在常数 C 使得 $f \leq Cg$. 对 Lebesgue 可测集 E 和 χ_E 分别表示 E 的 Lebesgue 测度和特征函数.

2 主要定理的证明

为方便起见, 证明时我们取 $m = 2$, 而 $m \geq 3$ 的情形可类似证明, 则多线性迭代交换子 $\mathfrak{T}_{\Pi b}$ 可简化为

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{\Pi b}(f_1, f_2)(x) &= b_1(x)b_2(x)\mathfrak{T}(f_1, f_2)(x) - b_1(x)\mathfrak{T}(f_1, b_2f_2)(x) \\ &\quad - b_2(x)\mathfrak{T}(b_1f_1, f_2)(x) + \mathfrak{T}(b_1f_1, b_2f_2)(x). \end{aligned} \quad (2.1)$$

同时我们也可如下定义 $[b_1, \mathfrak{T}]$ 和 $[b_2, \mathfrak{T}]$:

$$\begin{aligned} [b_1, \mathfrak{T}](f_1, f_2)(x) &= b_1(x)\mathfrak{T}(f_1, f_2)(x) - \mathfrak{T}(b_1f_1, f_2)(x), \\ [b_2, \mathfrak{T}](f_1, f_2)(x) &= b_2(x)\mathfrak{T}(f_1, f_2)(x) - \mathfrak{T}(f_1, b_2f_2)(x). \end{aligned}$$

我们需要引入与 $\tilde{K}_{B,S}$ 相关的极大函数 $\tilde{M}^\sharp$ (参见文献 [18]). 对于 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mu)$ 和 $x \in \mathcal{X}$, 令

$$\tilde{M}^\sharp f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu(6B)} \int_B |f(y) - m_{\tilde{B}}(f)| d\mu(y) + \sup_{(B,S) \in \Delta_x} \frac{|m_B f - m_S f|}{\tilde{K}_{B,S}}, \quad (2.2)$$

其中 $\Delta_x = \{(B, S) : x \in B \subset S \text{ 且 } B, S \text{ 为倍测球}\}$.

证明的基本想法是利用极大函数 $\tilde{M}^\sharp$ 的点态估计来获得定理的证明, 为此我们还需引入一些其他记号. 非中心倍测极大函数可如下定义:

$$Nf(x) = \sup_{B \ni x, B \text{ 为倍测球}} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y),$$

且其上确界取遍所有的 $(30\rho, \beta_{30\rho})$ 倍测球. 对于 $0 < \delta < 1$, 记

$$\tilde{M}_\delta^\sharp f(x) = \{\tilde{M}^\sharp(|f|^\delta)(x)\}^{1/\delta}, \quad N_\delta f(x) = \{N(|f|^\delta)(x)\}^{1/\delta}.$$

设 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mu)$, 利用 Lebesgue 微分引理易得, $|f(x)| \leq N_\delta f(x)$ 对于 $\mathcal{X}$ 中的 x 和 μ 几乎处处成立.

设 $p \in (1, \infty)$, $s, \tau \in (0, \infty)$, 对于 $f \in L^p(\mu)$, $x \in \mathcal{X}$, 有

$$M_{(\tau),s}f(x) = \sup_{B \ni x} \left\{ \frac{1}{\mu(\tau B)} \int_B |f(y)|^s d\mu(y) \right\}^{\frac{1}{s}},$$

$$M_{(\tau)}f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu(\tau B)} \int_B |f(y)| d\mu(y).$$

若 $s = 1$, 则 $M_{(\tau),s}$ 就是 $M_{(\tau)}$. Hytönen^[17] 指出, 对于 $\tau \geq 5$, $M_{(\tau),s}$ 和 $M_{(\tau)}$ 是 $L^p(\mu)$ ($1 < p < \infty$) 强有界的并且还是从 $L^1(\mu)$ 到 $L^{1,\infty}(\mu)$ 弱有界的.

引理 2.1^[20] 设 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mu)$, 且当 $\|\mu\| < \infty$ 时,

$$\int_{\mathcal{X}} f(x) d\mu(x) = 0.$$

假设对某些 $p \in (1, \infty)$ 和 $0 < \delta < 1$, 若 $\inf\{1, N_\delta f\} \in L^p(\mu)$, 则存在与 f 无关的常数 $C > 0$ 使得

$$\|N_\delta f\|_{L^p(\mu)} \leq C \|\widetilde{M}_\delta^\# f\|_{L^p(\mu)}. \quad (2.3)$$

引理 2.2 (John-Nirenberg 引理) 设 $1 \leq p < \infty$, $1 < \rho < \infty$, 则 $b \in \text{RBMO}(\mu)$ 当且仅当存在正常数 C 使得对任意的球 $B \subset \mathcal{X}$, 有

$$\left\{ \frac{1}{\mu(\rho B)} \int_B |b(x) - m_{\widehat{B}}(b)|^p d\mu(x) \right\}^{1/p} \leq C \|b\|_*, \quad (2.4)$$

以及对于任意两个倍测球 $B \subset S$, 有

$$|m_B(b) - m_S(b)| \leq CK_{B,S} \|b\|_* \quad (2.5)$$

成立.

引理 2.3^[15] 设 $\mathfrak{T}$ 是 Dini 型多线性 Calderón-Zygmund 算子, $\omega \in \text{Dini}(1)$. 假设 $1 < p, p_1, \dots, p_m < \infty$ 且有 $\sum_{i=1}^m 1/p_i = 1/p$. 若 $f_i \in L^{p_i}(\mu)$, 且当 $\|\mu\| < \infty$ 时有 $\int_{\mathcal{X}} \mathfrak{T}(f_1, \dots, f_m)(x) d\mu(x) = 0$, 则存在常数 C 使得

$$\|\mathfrak{T}(f_1, \dots, f_m)\|_{L^p(\mu)} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^{p_i}(\mu)}.$$

引理 2.4 设 $\mathfrak{T}_{\Pi b}$ 如 (2.1) 所定义, $0 < \delta < 1/2$, $1 < \tau < q$, $1 < p_1 < q_1$, $1 < p_2 < q_2$, $b_1, b_2 \in L^\infty(\mu)$, 则存在正常数 C 使得对所有的 $f_1, f_2 \in L_c^\infty(\mu)$, $x \in \mathcal{X}$ 以及任意包含 x 的球 B 都有

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_\delta^\# \mathfrak{T}_{\Pi b}(f_1, f_2)(x) &\leq C \{ \|b_1\|_* \|b_2\|_* M_{(30\rho),\tau}(\mathfrak{T}(f_1, f_2))(x) + \|b_1\|_* M_{(30\rho),\tau}([b_2, \mathfrak{T}](f_1, f_2))(x) \\ &\quad + \|b_2\|_* M_{(30\rho),\tau}([b_1, \mathfrak{T}](f_1, f_2))(x) + \|b_1\|_* \|b_2\|_* M_{(30\rho),p_1} f_1(x) M_{(30\rho),p_2} f_2(x) \\ &\quad + \|b_1\|_* M_{(30\rho),\tau}([b_2, \mathfrak{T}](f_1 \chi_{6B}, f_2 \chi_{6B}))(x) \\ &\quad + \|b_2\|_* M_{(30\rho),\tau}([b_1, \mathfrak{T}](f_1 \chi_{6B}, f_2 \chi_{6B}))(x) \\ &\quad + \|b_1\|_* \|b_2\|_* M_{(30\rho),\tau}(\mathfrak{T}(f_1 \chi_{6B}, f_2 \chi_{6B}))(x) \}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_\delta^\# [b_1, \mathfrak{T}](f_1, f_2)(x) &\leq C \{ \|b_1\|_* M_{(30\rho),\tau}(\mathfrak{T}(f_1, f_2))(x) + \|b_1\|_* M_{(30\rho),\tau}(\mathfrak{T}(f_1 \chi_{6B}, f_2 \chi_{6B}))(x) \\ &\quad + \|b_1\|_* M_{(30\rho),p_1} f_1(x) M_{(30\rho),p_2} f_2(x) \}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_\delta^\sharp[b_2, \mathfrak{T}](f_1, f_2)(x) &\leq C\{\|b_2\|_* M_{(30\rho), \tau}(\mathfrak{T}(f_1, f_2))(x) + \|b_2\|_* M_{(30\rho), \tau}(\mathfrak{T}(f_1 \chi_{6B}, f_2 \chi_{6B}))(x) \\ &\quad + \|b_2\|_* M_{(30\rho), p_1} f_1(x) M_{(30\rho), p_2} f_2(x)\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

