2-D 离散动力系统的空间静态分岔与控制

海泉^{1,2}, 刘树堂^{1*}

1. 山东大学控制科学与工程学院, 济南 250061

2. 内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特 010022

* 通信作者. E-mail: stliu@sdu.edu.cn

收稿日期: 2016-04-19; 接受日期: 2016-08-10; 网络出版日期: 2016-12-12

国家自然科学基金重点项目 (批准号: 61533011) 和自然科学基金面上基金 (批准号: 61273088) 资助项目

摘要 近年来分岔控制依旧是一个热点研究领域. 本文利用一个统一的延迟反馈方法控制 2-D 离散动力系统的空间静态分岔. 利用该控制方法, 我们可以通过转移已有的分岔或产生一个新的跨临界、叉型、鞍结分岔来实现 2-D 离散动力系统的空间静态分岔的判别和控制方法.

关键词 静态分岔, 叉型分岔, 鞍结分岔, 跨临界分岔, 控制

1 引言

众所周知, 1-D 离散动力系统是典型的非线性动力模型之一, 在数学、电子、生物、物理等领域内被广泛应用. 如下的非线性 1-D 离散系统^[1]:

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu), \quad (1)$$

其中 μ 是一个大于零的实参数, f 是 x_n 的一个非线性函数, 事实上系统 (1) 有着非常丰富的动力学行为, 如叉型分岔、鞍结点分岔、跨临界分岔、倍周期分岔、Hopf 分岔和混沌等. 几十年来, 学者们对非线性 1-D 离散系统的分岔行为、周期解性及混沌行为进行了系统全面的研究, 并且获得了大量的结论^[2~7]. 随着科学技术、工程设计、图像处理等领域中实际问题的需要它们不仅涉及到 1-D 系统 (1) 的情况, 还往往涉及到空间模型的非线性动力学性质, 即具有如下形式的非线性 2-D 离散系统^[8~10]:

$$x_{m+1,n} + \omega x_{m,n+1} = f((1 + \omega)x_{m,n}, \mu), \quad (2)$$

其中 $\omega \neq -1$ 是常数, 而 $f(\cdot)$ 是 $x_{m,n}$ 的一个非线性函数, μ 是实数. 注意到如果 $\omega = 0, n = n_0$ 时, 系统 (2) 化为 $x_{m+1,n_0} = f(x_{m,n_0}, \mu)$, 为方便起见, 记为

$$x_{m+1} = f(x_m, \mu). \quad (3)$$

引用格式: 海泉, 刘树堂. 2-D 离散动力系统的空间静态分岔与控制. 中国科学: 信息科学, 2017, 47: 351–361, doi: 10.1360/N112016-00071

Hai Q, Liu S T. Spatial static bifurcation of 2-D discrete dynamical systems and its control (in Chinese). Sci Sin Inform, 2017, 47: 351–361, doi: 10.1360/N112016-00071

即化为系统 (1), 所以系统 (2) 是一般形式. 另外系统 (2) 实际上是物理中含有强迫项的一维对流方程

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \omega \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = f((1 + \omega)u(x, y), \mu) \quad (4)$$

的离散化形式, 其中对于任意 $x, y, u(x, y) \neq 0$, 因此对于离散系统 (2) 的研究可以为研究连续系统 (4) 提供有用的信息. 以物理中有强迫项的一维对流方程的一般形式为基础, 关于空间混沌和空间分形的控制研究获得了诸多成果^[9~12], 但关于空间分岔的控制成果还没有涉及.

本文利用一个统一的延迟反馈方法来控制 2-D 离散动力系统的空间静态分岔. 利用该控制方法, 我们可以通过转移已有的分岔或产生一个新的跨临界、叉型、鞍结点分岔来实现 2-D 离散动力系统的空间静态分岔的判别法理论和控制方法. 一些计算机模拟结果验证了该方法的有效性, 并证明了理论结果的正确性.

2 2-D 离散动力系统空间静态分岔类型的判别定理

设 2-D 单参数族中心对流方程为

$$x_{m+1, n} + \omega x_{m, n+1} = F((1 + \omega)x_{m, n}, \mu), \quad (5)$$

其中 $F((1 + \omega)x_{m, n}, \mu)$ 是非线性函数, μ 是实数, $\omega \neq -1$ 是常数. 假设 $(0, 0)$ 为方程 (5) 的不动点 (不是原点的不动点可以通过平移到原点), 所以可得

$$F(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 1.$$

以下的讨论都建立在中心流形的基础上, 为了讨论方便, 以一般的 2-D 单参数族向量场为例.

