Banach 空间中二阶退化微分方程的周期解

蔡钢

重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331
E-mail: caigang-aaaa@163.com

收稿日期: 2014-03-12; 接受日期: 2014-11-22

国家自然科学基金 (批准号: 11171172 和 11401063)、高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20120002110044) 和重庆市自然科学基金 (批准号: cstc2014jcyjA00016) 资助项目

摘要 本文在 Lebesgue-Bochner 空间 $L^p(\mathbb{T}, X)$ 和周期 Besov 空间 $B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$ 中研究二阶退化微分方程 $[Mu']'(t) - aAu(t) - \alpha Au'(t) = f(t)$ ($t \in \mathbb{T} := [0, 2\pi]$), $u(0) = u(2\pi)$, $(Mu')(0) = (Mu')(2\pi)$ 的适定性. 用算子值 Fourier 乘子定理给出方程具有适定性的充分或者必要条件.

关键词 算子值 Fourier 乘子 适定性 UMD 空间 Besov 空间

MSC (2010) 主题分类 47D06, 47D09, 47F05, 35L70, 35G20

1 引言

我们研究下面二阶退化微分方程:

$$[Mu']'(t) - aAu(t) - \alpha Au'(t) = f(t) \quad (t \in \mathbb{T} := [0, 2\pi]), \quad (1.1)$$

且具有周期边界条件: $u(0) = u(2\pi)$, $(Mu')(0) = (Mu')(2\pi)$, 其中 A 与 M 为 Banach 空间 X 中闭线性算子满足 $D(A) \subset D(M)$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$, f 为 X - 值函数.

当 $M = I_X$ 为恒等算子且 $a = 1, \alpha = 0$, (1.1) 变为下面二阶微分方程:

$$u''(t) = Au(t) + f(t) \quad (t \in \mathbb{T}). \quad (1.2)$$

Arendt 和 Bu^[1] 考虑了 (1.2) 的 L^p - 适定性, 他们证明了, 当 X 为 UMD Banach 空间且 $1 < p < \infty$ 时, (1.2) 具有 L^p - 适定性当且仅当 $-\mathbb{Z}^2 \subset \rho(A)$ 且集合 $\{k^2(k^2 + A)^{-1} : k \in \mathbb{Z}\}$ 是 Rademacher 有界的 (参见文献 [1, 定理 6.1]). Arendt 和 Bu^[2] 在周期 Besov 空间 $B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$ 里也研究了 (1.2) 的 $B_{p,q}^s$ - 适定性, 他们证明了 (1.2) 具有 $B_{p,q}^s$ - 适定性当且仅当 $-\mathbb{Z}^2 \subset \rho(A)$ 且集合 $\{k^2(k^2 + A)^{-1} : k \in \mathbb{Z}\}$ 是范数有界的 (参见文献 [2, 定理 5.3]). 在 Triebel-Lizorkin 空间 $F_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$ 里关于 (1.2) 的适定性特征刻画也被 Bu 和 Kim (参见文献 [3, 定理 4.2]) 得到.

当 $M = I_X$ 为恒等算子, (1.1) 变为下面微分方程:

$$u''(t) - aAu(t) - \alpha Au'(t) = f(t) \quad (t \in \mathbb{T}). \quad (1.3)$$

Keyantuo 和 Lizama^[4] 证明了 (1.3) 的周期解的存在唯一性. 更确切地, 他们证明了, 当 X 具有 UMD 性质, 则对于任意 $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$, (1.3) 存在唯一 L^p - 强解当且仅当

$$\left\{ \frac{-k^2}{a + \alpha i k} : k \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \rho(A) \quad \text{且} \quad \left\{ \frac{-k^2}{a + \alpha i k} \left(\frac{-k^2}{a + \alpha i k} I - A \right)^{-1} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

是 Rademacher 有界的. 他们也证明了对于任意 $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$ (或 $C_{2\pi}^s(\mathbb{T}, X)$), (1.3) 存在唯一 $B_{p,q}^s$ - (或 $C_{2\pi}^s$ -) 强解当且仅当 $\left\{ \frac{-k^2}{a + \alpha i k} : k \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \rho(A)$ 且 $\left\{ \frac{-k^2}{a + \alpha i k} \left(\frac{-k^2}{a + \alpha i k} I - A \right)^{-1} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ 是范数有界的.