证明 要证明 (2.6), 我们只需证明对任意的 $x \in \mathcal{X}$ 以及包含 x 的球 B 有

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |\mathfrak{T}_{\Pi b}(f_1, f_2)(z) - h_B|^\delta d\mu(z)\right)^{1/\delta} \\ &\lesssim \|b_1\|_* \|b_2\|_* M_{(30\rho), \tau}(\mathfrak{T}(f_1, f_2))(x) + \|b_1\|_* M_{(30\rho), \tau}([b_2, \mathfrak{T}](f_1, f_2))(x) \\ &\quad + \|b_2\|_* M_{(30\rho), \tau}([b_1, \mathfrak{T}](f_1, f_2))(x) + \|b_1\|_* \|b_2\|_* M_{(30\rho), p_1} f_1(x) M_{(30\rho), p_2} f_2(x); \end{aligned} \quad (2.9)$$

对于 $B \subset S$, 其中 S 是任意的 $(30\rho, \beta_{30\rho})$ 倍测球, 有

$$\begin{aligned} |h_B - h_S| &\leq C(1 + \widetilde{K}_{B,S})\{\|b_1\|_* \|b_2\|_* M_{(30\rho), \tau}(\mathfrak{T}(f_1, f_2))(x) + \|b_1\|_* M_{(30\rho), \tau}([b_2, \mathfrak{T}](f_1, f_2))(x) \\ &\quad + \|b_2\|_* M_{(30\rho), \tau}([b_1, \mathfrak{T}](f_1, f_2))(x) + \|b_1\|_* \|b_2\|_* M_{(30\rho), \tau}(T(f_1 \chi_{6B}, f_2 \chi_{6B}))(x) \\ &\quad + \|b_1\|_* M_{(30\rho), \tau}([b_2, \mathfrak{T}](f_1 \chi_{6B}, f_2 \chi_{6B}))(x) + \|b_2\|_* M_{(30\rho), \tau}([b_1, \mathfrak{T}](f_1 \chi_{6B}, f_2 \chi_{6B}))(x) \\ &\quad + \|b_1\|_* \|b_2\|_* M_{(30\rho), p_1} f_1(x) M_{(30\rho), p_2} f_2(x)\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

这里取 h_B 和 h_S 分别为

$$\begin{aligned} h_B &:= m_B[\mathfrak{T}((b_1 - m_{\widetilde{B}} b_1) f_1 \chi_{6B}, (b_2 - m_{\widetilde{B}} b_2) f_2 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6B}) \\ &\quad + \mathfrak{T}((b_1 - m_{\widetilde{B}} b_1) f_1 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6B}, (b_2 - m_{\widetilde{B}} b_2) f_2 \chi_{6B}) \\ &\quad + \mathfrak{T}((b_1 - m_{\widetilde{B}} b_1) f_1 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6B}, (b_2 - m_{\widetilde{B}} b_2) f_2 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6B})], \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} h_S &:= m_S[\mathfrak{T}((b_1 - m_S b_1) f_1 \chi_{6S}, (b_2 - m_S b_2) f_2 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6S}) \\ &\quad + \mathfrak{T}((b_1 - m_S b_1) f_1 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6S}, (b_2 - m_S b_2) f_2 \chi_{6S}) \\ &\quad + \mathfrak{T}((b_1 - m_S b_1) f_1 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6S}, (b_2 - m_S b_2) f_2 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6S})]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

我们先给出 (2.9) 和 (2.10) 的证明, 在此之后再解释如何利用 (2.9) 和 (2.10) 来推导出 (2.6). 首先证明 (2.9), 容易看出

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{\Pi b}(f_1, f_2)(z) &= \mathfrak{T}((b_1 - b_1(z)) f_1, (b_2 - b_2(z)) f_2)(z), \\ [b_1, \mathfrak{T}](f_1, f_2)(z) &= \mathfrak{T}((b_1(z) - b_1) f_1, f_2)(z), \\ [b_2, \mathfrak{T}](f_1, f_2)(z) &= \mathfrak{T}(f_1, (b_2(z) - b_2) f_2)(z), \end{aligned}$$

再结合

$$b_i(z) - b_i(y_i) = b_i(z) - m_{\widetilde{B}} b_i + m_{\widetilde{B}} b_i - b_i(y_i), \quad i = 1, 2,$$

可得

$$\begin{aligned} |\mathfrak{T}_{\Pi b}(f_1, f_2)(z) - h_B| &\leq |(b_1(z) - m_{\widetilde{B}} b_1)(b_2(z) - m_{\widetilde{B}} b_2) \mathfrak{T}(f_1, f_2)(z)| \\ &\quad + |(b_1(z) - m_{\widetilde{B}} b_1)[b_2, \mathfrak{T}](f_1, f_2)(z)| \\ &\quad + |(b_2(z) - m_{\widetilde{B}} b_2)[b_1, \mathfrak{T}](f_1, f_2)(z)| \\ &\quad + |\mathfrak{T}((b_1 - m_{\widetilde{B}} b_1) f_1, (b_2 - m_{\widetilde{B}} b_2) f_2)(z) - h_B|. \end{aligned}$$

因 $0 < \delta < 1/2$, 可得

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |\mathfrak{T}_{\Pi b}(f_1, f_2)(z) - h_B|^\delta d\mu(z) \right\}^{1/\delta} \\
 & \lesssim \left\{ \frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |(b_1(z) - m_{\bar{B}}b_1)(b_2(z) - m_{\bar{B}}b_2)\mathfrak{T}(f_1, f_2)(z)|^\delta d\mu(z) \right\}^{1/\delta} \\
 & \quad + \left\{ \frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |(b_1(z) - m_{\bar{B}}b_1)[b_2, \mathfrak{T}](f_1, f_2)(z)|^\delta d\mu(z) \right\}^{1/\delta} \\
 & \quad + \left\{ \frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |(b_2(z) - m_{\bar{B}}b_2)[b_1, \mathfrak{T}](f_1, f_2)(z)|^\delta d\mu(z) \right\}^{1/\delta} \\
 & \quad + \left\{ \frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |\mathfrak{T}((b_1 - m_{\bar{B}}b_1)f_1, (b_2 - m_{\bar{B}}b_2)f_2)(z) - h_B|^\delta d\mu(z) \right\}^{1/\delta} \\
 & =: I + II + III + IV.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

对于第一项 I , 设 $\tau_1, \tau_2 > 1$ 使得

$$\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\delta}.$$

利用 Hölder 不等式和引理 2.2 中 (2.4), 可得

$$\begin{aligned}
 I & \lesssim \left\{ \frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |b_1(z) - m_{\bar{B}}b_1|^{\tau_1} d\mu(z) \right\}^{1/\tau_1} \left\{ \frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |b_2(z) - m_{\bar{B}}b_2|^{\tau_2} d\mu(z) \right\}^{1/\tau_2} \\
 & \quad \times \left\{ \frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |\mathfrak{T}(f_1, f_2)(z)|^\tau d\mu(z) \right\}^{1/\tau} \\
 & \lesssim \|b_1\|_* \|b_2\|_* M_{(30\rho), \tau}(\mathfrak{T}(f_1, f_2))(x).
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

对于第二项 II , 设 $\gamma > 1$ 使得

$$\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\delta},$$

利用 Hölder 不等式和引理 2.2 中 (2.4), 同样可得

$$\begin{aligned}
 II & \lesssim \left\{ \frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |b_1(z) - m_{\bar{B}}b_1|^\gamma d\mu(z) \right\}^{1/\gamma} \left\{ \frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |[b_2, \mathfrak{T}](f_1, f_2)(z)|^\tau d\mu(z) \right\}^{1/\tau} \\
 & \lesssim \|b_1\|_* M_{(30\rho), \tau}([b_2, \mathfrak{T}](f_1, f_2))(x).
 \end{aligned}$$