2.1 空间鞍结分岔及其判别法

鞍结点分岔有以下 2 个特征: 只有一个不动点曲面 $u(x_{m, n})$ 穿过点 $(0, 0)$, 而且满足

(1) 在 $x_{m, n} = 0$ 处和平面 $\mu = 0$ 相切, 即

$$\frac{d\mu}{dx}(0, 0) = 0. \quad (6)$$

(2) 整个曲面位于平面 $\mu = 0$ 的一侧, 局部来讲, 这要求下式成立:

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}(0, 0) \neq 0. \quad (7)$$

设一般的 2-D 单参数族向量场为

$$x_{m+1, n} + \omega x_{m, n+1} = F((1 + \omega)x_{m, n}, \mu). \quad (8)$$

假设不动点为 $(x_{m, n}, \mu) = (0, 0)$, 即

$$F(0, 0) = 0. \quad (9)$$

而且不动点不是双曲的, 即

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 1. \quad (10)$$

在原点处给出

$$h((1+\omega)x_{m,n}, \mu) = F((1+\omega)x_{m,n}, \mu) - x_{m+1,n} - \omega x_{m,n+1}. \quad (11)$$

如果满足横截性条件

$$\frac{\partial h}{\partial \mu}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0, \quad (12)$$

那么, 由隐函数理论可知, 对于充分小的 $x_{m,n}$, 存在唯一的函数

$$\mu = \mu(x_{m,n}), \quad \mu(0) = 0, \quad (13)$$

且满足

$$h((1+\omega)x_{m,n}, \mu(x_{m,n})) = F((1+\omega)x_{m,n}, \mu(x_{m,n})) - x_{m+1,n} - \omega x_{m,n+1} = 0. \quad (14)$$

这样, 式 (6), (7), (9), (10), (12) 就构成了式 (8) 发生鞍结点分岔的条件. 注意到式 (6) 和 (7) 的关系并不方便利用, 因为 $x_{m,n}$, μ 之间的函数关系是隐函数, 所以必须改善这两个条件, 为此对式 (14) 两边隐式求导得

$$\begin{aligned} & (1+\omega) \frac{\partial h}{\partial x}((1+\omega)x_{m,n}, \mu(x_{m,n})) + \frac{\partial h}{\partial \mu}((1+\omega)x_{m,n}, \mu(x_{m,n})) \cdot \frac{d\mu}{dx} \\ &= (1+\omega) \frac{\partial F}{\partial x}((1+\omega)x_{m,n}, \mu(x_{m,n})) + \frac{\partial F}{\partial \mu}((1+\omega)x_{m,n}, \mu(x_{m,n})) \cdot \frac{d\mu}{dx} - 1 - \omega \\ &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

在 $(x_{m,n}, \mu) = (0, 0)$ 处考虑式 (15) 可得

$$\frac{d\mu}{dx}(0, 0) = -\frac{(1+\omega) \frac{\partial h}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial h}{\partial \mu}(0, 0)} = -\frac{(1+\omega) (\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) - 1)}{\frac{\partial F}{\partial \mu}(0, 0)} = 0. \quad (16)$$

由此可知式 (10) 和 (12) 可以确保式 (6) 成立, 即在 $x_{m,n} = 0$ 处, 不动点曲面 $\mu(x_{m,n})$ 和平面 $\mu = 0$ 是相切的. 再一次对式 (15) 两侧隐式求导可得

$$\begin{aligned} & (1+\omega)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}((1+\omega)x_{m,n}, \mu(x_{m,n})) + 2(1+\omega) \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial \mu}((1+\omega)x_{m,n}, \mu(x_{m,n})) \frac{d\mu}{dx} \\ &+ \frac{\partial^2 h}{\partial \mu^2}((1+\omega)x_{m,n}, \mu(x_{m,n})) \left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2 + \frac{\partial h}{\partial \mu}((1+\omega)x_{m,n}, \mu(x_{m,n})) \frac{d^2 \mu}{dx^2} \\ &= (1+\omega)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}((1+\omega)x_{m,n}, \mu(x_{m,n})) + 2(1+\omega) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu}((1+\omega)x_{m,n}, \mu(x_{m,n})) \frac{d\mu}{dx} \\ &+ \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2}((1+\omega)x_{m,n}, \mu(x_{m,n})) \left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial \mu}((1+\omega)x_{m,n}, \mu(x_{m,n})) \frac{d^2 \mu}{dx^2} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