类似的一阶退化微分方程

$$(Mu)'(t) = Au(t) + f(t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \quad Mu(0) = Mu(2\pi), \quad (1.4)$$

被 Lizama 和 Ponce^[5] 研究过, 在对 (1.4) 中的修改的预解算子作适当的假设下, 他们在 Lebesgue-Bochner 空间 $L^p(\mathbb{T}, X)$ 、Besov 空间 $B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$ 和 Triebel-Lizorkin 空间 $F_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$ 里给出了 (1.4) 具有适定性的充要条件.

最近, 具有周期初值条件的发展方程的适定性特征被许多学者研究过. 参见文献 [6–13].

本文的目的是给出 (1.1) 具有 L^p - 适定性 (相应地, $B_{p,q}^s$ - 适定性) 的充分或必要条件. 因为 A 不必是半群生成元, 因此半群理论不再适用. 我们用到的主要工具是算子值 Fourier 乘子定理 (参见文献 [1,2]). 事实上, 我们将 (1.1) 的适定性问题转化为相应函数空间上算子值 Fourier 问题来讨论. 我们得到的结果包含文献 [4] 中相应结果作为特殊情形.

本文结构如下: 第 2 节研究 (1.1) 的 L^p - 适定性, 第 3 节在 Besov 空间 $B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$ 中研究 (1.1) 的 $B_{p,q}^s$ - 适定性.

2 $L^p(\mathbb{T}, X)$ 上的周期解

设 X, Y 为两个复 Banach 空间且 $\mathbb{T} := [0, 2\pi]$, 用 $\mathcal{L}(X, Y)$ 记 X 到 Y 上所有有界线性算子构成的集合. 若 $X = Y$, 简记为 $\mathcal{L}(X)$. 给定 $1 \leq p < \infty$, 用 $L^p(\mathbb{T}, X)$ 记 $\mathbb{T}$ 上所有 X - 值可测函数 f 构成的集合, 其范数定义为

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_0^{2\pi} \|f(t)\|^p \frac{dt}{2\pi} \right)^{1/p} < \infty.$$

任给 $f \in L^1(\mathbb{T}, X)$, 用

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e_{-k}(t) f(t) dt$$

记 f 的第 k 个 Fourier 系数, 这里 $k \in \mathbb{Z}$ 且 $e_k(t) = e^{ikt}$, $t \in \mathbb{T}$.

Banach 空间 X 称为 UMD Banach 空间, 若对某个 (等价地, 对任意) $1 < p < \infty$, Riesz 投影 $Rf := \sum_{k \geq 0} \hat{f}(k) e_k$ 是 $L^p(\mathbb{T}, X)$ 上有界算子^[11]. 例如 L^p - 空间和 Sobolev 空间 $W^{k,p}$ 都是 UMD 空间. 每个 UMD 空间是超自反的, 即存在一个等价范数使得它在这个范数下是一致凸的.

定义 $\gamma_j(t) = \text{sgn}(\sin(2^j \pi t))$ 为 $[0, 1]$ 上的第 j 个 Rademacher 函数, 这里 $j \geq 1$. 令 $(\gamma_j \otimes x)(t) = \gamma_j(t)x$ ($x \in X, t \in [0, 1]$).

定义 2.1 设 X, Y 为 Banach 空间. 称 $\mathbf{T} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ 是 Rademacher 有界的 (简称为 R- 有界的), 若存在常数 $C > 0$, 使得对任意 $T_1, \dots, T_n \in \mathbf{T}$, $x_1, \dots, x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$ 有

$$\left\| \sum_{j=1}^n \gamma_j \otimes T_j x_j \right\|_{L^1([0,1], Y)} \leq C \left\| \sum_{j=1}^n \gamma_j \otimes x_j \right\|_{L^1([0,1], X)}. \quad (2.1)$$

注 2.2 若 $\mathbf{S}, \mathbf{T} \subset \mathcal{L}(X)$ 为 $\mathbb{R}$ -有界的. 则

$$\mathbf{ST} := \{ST : S \in \mathbf{S}, T \in \mathbf{T}\} \quad \text{与} \quad \mathbf{S} + \mathbf{T} := \{S + T : S \in \mathbf{S}, T \in \mathbf{T}\}$$

也为 $\mathbb{R}$ -有界的. 易知, 当 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 有界时, 集合 $\{\lambda I_X : \lambda \in \Omega\}$ 为 $\mathbb{R}$ -有界的 (参见文献 [11, 定理 4.4]).