类似于 II 的估计, 有

$$III \lesssim \|b_2\|_* M_{(30\rho), \tau}([b_1, \mathfrak{T}](f_1, f_2))(x).$$

对于第四项 IV , 为方便起见不妨记 $f_j^0 = f_j \chi_{6B}$, $f_j^\infty = f_j \chi_{\mathcal{X} \setminus 6B}$, 则有 $f_j = f_j^0 + f_j^\infty$, $j = 1, 2$. 进而有

$$\begin{aligned}
 & |\mathfrak{T}((b_1 - m_{\bar{B}}b_1)f_1, (b_2 - m_{\bar{B}}b_2)f_2)(z) - h_B| \\
 & \leq |\mathfrak{T}((b_1 - m_{\bar{B}}b_1)f_1^0, (b_2 - m_{\bar{B}}b_2)f_2^0)(z)| \\
 & \quad + |\mathfrak{T}((b_1 - m_{\bar{B}}b_1)f_1^0, (b_2 - m_{\bar{B}}b_2)f_2^\infty)(z) - m_B[\mathfrak{T}((b_1 - m_{\bar{B}}b_1)f_1^0, (b_2 - m_{\bar{B}}b_2)f_2^\infty)]|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + |\mathfrak{T}((b_1 - m_{\tilde{B}}b_1)f_1^\infty, (b_2 - m_{\tilde{B}}b_2)f_2^0)(z) - m_B[\mathfrak{T}((b_1 - m_{\tilde{B}}b_1)f_1^\infty, (b_2 - m_{\tilde{B}}b_2)f_2^0)]| \\
 & + |\mathfrak{T}((b_1 - m_{\tilde{B}}b_1)f_1^\infty, (b_2 - m_{\tilde{B}}b_2)f_2^\infty)(z) - m_B[\mathfrak{T}((b_1 - m_{\tilde{B}}b_1)f_1^\infty, (b_2 - m_{\tilde{B}}b_2)f_2^\infty)]| \\
 & =: IV_1(z) + IV_2(z) + IV_3(z) + IV_4(z).
 \end{aligned}$$

关于 $IV_1(z)$, 利用 Kolmogorov 不等式、Hölder 不等式和算子 $\mathfrak{T}$ 的有界性 (见引理 2.3), 可得

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B IV_1(z)^\delta d\mu(z) \right\}^{1/\delta} \\
 & \lesssim \|\mathfrak{T}((b_1 - m_{\tilde{B}}b_1)f_1^0, (b_2 - m_{\tilde{B}}b_2)f_2^0)\|_{L^{1/2, \infty}(6B, \frac{d\mu(z)}{\mu(30\rho B)})} \\
 & \lesssim \frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |b_1 - m_{\tilde{B}}b_1| |f_1(z)| d\mu(z) \frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |b_2 - m_{\tilde{B}}b_2| |f_2(z)| d\mu(z) \\
 & \lesssim \left(\frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |b_1 - m_{\tilde{B}}b_1|^{p'_1} d\mu(z) \right)^{1/p'_1} \left(\frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |f_1(z)|^{p_1} d\mu(z) \right)^{1/p_1} \\
 & \quad \times \left(\frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |b_2 - m_{\tilde{B}}b_2|^{p'_2} d\mu(z) \right)^{1/p'_2} \left(\frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |f_2(z)|^{p_2} d\mu(z) \right)^{1/p_2} \\
 & \lesssim \prod_{i=1}^2 \|b_i\|_* M_{(30\rho), p_i} f_i(x).
 \end{aligned}$$

对于 $IV_2(z)$, 注意到, 若 $z, y \in B$, $y_1 \in 6B$, $y_2 \in \mathcal{X} \setminus 6B$, 则有

$$Cd(z, y) \leq \max_{1 \leq j \leq m} d(z, y_j),$$

进一步可得下述估计:

$$\begin{aligned}
 & |\mathfrak{T}((b_1 - m_{\tilde{B}}b_1)f_1^0, (b_2 - m_{\tilde{B}}b_2)f_2^\infty)(z) - \mathfrak{T}((b_1 - m_{\tilde{B}}b_1)f_1^0, (b_2 - m_{\tilde{B}}b_2)f_2^\infty)(y)| \\
 & \lesssim \int_{\mathcal{X} \setminus 6B} \int_{6B} |\mathcal{K}(z, y_1, y_2) - \mathcal{K}(y, y_1, y_2)| \left| \prod_{i=1}^2 (b_i - m_{\tilde{B}}b_i) f_i(y_i) \right| d\mu(y_1) \mu(y_2) \\
 & \lesssim \int_{\mathcal{X} \setminus 6B} \int_{6B} \frac{1}{[\sum_{i=1}^2 \lambda(y, d(y, y_i))]^2} \omega\left(\frac{d(z, y)}{\sum_{i=1}^2 d(y, y_i)}\right) \left| \prod_{i=1}^2 (b_i - m_{\tilde{B}}b_i) f_i(y_i) \right| d\mu(y_1) \mu(y_2) \\
 & \lesssim \int_{6B} |(b_1(y_1) - m_{\tilde{B}}b_1)f(y_1)| \int_{\mathcal{X} \setminus 6B} \frac{|(b_2(y_2) - m_{\tilde{B}}b_2)f(y_2)|}{[\lambda(y, d(y, y_2))]^2} \omega\left(\frac{d(z, y)}{d(y, y_2)}\right) d\mu(y_1) \mu(y_2) \\
 & \lesssim \frac{1}{\lambda(y, d(y, y_1))} \int_{6B} |(b_1(y_1) - m_{\tilde{B}}b_1)f(y_1)| \int_{\mathcal{X} \setminus 6B} \frac{|(b_2(y_2) - m_{\tilde{B}}b_2)f(y_2)|}{\lambda(y, d(y, y_2))} \omega\left(\frac{d(z, y)}{d(y, y_2)}\right) d\mu(y_1) \mu(y_2) \\
 & \approx \frac{1}{\lambda(x_B, 6r_B)} \int_{6B} |(b_1(y_1) - m_{\tilde{B}}b_1)f(y_1)| d\mu(y_1) \\
 & \quad \times \sum_{k=1}^{\infty} \int_{6^{k+1}B \setminus 6^k B} \frac{|(b_2(y_2) - m_{\tilde{B}}b_2)f(y_2)|}{\lambda(y, d(y, y_2))} \omega\left(\frac{d(z, y)}{d(y, y_2)}\right) d\mu(y_2) \\
 & \lesssim \frac{\mu(30\rho B)}{\lambda(x_B, 6r_B)} \frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_{6B} |(b_1(y_1) - m_{\tilde{B}}b_1)f(y_1)| d\mu(y_1) \\
 & \quad \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(6^{-k})}{\lambda(x_B, 6^{k+1}r_B)} \int_{6^{k+1}B \setminus 6^k B} |(b_2(y_2) - m_{\tilde{B}}b_2)f(y_2)| d\mu(y_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_{6B} |(b_1(y_1) - m_{\tilde{B}} b_1) f(y_1)| d\mu(y_1) \sum_{k=1}^{\infty} \omega(6^{-k}) \frac{\mu(30\rho \times 6^{k+1} B)}{\lambda(x_B, 6^{k+1} r_B)} \\
&\quad \times \frac{1}{\mu(30\rho \times 6^{k+1} B)} \int_{6^{k+1} B} |(b_2(y_2) - m_{\tilde{B}} b_2) f(y_2)| d\mu(y_2) \\
&\lesssim \left(\frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |b_1(y_1) - m_{\tilde{B}} b_1|^{p'_1} d\mu(y_1) \right)^{1/p'_1} \left(\frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |f_1(y_1)|^{p_1} d\mu(y_1) \right)^{1/p_1} \\
&\quad \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(6^{-k})}{\mu(30\rho \times 6^{k+1} B)} \int_{6^{k+1} B} |(b_2(y_2) - m_{\tilde{B}} b_2) f(y_2)| d\mu(y_2) \\
&\lesssim \|b_1\|_* M_{(30\rho), p_1} f_1(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(6^{-k})}{\mu(30\rho \times 6^{k+1} B)} \left[\int_{6^{k+1} B} |(b_2(y_2) - m_{\widetilde{6^{k+1} B}} b_2) f(y_2)| d\mu(y_2) \right. \\
&\quad \left. + \int_{6^{k+1} B} |(m_{\widetilde{6^{k+1} B}} b_2 - m_{\tilde{B}} b_2) f(y_2)| d\mu(y_2) \right] \\
&\lesssim \|b_1\|_* M_{(30\rho), p_1} f_1(x) \sum_{k=1}^{\infty} \omega(6^{-k}) \left[\left(\frac{1}{\mu(30\rho \times 6^{k+1} B)} \int_{6^{k+1} B} |f_2(y_2)|^{p_2} d\mu(y_2) \right)^{1/p_2} \right. \\
&\quad \times \left(\frac{1}{\mu(30\rho \times 6^{k+1} B)} \int_{6^{k+1} B} |b_2(y_2) - m_{\widetilde{6^{k+1} B}} b_2|^{p'_2} d\mu(y_2) \right)^{1/p'_2} \\
&\quad \left. + \|b_2\|_* \frac{1}{\mu(30\rho \times 6^{k+1} B)} \int_{6^{k+1} B} |f_2(y_2)| d\mu(y_2) \right] \\
&\lesssim \|b_1\|_* M_{(30\rho), p_1} f_1(x) \sum_{k=1}^{\infty} \omega(6^{-k}) k \|b_2\|_* [M_{(30\rho), p_2} f_2(x) + M_{(30\rho)} f_2(x)] \\
&\lesssim \prod_{i=1}^2 \|b_i\|_* M_{(30\rho), p_i} f_i(x),
\end{aligned}$$