在 $(x_{m,n}, \mu) = (0, 0)$ 处考虑式 (15) 和 (16) 可得

$$\frac{d^2 \mu}{dx^2}(0, 0) = -\frac{(1+\omega)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial h}{\partial \mu}(0, 0)} = -\frac{(1+\omega)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial F}{\partial \mu}(0, 0)}. \quad (18)$$

因此, 当且仅当式 (19) 成立时式 (7) 成立:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0. \quad (19)$$

表 1 鞍结点分岔中各分支的稳定性
Table 1 Stability of every branch in sketch map of the saddle-node bifurcation

$\frac{\partial F}{\partial \mu}(0, 0)$	$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0)$	Stable equilibrium	Unstable equilibrium	No equilibrium
> 0	> 0	$\mu < 0$ (upper)	$\mu < 0$ (lower)	$\mu > 0$
> 0	< 0	$\mu > 0$ (upper)	$\mu > 0$ (lower)	$\mu < 0$
< 0	> 0	$\mu > 0$ (lower)	$\mu > 0$ (upper)	$\mu < 0$
< 0	> 0	$\mu < 0$ (lower)	$\mu < 0$ (upper)	$\mu > 0$

至此, 得出式 (8) 发生鞍结点分岔的判别准则为

$$\begin{cases} F(0, 0) = 0, & \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 1, \\ \frac{\partial F}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0, & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0, \end{cases} \quad (20)$$

其中的后两式成为横截条件. 这两个方程在 4 种不同符号组合情况下的分岔图中各个分支的稳定性列于表 1.

2.2 空间跨临界分岔及其判别法

跨临界分岔有以下 3 个特征:

- (1) 有两条不动点曲面通过原点 $(x_{m,n}) = (0, 0)$.
- (2) 不动点曲面都同时分布在 $\mu = 0$ 的两侧.
- (3) 任一个不动点曲面上点的稳定性都在 $\mu = 0$ 处发生交替, 从稳定变为不稳定或者反之.

由跨临界分岔的特征 (1) 可知, 系统还满足 (否则根据隐函数理论, 只有一个不动点曲面通过原点)

$$\frac{\partial h}{\partial \mu}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial \mu}(0, 0) = 0. \quad (21)$$

如果这里仍然采用前面讨论鞍结点分岔的方法推导跨临界分岔发生的条件, 那么式 (21) 就给分析带来了困难, 因为在前面的分析中, 恰恰是利用式 (12) 作为条件计算通过分岔点的不动点曲面, 然后在不动点曲面上讨论向量场, 进而利用向量场的导数信息附之以隐函数理论讨论不动点曲面的非线性特性的, 然而在这里此条件是不成立的.

鉴于 $x_{m,n} = 0$ 是一个不动点曲面, 那么可以把式 (11) 写成另外一种形式:

$$h((1 + \omega)x_{m,n}, \mu) = x_{m,n}H((1 + \omega)x_{m,n}, \mu) = x_{m,n}(G((1 + \omega)x_{m,n}, \mu) - 1 - \omega). \quad (22)$$

定义函数

$$G((1 + \omega)x_{m,n}, \mu) = \begin{cases} \frac{F((1 + \omega)x_{m,n}, \mu)}{x_{m,n}}, & x_{m,n} \neq 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x}(0, \mu), & x_{m,n} = 0. \end{cases} \quad (23)$$

因此,

$$H((1 + \omega)x_{m,n}, \mu) = \begin{cases} \frac{h((1 + \omega)x_{m,n}, \mu)}{x_{m,n}}, & x_{m,n} \neq 0, \\ \frac{\partial h}{\partial x}(0, \mu), & x_{m,n} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

表 2 跨临界分岔中各分支的稳定性

Table 2 Stability of every branch in sketch map of the transcritical bifurcation

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu}(0,0) - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2}(0,0)$	$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0)$	Stable equilibrium	Unstable equilibrium
$\neq 0$	> 0	lower	upper
$\neq 0$	< 0	upper	lower