定义 2.3 设 X, Y 为 Banach 空间, $1 \leq p < \infty$. 称 $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ 是 L^p -Fourier 乘子, 若任给 $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$, 存在 $u \in L^p(\mathbb{T}, Y)$ 满足 $\hat{u}(k) = M_k \hat{f}(k)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

命题 2.4 (参见文献 [1, 命题 1.11]) 设 X, Y 为 Banach 空间, $1 \leq p < \infty$. 若 $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ 是 L^p -Fourier 乘子, 则 $\{M_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{R}$ -有界的.

定理 2.5 (参见文献 [1, 定理 1.3]) 设 X, Y 为 UMD 空间, $1 < p < \infty$. 若 $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ 满足 $\{M_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 与 $\{k(M_{k+1} - M_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ 均为 $\mathbb{R}$ -有界的, 则 $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 为 L^p -Fourier 乘子.

我们考虑下面具有周期边值条件 $u(0) = u(2\pi)$, $(Mu')(0) = (Mu')(2\pi)$ 的问题,

$$[Mu']'(t) - aAu(t) - \alpha Au'(t) = f(t) \quad (t \in \mathbb{T}), \quad (2.2)$$

这里 A 与 M 为 Banach 空间 X 中闭线性算子满足 $D(A) \subset D(M)$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$, f 为定义在 $\mathbb{T}$ 的 X -值函数.

A 的 M -预解集定义为

$$\begin{aligned} \rho_M(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda^2 M - (a + \alpha i k)A) : D(A) \rightarrow X \text{ 可逆} \\ &\quad \text{且 } (\lambda^2 M - (a + \alpha i k)A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}. \end{aligned}$$

设 $1 \leq p < \infty$, 一阶周期 “Sobolev” 空间^[1] 定义为

$$W_{\text{per}}^{1,p}(\mathbb{T}, X) := \{u \in L^p(\mathbb{T}, X) : \text{存在 } v \in L^p(\mathbb{T}, X) \text{ 使得 } \hat{v}(k) = ik\hat{u}(k), \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

设 $u \in L^p(\mathbb{T}, X)$, 则 $u \in W_{\text{per}}^{1,p}(\mathbb{T}, X)$ 当且仅当 u 在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处可导且有 $u' \in L^p(\mathbb{T}, X)$, 从而 u 连续且满足 $u(0) = u(2\pi)$ (参见文献 [1, 引理 2.1]).

设 $1 \leq p < \infty$, (2.2) 在 L^p -适定性意义下的解空间定义为

$$\begin{aligned} S_p(A, M) &:= \{u \in W_{\text{per}}^{1,p}(\mathbb{T}, X) \cap L^p(\mathbb{T}, D(A)) : \\ &\quad u' \in L^p(\mathbb{T}, D(M)) \cap L^p(\mathbb{T}, D(A)), Mu' \in W_{\text{per}}^{1,p}(\mathbb{T}, X)\}, \end{aligned}$$

其中 $D(A)$ 与 $D(M)$ 赋予图像范数成为 Banach 空间. $S_p(A, M)$ 在装备下面范数为 Banach 空间:

$$\|u\|_{S_p(A, M)} := \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} + \|Au\|_{L^p} + \|Au'\|_{L^p} + \|Mu'\|_{L^p} + \|(Mu')'\|_{L^p}.$$

根据文献 [1, 引理 2.1] 知, 若 $u \in S_p(A, M)$, 则 u 与 Mu' 在 $\mathbb{T}$ 上是 X -值连续的且满足 $u(0) = u(2\pi)$, $(Mu')(0) = (Mu')(2\pi)$.

定义 2.6 设 $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$, 称 $u \in S_p(A, M)$ 为 (2.2) 的 L^p -强解, 若 (2.2) 在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处成立. 称 (2.2) 具有 L^p -适定性, 若对于任意 $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$, (2.2) 存在唯一 L^p -强解.

若 (2.2) 具有 L^p -适定性且 $u \in S_p(A, M)$ 为 (2.2) 的 L^p -强解, 则存在常数 $C > 0$ 使得对于任意 $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$, 有

$$\|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} + \|Au\|_{L^p} + \|Au'\|_{L^p} + \|Mu'\|_{L^p} + \|(Mu')'\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}. \quad (2.3)$$

由闭图像定理可得到此结果.

命题 2.7 设 A 和 M 为 UMD 空间 X 中闭线性算子满足 $D(A) \subseteq D(M)$. 设 $1 < p < \infty$, $N_k = (k^2 M + (a + \alpha i k)A)^{-1} (k \in \mathbb{Z})$, 则下面论断等价.