因

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega(6^{-k}) k < \sum_{k=1}^{\infty} \omega(6^{-k}) k^2 \approx \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} \left(1 + \left(\log \frac{1}{t} \right)^2 \right) dt < \infty.$$

$IV_3(z)$ 的估计与 $IV_2(z)$ 类似, 予以省略. 接下来估算 $IV_4(z)$, 注意到 $y, z \in B(x, r)$, 对任意的 $y_1, y_2 \in \mathcal{X} \setminus 6B$, 有

$$d(y, z) \leq \frac{1}{2} \max\{d(y, y_1), d(y, y_2)\},$$

利用核的光滑性条件 (1.13) 可得

$$\begin{aligned}
&|\mathfrak{T}((b_1 - m_{\tilde{B}} b_1) f_1^\infty, (b_2 - m_{\tilde{B}} b_2) f_2^\infty)(z) - \mathfrak{T}((b_1 - m_{\tilde{B}} b_1) f_1^\infty, (b_2 - m_{\tilde{B}} b_2) f_2^\infty)(y)| \\
&\lesssim \int_{\mathcal{X} \setminus 6B} \int_{\mathcal{X} \setminus 6B} |\mathcal{K}(z, y_1, y_2) - \mathcal{K}(y, y_1, y_2)| \left| \prod_{i=1}^2 (b_i(y_i) - m_{\tilde{B}} b_i) f_i(y_i) \right| d\mu(y_1) \mu(y_2) \\
&\lesssim \int_{\mathcal{X} \setminus 6B} \int_{\mathcal{X} \setminus 6B} \frac{1}{[\sum_{j=1}^2 \lambda(y, d(y, y_j))]^2} \omega\left(\frac{d(z, y)}{\sum_{i=1}^2 d(y, y_i)}\right) \left| \prod_{i=1}^2 (b_i(y_i) - m_{\tilde{B}} b_i) f_i(y_i) \right| d\mu(y_1) \mu(y_2) \\
&\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} \int_{6^{k+1} B \setminus 6^j B} |b_2(y_2) - m_{\tilde{B}} b_2| |f_2(y_2)| \int_{6^{j+1} B \setminus 6^j B} \frac{|b_1(y_1) - m_{\tilde{B}} b_1| |f_1(y_1)|}{[\lambda(y, d(y, y_1))]^2} \\
&\quad \times \omega\left(\frac{d(y, z)}{d(y, y_1)}\right) d\mu(y_1) d\mu(y_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \int_{6^{k+1}B \setminus 6^k B} \frac{|b_2(y_2) - m_{\tilde{B}} b_2| |f_2(y_2)|}{[\lambda(y, d(y, y_2))]^2} \omega\left(\frac{d(y, z)}{d(y, y_2)}\right) \\
 & \times \int_{6^{j+1}B \setminus 6^j B} |b_1(y_1) - m_{\tilde{B}} b_1| |f_1(y_1)| d\mu(y_1) d\mu(y_2) \\
 & =: IV_{41}(z) + IV_{42}(z).
 \end{aligned}$$

先估算 $IV_{41}(z)$,

$$IV_{41}(z) \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \int_{6^{k+1}B \setminus 6^k B} |b_2(y_2) - m_{\tilde{B}} b_2| |f_2(y_2)| \int_{6^k B} \frac{|b_1(y_1) - m_{\tilde{B}} b_1| |f_1(y_1)|}{[\lambda(y, d(y, y_1))]^2} \omega\left(\frac{d(x, z)}{d(y, y_1)}\right) d\mu(y_1) d\mu(y_2).$$

由于 $d(y, z) < r$, $6^k r < d(x, y_1) < 6^{k+1} r$, 因而, $\frac{d(y, z)}{d(y, y_1)} < 6^{-k}$, 进一步有

$$\begin{aligned}
 IV_{41}(z) & \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \int_{6^{k+1}B \setminus 6^k B} |b_2(y_2) - m_{\tilde{B}} b_2| |f_2(y_2)| \int_{6^k B} \frac{|b_1(y_1) - m_{\tilde{B}} b_1| |f_1(y_1)|}{[\lambda(y, d(y, y_1))]^2} \omega(6^{-k}) d\mu(y_1) d\mu(y_2) \\
 & \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \omega(6^{-k}) \frac{[\mu(30\rho \times 6^{k+1}B)]^2}{[\lambda(x_B, d(x_B, 6^{k+1}r_B))]^2} \frac{1}{[\mu(30\rho \times 6^{k+1}B)]^2} \int_{6^{k+1}B} |b_2(y_2) - m_{\tilde{B}} b_2| \\
 & \quad \times |f_2(y_2)| \int_{6^{k+1}B} |b_1(y_1) - m_{\tilde{B}} b_1| |f_1(y_1)| d\mu(y_1) d\mu(y_2) \\
 & \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \omega(6^{-k}) \frac{1}{[\mu(30\rho \times 6^{k+1}B)]^2} \prod_{i=1}^2 \left[\int_{6^{k+1}B} |(b_i(y_i) - m_{\widetilde{6^{k+1}B}} b_i) f(y_i)| d\mu(y_i) \right. \\
 & \quad \left. + \int_{6^{k+1}B} |(m_{\widetilde{6^{k+1}B}} b_i - m_{\tilde{B}} b_i) f(y_i)| d\mu(y_i) \right] \\
 & \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \omega(6^{-k}) \prod_{i=1}^2 \left[\left(\frac{1}{\mu(30\rho \times 6^{k+1}B)} \int_{6^{k+1}B} |f_i(y_i)|^{p_i} d\mu(y_i) \right)^{1/p_i} \right. \\
 & \quad \times \left(\frac{1}{\mu(30\rho \times 6^{k+1}B)} \int_{6^{k+1}B} |b_i(y_i) - m_{\widetilde{6^{k+1}B}} b_i|^{p'_i} d\mu(y_i) \right)^{1/p'_i} \\
 & \quad \left. + \|b_i\|_* \frac{1}{\mu(30\rho \times 6^{k+1}B)} \int_{6^{k+1}B} |f_i(y_i)| d\mu(y_i) \right] \\
 & \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \omega(6^{-k}) k^2 \prod_{i=1}^2 [M_{(30\rho), p_i} f_i(x) + M_{(30\rho)} f_i(x)] \|b_i\|_* \\
 & \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \omega(6^{-k}) k^2 \prod_{i=1}^2 \|b_i\|_* M_{(30\rho), p_i} f_i(x),
 \end{aligned}$$