假设 $H((1+\omega)x_{m,n}, \mu)$ 是一个通过原点 $(x_{m,n}, \mu) = (0, 0)$ 的不动点曲面, 且该曲面都同时分布在 $\mu = 0$ 的两侧, 有

$$\frac{\partial H}{\partial \mu}(0,0) = \frac{\partial G}{\partial \mu}(0,0) \neq 0. \quad (25)$$

由式 (23) 和 (24) 可得

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0. \quad (26)$$

则由隐函数理论可知, 对于充分小的 $x_{m,n}$, 存在唯一的函数 $\mu(x_{m,n})$ 满足

$$H((1+\omega)x_{m,n}, \mu) = G((1+\omega)x_{m,n}, \mu) - 1 - \omega = 0. \quad (27)$$

对式 (27) 两边隐式求导得

$$\frac{d\mu}{dx}(0,0) = -\frac{(1+\omega)\frac{\partial H}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial H}{\partial \mu}(0,0)} = -\frac{(1+\omega)\frac{\partial G}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial G}{\partial \mu}(0,0)}. \quad (28)$$

由式 (23) 和 (24) 可得

$$\frac{d\mu}{dx}(0,0) = -\frac{(1+\omega)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu}(0,0)}. \quad (29)$$

因此,

$$\frac{d\mu}{dx}(0,0) \neq 0, \quad (30)$$

当且仅当

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) \neq 0. \quad (31)$$

至此得出式 (8) 发生跨临界分岔的判别准则为

$$\begin{cases} F(0,0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial \mu}(0,0) = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) \neq 0. \end{cases} \quad (32)$$

跨临界分岔各个分支的稳定情况列于表 2.

2.3 空间叉型分岔及其判别法

叉型分岔有以下 3 个特征:

- (1) 有两条不动点平面都通过原点 $(x_{m,n}, \mu) = (0, 0)$;
- (2) 不动点平面 $x_{m,n} = 0$ 分布在平面 $\mu = 0$ 的两侧;
- (3) 不动点平面 $x_{m,n} = 0$ 上的不动点在平面 $\mu = 0$ 的两侧有不同的稳定性.

表 3 叉型分岔中各个分支的稳定性
Table 3 Stability of every branch in sketch map of the pitchfork bifurcation

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu}(0,0)$	$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(0,0)$	Stable equilibrium (1st branch)	Unstable equilibrium (1st branch)	Stable equilibrium (2nd branch)	Unstable equilibrium (2nd branch)
> 0	> 0	$\mu < 0$	$\mu > 0$	—	$\mu < 0$
> 0	< 0	$\mu < 0$	$\mu > 0$	$\mu > 0$	—
< 0	> 0	$\mu > 0$	$\mu < 0$	—	$\mu > 0$
< 0	> 0	$\mu > 0$	$\mu < 0$	$\mu < 0$	—

由叉型分岔的特征可知, 式 (8) 发生叉型分岔除了要满足鞍结点分岔的发生条件 (6) 和 (7) 外, 还应该满足跨临界分岔发生的条件 (21), 和跨临界分岔的推导过程一样, 构造函数式 (23) 和 (24), 然后结合鞍结点分岔的推导过程, 可以得出式 (8) 发生叉型分岔的判别准则为

$$\begin{cases} F(0,0) = 0, \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 1, \frac{\partial F}{\partial \mu}(0,0) = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) \neq 0, \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(0,0) \neq 0. \end{cases} \quad (33)$$

叉型分岔各个分支的稳定性情况列于表 3.

3 2-D 离散动力系统中空间静态分岔控制的计算

本节将以式 (34) 描述的 2-D 离散参数化的非线性状态反馈控制系统为例, 介绍 2-D 离散系统的空间分岔控制的设计, 对于

$$x_{m+1,n} + \omega x_{m,n+1} = F((1 + \omega)x_{m,n}, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} f((1 + \omega)x_{m,n}, \mu) + k((1 + \omega)x_{m,n}, \mu), \quad (34)$$

其中 $\mu \in \mathbb{R}$, $k(\cdot)$ 是待设计的控制器, 向量场 $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是自治连续向量场 (即不显含时间).