- (i) $\{ik : k \in \mathbb{Z}\} \subset \rho_M(A)$ 且集合 $(k^2 M N_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (k N_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 L^p -Fourier 乘子.
- (ii) $\{ik : k \in \mathbb{Z}\} \subset \rho_M(A)$ 且集合 $\{k^2 M N_k : k \in \mathbb{Z}\}, \{k N_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{R}$ -有界的.

证明 令 $M_k = k^2 M N_k, S_k = k N_k (k \in \mathbb{Z})$. 根据命题 2.4, (i) $\Rightarrow$ (ii) 成立. 相反, 由定理 2.5, 只需证明集合 $\{k(M_{k+1} - M_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ 与 $\{k(S_{k+1} - S_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{R}$ -有界的. 事实上, 观察

$$\begin{aligned} N_{k+1} - N_k &= N_{k+1}(N_k^{-1} - N_{k+1}^{-1})N_k \\ &= N_{k+1}[k^2 M + (a + \alpha i k)A - (k+1)^2 M - (a + \alpha i(k+1))A]N_k \\ &= N_{k+1}[-(2k+1)M - \alpha i A]N_k \\ &= -(2k+1)N_{k+1}M N_k - \alpha i N_{k+1}A N_k. \end{aligned} \quad (2.4)$$

于是

$$\begin{aligned} k(M_{k+1} - M_k) &= k[(k+1)^2 M N_{k+1} - k^2 M N_k] \\ &= k[k^2 M N_{k+1} - k^2 M N_k + (2k+1)M N_{k+1}] \\ &= k^3 M(N_{k+1} - N_k) + k(2k+1)M N_{k+1} \\ &= -k^3(2k+1)M N_{k+1}M N_k - \alpha i k^3 M N_{k+1}A N_k + k(2k+1)M N_{k+1} \\ &= \frac{-k(2k+1)}{(k+1)^2}M_{k+1}M_k - \frac{\alpha i k^3}{(k+1)^2}M_{k+1}A N_k + \frac{k(2k+1)}{(k+1)^2}M_{k+1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

注意到 $I_X = M_k + (a + \alpha i k)A N_k$, 从而

$$A N_k = \frac{1}{a + \alpha i k}(I_X - M_k). \quad (2.6)$$

将 (2.6) 代入 (2.5) 得

$$k(M_{k+1} - M_k) = \frac{-k(2k+1)}{(k+1)^2}M_{k+1}M_k - \frac{\alpha i k^3}{(k+1)^2(a + \alpha i k)}M_{k+1}(I_X - M_k) + \frac{k(2k+1)}{(k+1)^2}M_{k+1}. \quad (2.7)$$

根据 (2.4) 得

$$\begin{aligned} k(S_{k+1} - S_k) &= k[(k+1)N_{k+1} - kN_k] = k^2(N_{k+1} - N_k) + kN_{k+1} \\ &= -k^2(2k+1)N_{k+1}M N_k - k^2\alpha i N_{k+1}A N_k + kN_{k+1} \\ &= \frac{-(2k+1)}{k+1}S_{k+1}M_k - \frac{k^2\alpha i}{(a + \alpha i k)(k+1)}S_{k+1}(I_X - M_k) + \frac{k}{k+1}S_{k+1}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

注意到 $\mathbb{R}$ -有界序列的和与积也是 $\mathbb{R}$ -有界的, 根据 (2.7) 和 (2.8) 得集合 $\{k(M_{k+1} - M_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ 与 $\{k(S_{k+1} - S_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{R}$ -有界的. $\square$

现在我们给出 (2.2) 具有 L^p -适定性的一个充分条件.

定理 2.8 设 X 为 UMD 空间, $1 < p < \infty$ 且 A, M 为 X 中闭线性算子满足 $D(A) \subset D(M)$. 假设 $i\mathbb{Z} \subset \rho_M(A)$ 且集合 $\{k[k^2 M + (a + \alpha i k)A]^{-1} : k \in \mathbb{Z}\}, \{k^2 M[k^2 M + (a + \alpha i k)A]^{-1} : k \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{R}$ -有界的. 则 (2.2) 具有 L^p -适定性.