注意到 $\sum_{k=1}^{\infty} \omega(6^{-k}) k^2 \approx \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} (1 + (\log \frac{1}{t})^2) dt < \infty$, 因而有

$$IV_{41}(z) \lesssim \prod_{i=1}^2 \|b_i\|_* M_{(30\rho), p_i} f_i(x).$$

对于 $IV_{42}(z)$, 交换积分次序可得

$$IV_{42}(z) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{6^{k+1}B \setminus 6^k B} \frac{|b_2(y_2) - m_{\tilde{B}} b_2| |f_2(y_2)|}{[\lambda(y, d(y, y_2))]^2} \omega\left(\frac{d(y, z)}{d(y, y_2)}\right) d\mu(y_2)$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{j=1}^{k-1} \int_{6^{j+1}B \setminus 6^j B} |b_1(y_1) - m_{\tilde{B}} b_1| |f_1(y_1)| d\mu(y_1) \\
& \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\lambda(x_B, 6^{k+1}r_B)]^2} \int_{6^{k+1}B \setminus 6^k B} |b_2(y_2) - m_{\tilde{B}} b_2| |f_2(y_2)| \omega(6^{-k}) d\mu(y_2) \\
& \quad \times \int_{6^{k+1}B} |b_1(y_1) - m_{\tilde{B}} b_1| |f_1(y_1)| d\mu(y_1) \\
& \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \omega(6^{-k}) \frac{[\mu(30\rho \times 6^{k+1}B)]^2}{[\lambda(x_B, d(x_B, 6^{k+1}r_B))]^2} \frac{1}{[\mu(30\rho \times 6^{k+1}B)]^2} \\
& \quad \times \prod_{i=1}^2 \int_{6^{k+1}B} |b_i(y_i) - m_{\tilde{B}} b_i| |f_i(y_i)| d\mu(y_i) \\
& \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \omega(6^{-k}) k^2 \prod_{i=1}^2 [M_{(30\rho), p_i} f_i(x) + M_{(30\rho)} f_i(x)] \|b_i\|_*.
\end{aligned}$$

结合 IV_{41} 和 IV_{42} 的估计得

$$IV_4 \lesssim \prod_{i=1}^2 \|b_i\|_* M_{(30\rho), p_i} f_i(x).$$

根据 $IV_1(z)$ 、 $IV_2(z)$ 、 $IV_3(z)$ 和 $IV_4(z)$ 的估计得

$$IV \lesssim \prod_{i=1}^2 \|b_i\|_* M_{(30\rho), p_i} f_i(x).$$

再由 I 、 II 、 III 和 IV 的结论可得 (2.9).

现在估计 (2.10),

$$\begin{aligned}
|h_B - h_S| &= |m_B [\Im((b_1 - m_{\tilde{B}} b_1) f_1 \chi_{6B}, (b_2 - m_{\tilde{B}} b_2) f_2 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6B}) \\
&\quad + \Im((b_1 - m_{\tilde{B}} b_1) f_1 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6B}, (b_2 - m_{\tilde{B}} b_2) f_2 \chi_{6B}) \\
&\quad + \Im((b_1 - m_{\tilde{B}} b_1) f_1 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6B}, (b_2 - m_{\tilde{B}} b_2) f_2 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6S}) \\
&\quad - m_S [\Im((b_1 - m_S b_1) f_1 \chi_{6S}, (b_2 - m_S b_2) f_2 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6S}) \\
&\quad + \Im((b_1 - m_S b_1) f_1 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6S}, (b_2 - m_S b_2) f_2 \chi_{6S}) \\
&\quad + \Im((b_1 - m_S b_1) f_1 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6S}, (b_2 - m_S b_2) f_2 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6B})] \\
&\leq |m_B [\Im((b_1 - m_S b_1) f_1 \chi_{6B}, (b_2 - m_S b_2) f_2 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6B}) \\
&\quad + \Im((b_1 - m_S b_1) f_1 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6B}, (b_2 - m_S b_2) f_2 \chi_{6B}) \\
&\quad + \Im((b_1 - m_S b_1) f_1 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6B}, (b_2 - m_S b_2) f_2 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6S}) \\
&\quad - m_S [\Im((b_1 - m_S b_1) f_1 \chi_{6S}, (b_2 - m_S b_2) f_2 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6S}) \\
&\quad + \Im((b_1 - m_S b_1) f_1 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6S}, (b_2 - m_S b_2) f_2 \chi_{6S}) \\
&\quad + \Im((b_1 - m_S b_1) f_1 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6S}, (b_2 - m_S b_2) f_2 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6B})] \\
&\quad + |m_B [\Im((b_1 - m_{\tilde{B}} b_1) f_1 \chi_{6B}, (b_2 - m_{\tilde{B}} b_2) f_2 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6B}) \\
&\quad + \Im((b_1 - m_{\tilde{B}} b_1) f_1 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6B}, (b_2 - m_{\tilde{B}} b_2) f_2 \chi_{6B})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mathfrak{T}((b_1 - m_{\tilde{B}}b_1)f_1\chi_{\mathcal{X}\setminus 6B}, (b_2 - m_{\tilde{B}}b_2)f_2\chi_{\mathcal{X}\setminus 6B})) \\
 & - m_B[\mathfrak{T}((b_1 - m_Sb_1)f_1\chi_{6B}, (b_2 - m_Sb_2)f_2\chi_{\mathcal{X}\setminus 6B}) \\
 & + \mathfrak{T}((b_1 - m_Sb_1)f_1\chi_{\mathcal{X}\setminus 6B}, (b_2 - m_Sb_2)f_2\chi_{6B}) \\
 & + \mathfrak{T}((b_1 - m_Sb_1)f_1\chi_{\mathcal{X}\setminus 6B}, (b_2 - m_Sb_2)f_2\chi_{\mathcal{X}\setminus 6B}))] \\
 & =: \mathcal{E} + \mathcal{F}.
 \end{aligned}$$

先计算第一项 $\mathcal{E}$, 对任意的球 $B \subset S$, S 是 $(30\rho, \beta_{30\rho})$ 倍测球, $x \in B$. 由于 S 是倍测球, 因此 $S = \tilde{S}$. 记使得 $6S \subset (30\rho)^N B$ 的最小正整数 N 为 N_1 . 设 $f_i^0 = f_i\chi_{6B}$, $f_i^{N_1} = f_i\chi_{(30\rho)^{N_1}B}$, $f_i^{B_{N_1}} = f_i\chi_{(30\rho)^{N_1}B \setminus 6B}$, $f_i^\infty = f_i\chi_{\mathcal{X} \setminus (30\rho)^{N_1}B}$, $f_i^S = f_i\chi_{6S}$ 和 $f_i^{S_{N_1}} = f_i\chi_{(30\rho)^{N_1}B \setminus 6S}$, 进而有