对该控制系统的空间分岔分析及其控制步骤如下:

- (1) 初始化系统 (34) 中控制器的结构 (如采用线性控制还是非线性控制).
- (2) 解不动点方程

$$(1 + \omega)x^* = F((1 + \omega)x^*, \mu), \quad (35)$$

得出系统解轨迹 $x^*(t, \mu)$, 如果方程无解则改变步骤 (1) 中控制器的结构, 重新解不动点方程直到有解.

- (3) 给定期望的分岔数值 $\mu = \mu^*$, 使其满足

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x^*, \mu=\mu^*} = 1. \quad (36)$$

如式 (36) 无解, 则改变步骤 (1) 中控制器的结构, 然后回到步骤 (2).

- (4) 根据表 4 判别空间静态分岔的类型.

(5) 分别根据表 1~3 判断对应分岔的不动点的稳定情况 (表 1~3 是以原点为不动点为例的, 当不动点不是原点时将判别条件应用在相应的不动点处即可).

表 4 空间静态分岔类型判别表
Table 4 The table of spatial static bifurcation type determination

$\frac{\partial F}{\partial \mu}(x^*, \mu^*)$	$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x^*, \mu^*)$	Bifurcations
$\neq 0$	$\neq 0$	Saddle-node
$= 0$	$\neq 0$	Transcritical
$= 0$	$= 0$	Pitchfork

4 空间静态分岔的控制

考虑 2-D Logistic 系统

$$x_{m+1,n} + \omega x_{m,n+1} = \mu(1 + \omega)x_{m,n}[1 - (1 + \omega)x_{m,n}], \quad \mu > 0. \quad (37)$$

控制任务是使原有的分岔点 (x^*, μ^*) 转移到新的位置 (x^0, μ^0) , 或者产生新的一个分岔点 (x^0, μ^0) .

由给出的系统 (37), 可以确定如下控制器的结构, 从上述的步骤 (2), 可得

$$(1 + \omega)x^0 = \mu^0(1 + \omega)x^0[1 - (1 + \omega)x^0] + k|_{x=x^0, \mu=\mu^0}, \quad (38)$$

使得

$$k|_{x=x^0, \mu=\mu^0} = (1 + \omega)x^0 - \mu^0(1 + \omega)x^0[1 - (1 + \omega)x^0]. \quad (39)$$

然后, 由步骤 (3) 得

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x^0, \mu=\mu^0} = \mu^0(1 + \omega) - 2\mu^0(1 + \omega)^2x^0 + \left. \frac{\partial k}{\partial x} \right|_{x=x^0, \mu=\mu^0} = 1, \quad (40)$$

使得

$$\left. \frac{\partial k}{\partial x} \right|_{x=x^0, \mu=\mu^0} = 1 - \mu^0(1 + \omega) - 2\mu^0(1 + \omega)^2x^0. \quad (41)$$

由以上得到的式 (39) 和 (41), 可以确定如下的一个简单线性控制器:

$$k((1 + \omega)x_{m,n}, \mu) = [1 - (1 + \omega)\mu^0 + 2(1 + \omega)^2\mu^0x^0]x_{m,n} + \omega x^0 - (1 + \omega)^2\mu^0(x^0)^2 = c_1x_{m,n} + c_2, \quad (42)$$

其中 $c_1 = 1 - (1 + \omega)\mu^0 + 2(1 + \omega)^2\mu^0x^0$, $c_2 = \omega x^0 - (1 + \omega)^2\mu^0(x^0)^2$.

由受控 2-D Logistic 系统,

$$x_{m+1,n} + \omega x_{m,n+1} = \mu(1 + \omega)x_{m,n}[1 - (1 + \omega)x_{m,n}] + (c_1x_{m,n} + c_2), \quad (43)$$

有

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \mu} \right|_{x^0, \mu=\mu^0} = (1 + \omega)x^0 - (1 + \omega)^2(x^0)^2, \quad \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{x^0, \mu=\mu^0} = -2(1 + \omega)^2(x^0)^2.$$

因此由表 4, 有

- (1) 当 $x^0 = 0, \mu^0 \neq 0$ 时, 点 x^0, μ^0 是跨临界分岔点;
- (2) 当 $x^0 = 0, \mu^0 = 0$ 时, 点 x^0, μ^0 是叉型分岔点;
- (3) 当 $x^0 \neq 0, \mu^0 \neq 0$ 时, 点 x^0, μ^0 是鞍结分岔点.