证明 设 $M_k = k^2 MN_k$, $S_k = kN_k$, 其中 $N_k = [k^2 M + (a + \alpha ik)A]^{-1}$. 根据命题 2.7 知 $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 和 $(S_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 L^p -Fourier 乘子. 由注 2.2 知 $(\frac{-1}{k}I)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 L^p -Fourier 乘子. 又因为 $(S_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 L^p -Fourier 乘子, 故 $(-N_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 也是 L^p -Fourier 乘子. 因此任给 $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$, 存在 $u \in L^p(\mathbb{T}, X)$ 使得

$$\hat{u}(k) = -N_k \hat{f}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (2.9)$$

注意到 $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 也是 L^p -Fourier 乘子, 于是存在 $v \in L^p(\mathbb{T}, X)$ 使得

$$\hat{v}(k) = M_k \hat{f}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (2.10)$$

观察

$$AN_k = \frac{1}{a + \alpha ik}(I_X - M_k),$$

于是

$$A\hat{u}(k) = \frac{-1}{a + \alpha ik} \hat{f}(k) + \frac{1}{a + \alpha ik} M_k \hat{f}(k) = \frac{-1}{a + \alpha ik} \hat{f}(k) + \frac{1}{a + \alpha ik} \hat{v}(k).$$

由注 2.2 知 $(\frac{1}{a + \alpha ik}I)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 L^p -Fourier 乘子. 根据文献 [1, 引理 3.1] 知 $u(t) \in D(A)$ 且 $Au \in L^p(\mathbb{T}, X)$. 类似地, 任给 $k \in \mathbb{Z}$, 有

$$Ak\hat{u}(k) = \frac{-k}{a + \alpha ik} \hat{f}(k) + \frac{k}{a + \alpha ik} \hat{v}(k).$$

同样的讨论知 $u'(t) \in D(A)$ 且 $Au' \in L^p(\mathbb{T}, X)$, 即 $u' \in L^p(\mathbb{T}, D(A))$.

因为 $(-iS_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 L^p -Fourier 乘子, 存在 $w \in L^p(\mathbb{T}, X)$ 使得

$$\hat{w}(k) = -ikN_k \hat{f}(k) = ik\hat{u}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

于是 $u \in W_{\text{per}}^{1,p}(\mathbb{T}, X)$. 我们已经得到 $u \in W_{\text{per}}^{1,p}(\mathbb{T}, X) \cap L^p(\mathbb{T}, D(A))$ 且 $u' \in L^p(\mathbb{T}, D(A))$.

注意到 $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 与 $(\frac{-1}{k}I)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 L^p -Fourier 乘子, 则 $(-ikMN_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 L^p -Fourier 乘子. 因此存在 $h \in L^p(\mathbb{T}, X)$ 满足

$$\hat{h}(k) = -ikMN_k \hat{f}(k) = ikM\hat{u}(k) = [Mu']^\wedge(k).$$

于是 $u' \in L^p(\mathbb{T}, D(M))$. 由 (2.10) 得

$$\hat{v}(k) = M_k \hat{f}(k) = k^2 MN_k \hat{f}(k) = -k^2 M\hat{u}(k) = [(Mu')']^\wedge(k).$$

从而 $Mu' \in W_{\text{per}}^{1,p}(\mathbb{T}, X)$. 我们已经得到 $u \in S_p(A, M)$. 根据 (2.9) 得

$$-k^2 M\hat{u}(k) - aA\hat{u}(k) - \alpha ikA\hat{u}(k) = \hat{f}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

因此 $(Mu')'(t) = aAu(t) + \alpha Au'(t) + f(t)$ 在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处成立^[1]. 故 u 为 (2.2) 的一个 L^p -强解. 这就证明了存在性.

下面证明唯一性, 设 $u \in S_p(A, M)$ 使得

$$(Mu')'(t) - aAu(t) - \alpha Au'(t) = 0$$

在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处成立. 两边取 Fourier 变换得

$$[-k^2 M - (a + \alpha ik)A]\hat{u}(k) = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

因为 $ik \in \rho_M(A), \forall k \in \mathbb{Z}$, 故 $u = 0$. 因此 (2.2) 具有 L^p - 适定性. $\square$

下面结果给出 (2.2) 具有 L^p - 适定性的一个必要条件.

定理 2.9 设 X 为 Banach 空间, $1 < p < \infty$ 且 A, M 为 X 中闭线性算子满足 $D(A) \subset D(M)$. 假设 (2.2) 具有 L^p - 适定性. 则 $i\mathbb{Z} \subset \rho_M(A)$ 且集合 $\{M_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{R}$ - 有界的, 这里 $M_k = k^2 M [k^2 M + (a + \alpha ik)A]^{-1} (k \in \mathbb{Z})$.