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{E}| & \leq |m_B(\mathfrak{T}((b_1 - m_Sb_1)f_1^{B_{N_1}}, (b_2 - m_Sb_2)f_2^0))| + |m_B(\mathfrak{T}((b_1 - m_Sb_1)f_1^0, (b_2 - m_Sb_2)f_2^{B_{N_1}}))| \\
 & + |m_B(\mathfrak{T}((b_1 - m_Sb_1)f_1^{B_{N_1}}, (b_2 - m_Sb_2)f_2^{B_{N_1}}))| + |m_B(\mathfrak{T}((b_1 - m_Sb_1)f_1^\infty, (b_2 - m_Sb_2)f_2^\infty))| \\
 & - m_S(\mathfrak{T}((b_1 - m_Sb_1)f_1^\infty, (b_2 - m_Sb_2)f_2^\infty))| + |m_B(\mathfrak{T}((b_1 - m_Sb_1)f_1^\infty, (b_2 - m_Sb_2)f_2^{N_1}))| \\
 & - m_S(\mathfrak{T}((b_1 - m_Sb_1)f_1^\infty, (b_2 - m_Sb_2)f_2^{N_1}))| + |m_B(\mathfrak{T}((b_1 - m_Sb_1)f_1^{N_1}, (b_2 - m_Sb_2)f_2^\infty))| \\
 & - m_S(\mathfrak{T}((b_1 - m_Sb_1)f_1^{N_1}, (b_2 - m_Sb_2)f_2^\infty))| + |m_S(\mathfrak{T}((b_1 - m_Sb_1)f_1^S, (b_2 - m_Sb_2)f_2^{S_{N_1}}))| \\
 & + |m_S(\mathfrak{T}((b_1 - m_Sb_1)f_1^{S_{N_1}}, (b_2 - m_Sb_2)f_2^S))| + |m_S(\mathfrak{T}((b_1 - m_Sb_1)f_1^{S_{N_1}}, (b_2 - m_Sb_2)f_2^{S_{N_1}}))| \\
 & =: \sum_{i=1}^9 \mathcal{E}_i.
 \end{aligned}$$

首先, 对于第一项 $\mathcal{E}_1$, 我们处理 $\mathfrak{T}((b_1 - m_Sb_1)f_1^{B_{N_1}}, (b_2 - m_Sb_2)f_2^0)$, 对任意的 $y \in B$, 利用核 K 的尺寸条件 (1.12) 得

$$\begin{aligned}
 & |\mathfrak{T}((b_1 - m_Sb_1)f_1^{B_{N_1}}, (b_2 - m_Sb_2)f_2^0)(y)| \\
 & \lesssim \int_{(30\rho)^{N_1}B \setminus 6B} \int_{6B} \frac{|(b_1 - m_Sb_1)f_1(y_1)| |(b_2 - m_Sb_2)f_2(y_2)|}{[\sum_{i=1}^2 \lambda(y, d(y, y_i))]^2} d\mu(y_2) d\mu(y_1) \\
 & \lesssim \left[\sum_{k=1}^{N_1-1} \int_{(30\rho)^{k+1}B \setminus (30\rho)^kB} \frac{|(b_1 - m_Sb_1)f_1(y_1)|}{\lambda(y, d(y, y_1))} d\mu(y_1) + \int_{30\rho B \setminus 6B} \frac{|(b_1 - m_Sb_1)f_1(y_1)|}{\lambda(y, d(y, y_1))} d\mu(y_1) \right] \\
 & \quad \times \int_{6B} \frac{|(b_2 - m_Sb_2)f_2(y_2)|}{\lambda(y, d(y, y_2))} d\mu(y_2) \\
 & \lesssim \left[\sum_{k=1}^{N_1-1} \frac{\mu(5\rho \times (30\rho)^{k+1}B)}{\lambda(x_B, (30\rho)^{k+1}r_B)} \frac{1}{\mu(5\rho \times (30\rho)^{k+1}B)} \int_{(30\rho)^{k+1}B} |(b_1 - m_Sb_1)f_1(y_1)| d\mu(y_1) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\mu(5\rho \times (30\rho)B)}{\lambda(x_B, (30\rho)r_B)} \frac{1}{\mu(5\rho \times (30\rho)B)} \int_{(30\rho)B} |(b_1 - m_Sb_1)f_1(y_1)| d\mu(y_1) \right] \\
 & \quad \times \frac{\mu(5\rho \times 6B)}{\lambda(x_B, 6r_B)} \frac{1}{\mu(5\rho \times 6B)} \int_{6B} |(b_2 - m_Sb_2)f_2(y_2)| d\mu(y_2) \\
 & \lesssim (1 + \tilde{K}_{B,S}) \prod_{i=1}^2 \|b_i\|_* M_{(30\rho), p_i} f_i(x).
 \end{aligned}$$

因而有

$$\mathcal{E}_1 \lesssim (1 + \tilde{K}_{B,S}) \prod_{i=1}^2 \|b_i\|_* M_{(30\rho), p_i} f_i(x).$$

利用类似于处理 $\mathcal{E}_1$ 的方法, 可得

$$\mathcal{E}_2 \lesssim (1 + \tilde{K}_{B,S}) \prod_{i=1}^2 \|b_i\|_* M_{(30\rho), p_i} f_i(x), \quad \mathcal{E}_7 + \mathcal{E}_8 \lesssim (1 + \tilde{K}_{B,S}) \prod_{i=1}^2 \|b_i\|_* M_{(30\rho), p_i} f_i(x).$$

另一方面, 我们考虑 $\mathcal{E}_3$ 的估计. 对所有的 $y \in B$, 根据核 K 的尺寸条件 (1.12) 知,

$$\begin{aligned} & |\Im((b_1 - m_S b_1) f_1^{B_{N_1}}, (b_2 - m_S b_2) f_2^{B_{N_1}})(y)| \\ & \lesssim \int_{(30\rho)^{N_1} B \setminus 6B} \int_{(30\rho)^{N_1} B \setminus 6B} \frac{|(b_1 - m_S b_1) f_1(y_1)| |(b_2 - m_S b_2) f_2(y_2)|}{[\sum_{i=1}^2 \lambda(y, d(y, y_i))]^2} d\mu(y_1) d\mu(y_2) \\ & \lesssim \int_{30\rho B \setminus 6B} \int_{30\rho B \setminus 6B} \frac{|(b_1 - m_S b_1) f_1(y_1)| |(b_2 - m_S b_2) f_2(y_2)|}{[\sum_{i=1}^2 \lambda(y, d(y, y_i))]^2} d\mu(y_1) d\mu(y_2) \\ & \quad + \sum_{k=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_1-1} \int_{(30\rho)^{k+1} B \setminus (30\rho)^k B} \int_{(30\rho)^{j+1} B \setminus (30\rho)^j B} \frac{|(b_1 - m_S b_1) f_1(y_1)|}{[\sum_{i=1}^2 \lambda(y, d(y, y_i))]^2} \\ & \quad \times |(b_2 - m_S b_2) f_2(y_2)| d\mu(y_1) d\mu(y_2) \\ & =: \mathcal{E}_{31} + \mathcal{E}_{32}. \end{aligned}$$

注意到 $y_1, y_2 \in 30\rho B \setminus 6B$, 显然有 $d(y, y_i) \geq 5r_B$ ($i = 1, 2$). 由定义 1.2 中关于 λ 的性质得

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{31} & \lesssim \left[\frac{\mu((5\rho \times 30\rho)B)}{\lambda(x_B, 5r_B)} \right]^2 \frac{1}{[\mu((5\rho \times 30\rho)B)]^2} \prod_{i=1}^2 \int_{30\rho B} |(b_i - m_S b_i) f_i(y_i)| d\mu(y_i) \\ & \lesssim \frac{1}{[\mu(5\rho \times 30\rho B)]^2} \prod_{i=1}^2 \left[\int_{30\rho B} |(b_i(y_i) - m_{\widetilde{30\rho B}} b_i) f_i(y_i)| d\mu(y_i) \right. \\ & \quad \left. + \int_{30\rho B} |(m_{\widetilde{30\rho B}} b_i - m_S b_i) f_i(y_i)| d\mu(y_i) \right] \\ & \lesssim \prod_{i=1}^2 \|b_i\|_* M_{(30\rho), p_i} f_i(x). \end{aligned}$$

此时, 我们可借助于处理 IV_4 的方法来得到 $\mathcal{E}_{32} \lesssim \prod_{i=1}^2 \|b_i\|_* M_{(30\rho), p_i} f_i(x)$. 结合 $\mathcal{E}_{31}$ 和 $\mathcal{E}_{32}$ 的估计就有 $\mathcal{E}_3 \lesssim \prod_{i=1}^2 \|b_i\|_* M_{(30\rho), p_i} f_i(x)$. 类似地, $\mathcal{E}_9 \lesssim (1 + \tilde{K}_{B,S}) \prod_{i=1}^2 \|b_i\|_* M_{(30\rho), p_i} f_i(x)$. 对于 $\mathcal{E}_4, \mathcal{E}_5$ 和 $\mathcal{E}_6$, 这三项涉及核 K 的光滑性条件 (1.13), 与处理 IV_4 的方法类似, 可得 $\mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_5 + \mathcal{E}_6 \lesssim \prod_{i=1}^2 \|b_i\|_* M_{(30\rho), p_i} f_i(x)$. 综合上述 $\mathcal{E}_i$ ($i \in \{1, \dots, 9\}$) 的估计, 可以得到 $\mathcal{E} \lesssim (1 + \tilde{K}_{B,S}) \prod_{i=1}^2 \|b_i\|_* M_{(30\rho), p_i} f_i(x)$.