图 1 (网络版彩图) 2-D Logistic 系统原有的跨临界分岔

Figure 1 (Color online) The original transcritical bifurcation of the logistic map

图 2 (网络版彩图) 2-D Logistic 系统被控的跨临界分岔

Figure 2 (Color online) The cotrolled transcritical bifurcation of the logistic map

4.1 跨临界分岔控制

众所周知, 未受控的 2-D Logistic 系统具有跨临界分岔 $(x^*, \mu^*) = (0, 1)$. 现在假设保留原有类型的分岔点, 但将它转移到一个新的位置. 根据上述结果, 我们选择 $x^0 = 0 = x^*$, 但 $\mu \neq 0$ 是可以任意的. 当 $x^0 = 0$, $\omega = -0.002$ 时, 受控系统简化为

$$F((1 + \omega)x_{m,n}, \mu) = [1 + (1 + \omega)\mu - (1 + \omega)\mu^0]x_{m,n} - \mu(1 + \omega)^2 x_{m,n}^2. \quad (44)$$

从而

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \right|_{x=x^0, \mu=\mu^0} = (1 + \omega) - 2(1 + \omega)^2 x^0 = 1 + \omega = 0.998 \neq 0. \quad (45)$$

根据表 3, 得如下的结论:

- (a) 若 $\mu^0 < 0$, 则不动点下段是稳定的, 而上段不稳定;
- (b) 若 $\mu^0 > 0$, 则不动点上段是稳定的, 而下段不稳定.

$\mu = \frac{3}{2}$ 的情况下进行仿真模拟, 转移原有的跨临界分岔. 分别从图 1 和 2 看出 2-D Logistic 系统原有的和延期的跨临界分岔.

4.2 鞍结点分岔控制

对于受控 2-D Logistic 系统 (43) 创建一个鞍结点分岔, 按照表 1, 当 $(x^0, \mu^0) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $\omega = -0.002$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F}{\partial \mu} \right|_{x=x^0, \mu=\mu^0} &= (1 + \omega)x^0 - (1 + \omega)^2 (x^0)^2 = 0.25 > 0, \\ \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{x=x^0, \mu=\mu^0} &= -2(1 + \omega)^2 \mu^0 = -0.996 > 0. \end{aligned}$$

根据表 1, 有鞍结分岔点 (x^0, μ^0) 和

- (a) 如 $\mu > \mu^0 = \frac{3}{2}$, 则不动点上支段是稳定的, 而下支段不稳定;
- (b) 如 $\mu < \mu^0 = \frac{3}{2}$, 则没有不动点.

如图 3 所示, 受控系统 (43) 的鞍结分岔点为 $(x^0, \mu^0) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

图 3 (网络版彩图) 2-D Logistic 系统被控的鞍结点分岔

Figure 3 (Color online) The controlled saddle-node bifurcation of the logistic map

图 4 (网络版彩图) 2-D Logistic 系统被控的叉型分岔

Figure 4 (Color online) The controlled pitchfork bifurcation of the logistic map

4.3 叉型分岔控制

对于受控 2-D Logistic 系统 (43) 创建一个叉型点分岔, 由表 3 注意到, 该系统中不存在非零的分岔点, 且 $\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \neq 0$. 前面所用的线性控制器 (42) 不能创造叉型分岔, 因此, 我们减去一个立方项, 即

$$k((1+\omega)x_{m,n}, \mu) = [1 - (1+\omega)\mu^0 + 2(1+\omega)^2\mu^0 x^0]x_{m,n} + \omega x^0 - (1+\omega)^2\mu^0(x^0)^2 - (1+\omega)^3(x_{m,n} - x^0)^3.$$

容易验证该控制器满足所需的所有条件. 例如当 $(x^0, \mu^0) = (0, 0)$, $\omega = -0.002$ 时, 有

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \mu} \right|_{x=x^0, \mu=\mu^0} = (1+\omega)x^0 - (1+\omega)^2(x^0)^2 = 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{x=x^0, \mu=\mu^0} = -2(1+\omega)^2\mu^0 = 0,$$

和

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \right|_{x=x^0, \mu=\mu^0} = (1+\omega) - 2(1+\omega)^2 x^0 = 0.998 > 0,$$

$$\left. \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right|_{x=x^0, \mu=\mu^0} = -6(1+\omega)^3 = -5.964 < 0.$$

根据表 3, 有一个鞍结分岔点 $(x^0, \mu^0) = (0, 0)$ 和

- (a) 若 $\mu < 0 = \mu^0$, 则第一个不动点上分支是稳定的;
- (b) 若 $\mu > 0 = \mu^0$, 则第一个不动点上分支是不稳定的.

由 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}|_{x=x^0, \mu=\mu^0} = 0$, 获得了叉型分岔, 如图 4 所示的分岔图.

5 结论

本文利用一个统一的延迟反馈控制方法, 讨论了空间静态分岔的控制. 利用该控制方法, 我们可以通过转移已有的分岔或产生一个新的跨临界、叉型、鞍结分岔来实现 2-D 离散动力系统的空间静态分岔判别和控制. 本文做的一些模拟结果验证了该方法的有效性, 并证明了理论结果的正确性. 本文首次将控制法和静态分岔的理论成功应用到空间静态分岔中, 实现了空间分岔控制.

参考文献

- 1 Abed E H, Fu J H. Local feedback stabilization and bifurcation control, I. Bifurcation. Syst Control Lett, 1986, 7: 11–17
- 2 Chen G R, Lu J L. Bifurcation in discrete-time delay-feedback control system. Int J Bifurcation Chaos, 1999, 9: 287–293
- 3 Wang H O, Abed E H. Bifurcation control of a chaotic system. Automatic, 1995, 31: 1213–1226
- 4 Brant M E, Chen G R. Hopf Bifurcation Analysis: A Frequency Domain Approach. Singapore: World Scientific, 1996. 13–34
- 5 Moiola J L, Chen G R. Bifurcation control of two nonlinear models of cardiac activity. IEEE Trans Circuit Syst I, 1997, 44: 1031–1034
- 6 Luo X S, Chen G R, Wang B H, et al. Hybrid control of period-doubling bifurcation and implication for chaos in discrete nonlinear dynamical system. Chaos Solitons Fractals, 2003, 18: 775–783
- 7 Abed F H, Wang H O. Stabilization of period-doubling bifurcation and implications for chaos. Phys D, 1994, 70: 154–164
- 8 Chen G R, Liu S T. On spatial periodic orbits and spatial chaos. Int J Bifurcation Chaos, 2003, 4: 935–941
- 9 Liu S T, Chen G R. On spatial Lyapunov exponents and spatial chaos. Int J Bifurcation Chaos, 2003, 13: 1163–1181
- 10 Liu S T, Chen G R. Nonlinear feedback-controlled generalized synchronization of spatial chaos. Chaos Solitons Fractals, 2004, 22: 35–46
- 11 Liu P. Linear generalized synchronization of spatial julia sets. Int J Bifurcation Chaos, 2011, 21: 1281–1291
- 12 Liu P, Liu S T. Control and synchronization of julia sets in coupled map lattice. Commun Nonlin Sci Numer Simulat, 2011, 16: 3344–3355

Spatial static bifurcation of 2-D discrete dynamical systems and its control

Quan HAI^{1,2} & Shutang LIU^{1*}

1. *College of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China;*

2. *College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Huhhot 010022, China*

*Corresponding author. E-mail: stliu@sdu.edu.cn

Abstract As bifurcation control has remained a hot research field in recent years, a unified time-delayed feedback control method is adopted in this paper to control the spatial static bifurcation of 2-D discrete dynamical systems. By transferring the existing bifurcation or by producing a new fork-shaped, trans-critical, or saddle-node bifurcation, this method determines and then controls the spatial static bifurcation of 2-D discrete dynamical systems.

Keywords static bifurcation, pitchfork bifurcation, saddle-node bifurcation, transcritical bifurcation, control

Quan HAI was born in 1982. He received his B.S. degree in mathematics and applied mathematics from Inner Mongolia Normal University, in 2004. Currently, he is pursuing his Ph.D. degree in control theory and control engineering at the Shandong University. His research interests include spatial chaos and bifurcation control of nonlinear systems.

Shutang LIU was born in 1958. He received his Ph.D. degree from the Institute of Systems Engineering, South China University of Technology. Currently, he is a professor and Ph.D. supervisor at Shandong University, Jinan, China. His research interests include nonlinear system control and complex system control.