对于 $\mathcal{F}$, 注意到对于任意的球 B , 有

$$\Im(f_1, f_2) = \Im(f_1 \chi_{6B}, f_2 \chi_{6B}) + \Im(f_1 \chi_{6B}, f_2 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6B}) + \Im(f_1 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6B}, f_2 \chi_{6B}) + \Im(f_1 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6B}, f_2 \chi_{\mathcal{X} \setminus 6B}).$$

从而得到

$$\begin{aligned} \mathcal{F} & \leq |m_B \{ [\Im((b_1 - m_{\tilde{B}} b_1) f_1, (b_2 - m_{\tilde{B}} b_2) f_2) - \Im((b_1 - m_{\tilde{B}} b_1) f_1 \chi_{6B}, (b_2 - m_{\tilde{B}} b_2) f_2 \chi_{6B})] \\ & \quad - [\Im((b_1 - m_S b_1) f_1, (b_2 - m_S b_2) f_2) - \Im((b_1 - m_S b_1) f_1 \chi_{6B}, (b_2 - m_S b_2) f_2 \chi_{6B})] \}| \\ & \leq m_B |[\Im((b_1 - m_{\tilde{B}} b_1) f_1, (b_2 - m_{\tilde{B}} b_2) f_2) - \Im((b_1 - m_S b_1) f_1, (b_2 - m_S b_2) f_2)]| \\ & \quad + m_B |[\Im((b_1 - m_{\tilde{B}} b_1) f_1 \chi_{6B}, (b_2 - m_{\tilde{B}} b_2) f_2 \chi_{6B}) - \Im((b_1 - m_S b_1) f_1 \chi_{6B}, (b_2 - m_S b_2) f_2 \chi_{6B})]| \end{aligned}$$

$$=: \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2.$$

我们先对 $\mathcal{F}_1$ 进行估算. 注意到对于任意的球 Q , 有

$$\begin{aligned} & \mathfrak{T}((b_1 - m_Q b_1)f_1, (b_2 - m_Q b_2)f_2) \\ &= \mathfrak{T}((b_1 - b_1(z) + b_1(z) - m_Q b_1)f_1, (b_2 - b_2(z) + b_2(z) - m_Q b_2)f_2) \\ &= (b_1(z) - m_Q b_1)(b_2(z) - m_Q b_2)\mathfrak{T}(f_1, f_2) - (b_1(z) - m_Q b_1)[b_2, \mathfrak{T}](f_1, f_2) \\ &\quad - (b_2(z) - m_Q b_2)[b_1, \mathfrak{T}](f_1, f_2) + \mathfrak{T}_{\Pi b}(f_1, f_2), \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &\leq m_B |(b_1(z) - m_{\tilde{B}} b_1)(b_2(z) - m_{\tilde{B}} b_2)\mathfrak{T}(f_1, f_2)| + m_B |(b_1(z) - m_S b_1)(b_2(z) - m_S b_2)\mathfrak{T}(f_1, f_2)| \\ &\quad + m_B |(b_1(z) - m_{\tilde{B}} b_1)[b_2, \mathfrak{T}](f_1, f_2)| + m_B |(b_1(z) - m_S b_1)[b_2, \mathfrak{T}](f_1, f_2)| \\ &\quad + m_B |(b_2(z) - m_{\tilde{B}} b_2)[b_1, \mathfrak{T}](f_1, f_2)| + m_B |(b_2(z) - m_S b_2)[b_1, \mathfrak{T}](f_1, f_2)| \\ &=: \sum_{i=1}^6 \mathcal{F}_{1i}. \end{aligned}$$

类似于 (2.14) 的估计, 利用 Hölder 不等式和 John-Nirenberg 引理, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{11} + \mathcal{F}_{12} &\lesssim \|b_1\|_* \|b_2\|_* M_{(30\rho), \tau}(\mathfrak{T}(f_1, f_2))(x), \\ \mathcal{F}_{13} + \mathcal{F}_{14} &\lesssim \|b_1\|_* M_{(30\rho), \tau}([b_2, \mathfrak{T}](f_1, f_2))(x), \\ \mathcal{F}_{15} + \mathcal{F}_{16} &\lesssim \|b_2\|_* M_{(30\rho), \tau}([b_1, \mathfrak{T}](f_1, f_2))(x), \end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &\lesssim \|b_1\|_* \|b_2\|_* M_{(30\rho), \tau}(\mathfrak{T}(f_1, f_2))(x) + \|b_1\|_* M_{(30\rho), \tau}([b_2, \mathfrak{T}](f_1, f_2))(x) \\ &\quad + \|b_2\|_* M_{(30\rho), \tau}([b_1, \mathfrak{T}](f_1, f_2))(x). \end{aligned}$$

类似地有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 &\lesssim \|b_1\|_* \|b_2\|_* M_{(30\rho), \tau}(T(f_1 \chi_{6B}, f_2 \chi_{6B}))(x) + \|b_1\|_* M_{(30\rho), \tau}([b_2, \mathfrak{T}](f_1 \chi_{6B}, f_2 \chi_{6B}))(x) \\ &\quad + \|b_2\|_* M_{(30\rho), \tau}([b_1, \mathfrak{T}](f_1 \chi_{6B}, f_2 \chi_{6B}))(x). \end{aligned}$$

结合 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 的估计, 易得 (2.10). 同理可得 (2.7) 和 (2.8).

最后, 我们解释如何利用 (2.9) 和 (2.10) 来得到 (2.6). 对于任意的球 $B \ni x$, 根据 $\widetilde{M}^\sharp$ 定义知,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |\mathfrak{T}_{\Pi b}(\vec{f})|^\delta - m_{\tilde{B}}(|\mathfrak{T}_{\Pi b}(\vec{f})|^\delta) d\mu(y) \right)^{\frac{1}{\delta}} \\ & \lesssim \left(\frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |\mathfrak{T}_{\Pi b}(\vec{f})|^\delta - |h_B|^\delta d\mu \right)^{\frac{1}{\delta}} + \left(\frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |h_B|^\delta - |h_{\tilde{B}}|^\delta d\mu \right)^{\frac{1}{\delta}} \\ & \quad + \left(\frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |h_{\tilde{B}}|^\delta - m_{\tilde{B}}(|\mathfrak{T}_{\Pi b}(\vec{f})|^\delta) d\mu \right)^{\frac{1}{\delta}} \\ & \lesssim \left(\frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |\mathfrak{T}_{\Pi b}(\vec{f}) - h_B|^\delta d\mu \right)^{\frac{1}{\delta}} + \left(\frac{1}{\mu(30\rho B)} \int_B |h_B - h_{\tilde{B}}|^\delta d\mu \right)^{\frac{1}{\delta}} \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\mu(B)}{\mu(30\rho B)} \right)^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{1}{\mu(\tilde{B})} \int_{\tilde{B}} |\mathfrak{T}_{\Pi b}(\vec{f}) - h_{\tilde{B}}|^{\delta} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{\delta}},$$

以及对于所有的倍测球 $B \subset S$, $B \ni x$, 有

$$\begin{aligned} & |m_B(|\mathfrak{T}_{\Pi b}(\vec{f})|^{\delta}) - m_S(|\mathfrak{T}_{\Pi b}(\vec{f})|^{\delta})|^{\frac{1}{\delta}} \\ & \lesssim |m_B(|\mathfrak{T}_{\Pi b}(\vec{f})|^{\delta}) - |h_B|^{\delta}|^{\frac{1}{\delta}} + ||h_S|^{\delta} - m_S(|\mathfrak{T}_{\Pi b}(\vec{f})|^{\delta})|^{\frac{1}{\delta}} + ||h_B|^{\delta} - |h_S|^{\delta}|^{\frac{1}{\delta}} \\ & \lesssim \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B ||\mathfrak{T}_{\Pi b}(\vec{f})|^{\delta} - |h_B|^{\delta}| d\mu \right)^{\frac{1}{\delta}} + \left(\frac{1}{\mu(S)} \int_S ||h_S|^{\delta} - |\mathfrak{T}_{\Pi b}(\vec{f})|^{\delta}| d\mu \right)^{\frac{1}{\delta}} + |h_B - h_S| \\ & \lesssim \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |\mathfrak{T}_{\Pi b}(\vec{f}) - h_B|^{\delta} d\mu \right)^{\frac{1}{\delta}} + \left(\frac{1}{\mu(S)} \int_S |h_S - \mathfrak{T}_{\Pi b}(\vec{f})|^{\delta} d\mu \right)^{\frac{1}{\delta}} + |h_B - h_S|. \end{aligned}$$

因 (2.9) 和 (2.10) 已被证得, 所以 (2.6) 自然成立. $\square$

定理 1.4 的证明 由引理 2.1、引理 2.4 中 (2.7)、引理 2.3 和极大函数 $M_{(\tau),s}$ 的有界性得

$$\begin{aligned} \|[b_1, \mathfrak{T}](f_1, f_2)\|_{L^p(\mu)} & \lesssim \|N_{\delta}[b_1, \mathfrak{T}](f_1, f_2)\|_{L^p(\mu)} \lesssim \|\widetilde{M}_{\delta}^{\sharp}[b_1, \mathfrak{T}](f_1, f_2)\|_{L^p(\mu)} \\ & \lesssim \|b_1\|_* \|M_{(30\rho),\tau}(\mathfrak{T}(f_1, f_2))\|_{L^p(\mu)} + \|b_1\|_* \|M_{(30\rho),\tau}(\mathfrak{T}(f_1 \chi_{6B}, f_2 \chi_{6B}))\|_{L^p(\mu)} \\ & \quad + \|b_1\|_* \|M_{(30\rho),p_1} f_1 M_{(30\rho),p_2} f_2\|_{L^p(\mu)} \\ & \lesssim \|b_1\|_* \|\mathfrak{T}(f_1, f_2)\|_{L^p(\mu)} + \|b_1\|_* \|\mathfrak{T}(f_1 \chi_{6B}, f_2 \chi_{6B})\|_{L^p(\mu)} \\ & \quad + \|b_1\|_* \|M_{(30\rho),p_1} f_1\|_{L^{p_1}(\mu)} \|M_{(30\rho),p_2} f_2\|_{L^{p_2}(\mu)} \\ & \lesssim \|b_1\|_* \|f_1\|_{L^{p_1}(\mu)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\mu)} + \|b_1\|_* \|f_1 \chi_{6B}\|_{L^{p_1}(\mu)} \|f_2 \chi_{6B}\|_{L^{p_2}(\mu)} \\ & \lesssim \|b_1\|_* \|f_1\|_{L^{p_1}(\mu)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\mu)}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

同理有

$$\|[b_2, \mathfrak{T}](f_1, f_2)\|_{L^p(\mu)} \lesssim \|b_2\|_* \|f_1\|_{L^{p_1}(\mu)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\mu)}. \quad (2.16)$$

类似地, 利用 (2.15) 和 (2.16) 以及引理 2.4 中 (2.6) 可得

$$\|\mathfrak{T}_{\Pi b}(f_1, f_2)\|_{L^p(\mu)} \lesssim \|b_1\|_* \|b_2\|_* \|f_1\|_{L^{p_1}(\mu)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\mu)}.$$

证毕. $\square$

推论 1.6 的证明也可类似地给出.

致谢 感谢审稿人所给予的宝贵意见.

参考文献

- 1 Coifman R R, Rochberg R, Weiss G. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables. *Ann of Math* (2), 1976, 103: 611–635
- 2 Grafakos L, Torres R H. Multilinear Calderón-Zygmund theory. *Adv Math*, 2002, 165: 124–164
- 3 Pérez C, Torres R H. Sharp maximal function estimates for multilinear singular integrals. *Contemp Math*, 2003, 320: 323–331
- 4 Lerner A K, Ombrosi S, Pérez C, et al. New maximal functions and multiple weights for the multilinear Calderón-Zygmund theory. *Adv Math*, 2009, 220: 1222–1264

- 5 Li L, Ma B L, Zhou J. Multilinear Calderón-Zygmund operators on Morrey space with non-doubling measures. *Publ Math Debrecen*, 2011, 78: 283–296
- 6 Pérez C, Pradolini G, Torres R H, et al. End-point estimates for iterated commutators of multilinear singular integrals. *Bull Lond Math Soc*, 2014, 46: 26–42
- 7 Maldonado D, Naibo V. Weighted norm inequalities for paraproducts and bilinear pseudodifferential operators with mild regularity. *J Fourier Anal Appl*, 2009, 15: 218–261
- 8 Lu G Z, Zhang P. Multilinear Calderón-Zygmund operators with kernels of Dini's type and applications. *Nonlinear Anal*, 2014, 107: 92–117
- 9 Chen J C, Zhu X R. Maximal Calderón-Zygmund singular integral on RBMO. *Appl Math J Chinese Univ Ser B*, 2005, 20: 316–322
- 10 Hu G E, Yang D C. Weighted norm inequality for maximal singular integrals with nondoubling measure. *Studia Math*, 2008, 187: 101–123
- 11 Hu G E, Meng Y, Yang D C. Weighted norm inequalities for multilinear Calderón-Zygmund operators on non-homogeneous metric measure spaces. *Forum Math*, 2014, 26: 1289–1322
- 12 Tao X X, Zheng T T. Multilinear commutators of fractional integrals over Morrey spaces with non-doubling measures. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl*, 2011, 18: 287–308
- 13 Tolsa X. BMO, H^1 and Calderón-Zygmund operators for non-doubling measures. *Math Ann*, 2001, 319: 89–101
- 14 Xu J S. Boundedness in Lebesgue spaces for commutators of multilinear singular integrals and RBMO functions with non-doubling measures. *Sci China Ser A*, 2007, 50: 361–376
- 15 Zheng T T, Tao X X, Wu X M. Bilinear Calderón-Zygmund operators of type $\omega(t)$ on non-homogeneous space. *J Inequal Appl*, 2014, 113: 1–18
- 16 Zheng T T, Wang Z, Xiao W L. Maximal bilinear Calderón-Zygmund operators of type $\omega(t)$ on non-homogeneous space. *Ann Funct Anal*, 2015, 6: 134–154
- 17 Hytönen T. A framework for non-homogeneous analysis on metric spaces, and the RBMO space of Tolsa. *Publ Mat*, 2010, 54: 485–504
- 18 Bui T, Duong X. Hardy spaces, regularized BMO spaces and the boundedness of Calderón-Zygmund operators on non-homogeneous spaces. *J Geom Anal*, 2013, 23: 895–932
- 19 Xie R, Gong H, Zhou X. Commutators of multilinear singular integral operators on non-homogeneous metric measure spaces. *Taiwanese J Math*, 2015, 19: 703–723
- 20 Fu X, Yang D, Yuan W. Boundedness of multilinear commutators of Calderón-Zygmund operators on Orlicz spaces over non-homogeneous spaces. *Taiwanese J Math*, 2012, 16: 2203–2238

Boundedness for iterated commutators of multilinear singular integrals of Dini's type on non-homogeneous metric measure spaces

ZHENG TaoTao & TAO XiangXing

Abstract Assume that $(\mathcal{X}, d, \mu)$ is a geometrically doubling metric space and the measure μ is an upper doubling measure. This paper focuses on studying the boundedness of iterated commutators, which is generated by multilinear singular integral operators with the function $\mathbf{b}$ in $\text{RBMO}(\mu)$.

Keywords Dini's type, multilinear, commutator

MSC(2010) 42B20, 42B35

doi: 10.1360/N012016-00089