证明 设 $k \in \mathbb{Z}$ 且 $y \in X$, 定义 $f(t) = e^{ikt}y (t \in \mathbb{T})$. 则 $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$, $\hat{f}(k) = y$ 且当 $n \neq k$ 时有 $\hat{f}(n) = 0$. 因为 (2.2) 具有 L^p - 适定性, 故存在唯一 $u \in S_p(A, M)$ 使得

$$(Mu')'(t) - aAu(t) - \alpha Au'(t) = f(t)$$

在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处成立. 于是根据文献 [1, 引理 3.1] 知 $\hat{u}(n) \in D(A) (n \in \mathbb{Z})$. 两边取 Fourier 变换得

$$[-k^2 M - (a + \alpha ik)A]\hat{u}(k) = y \quad (2.11)$$

且 $[-n^2 M - (a + \alpha in)A]\hat{u}(n) = 0 (n \neq k)$. 因此 $-k^2 M - (a + \alpha ik)A$ 是满射. 下证 $-k^2 M - (a + \alpha ik)A$ 是单射, 取 $x \in D(A)$ 使得

$$[-k^2 M - (a + \alpha ik)A]x = 0.$$

令 $u(t) = e^{ikt}x (t \in \mathbb{T})$, 则 $u \in S_p(A, M)$ 且当 $f = 0$ 时, (2.2) 几乎处处成立. 于是 u 为 (2.2) 的一个 L^p - 强解, 其中 $f = 0$. 由唯一性假设知 $x = 0$. 于是 $-k^2 M - (a + \alpha ik)A$ 是单射. 因此 $-k^2 M - (a + \alpha ik)A$ 是 $D(A)$ 到 X 上的满射.

下面证明 $[-k^2 M - (a + \alpha ik)A]^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. 设 $f(t) = e^{ikt}y, u \in S_p(A, M)$ 为 (2.2) 的一个 L^p - 强解. 则

$$\hat{u}(n) = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ [-k^2 M - (a + \alpha ik)A]^{-1}y, & n = k. \end{cases}$$

于是 $u(t) = e^{ikt}[-k^2 M - (a + \alpha ik)A]^{-1}y$. 根据 (2.3), 存在独立于 y 和 k 的常数 $C > 0$ 使得

$$\|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} + \|Au\|_{L^p} + \|Au'\|_{L^p} + \|Mu'\|_{L^p} + \|(Mu')'\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}.$$

于是对于任意 $y \in X$, 有 $\|[-k^2 M - (a + \alpha ik)A]^{-1}y\| \leq C\|y\|$. 因此

$$\|[-k^2 M - (a + \alpha ik)A]^{-1}\| \leq C.$$

我们已经证明了 $ik \in \rho_M(A) (k \in \mathbb{Z})$. 则 $i\mathbb{Z} \subset \rho_M(A)$.

最后证明, 若 $M_k = k^2 M [k^2 M + (a + \alpha ik)A]^{-1} (k \in \mathbb{Z})$, 则 $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 L^p -Fourier 乘子. 设 $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$, 则存在 $u \in S_p(A, M)$ 为 (2.2) 的 L^p - 强解. (2.2) 两边取 Fourier 变换有 $\hat{u}(k) \in D(A)$ 且

$$[-k^2 M - (a + \alpha ik)A]\hat{u}(k) = \hat{f}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

因为 $-k^2 M - (a + \alpha ik)A$ 可逆, 则

$$\hat{u}(k) = [-k^2 M - (a + \alpha ik)A]^{-1}\hat{f}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

由 $u \in S_p(A, M)$ 知 $[(Mu')']^\wedge(k) = -k^2 M \hat{u}(k)$, 于是

$$[(Mu')']^\wedge(k) = -k^2 M \hat{u}(k) = M_k \hat{f}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

又因为 $(Mu')' \in L^p(\mathbb{T}, X)$, 从而 $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 L^p -Fourier 乘子. 根据命题 2.4 知 $\{M_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{R}$ -有界的. $\square$

注 2.10 当 $M = I_X$ 时, 根据集合 $\{k^2(k^2 + (a + \alpha ik)A)^{-1} : k \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{R}$ -有界的知 $\{k(k^2 + (a + \alpha ik)A)^{-1} : k \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{R}$ -有界的. 因此我们的结果包含文献 [4, 定理 2.11] 作为特殊情形.

3 $B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$ 上的周期解

Arendt 和 Bu [2] 引进了向量值周期 Besov 空间 $B_{p,q}^s(\mathbb{T}; X)$ 并研究了其上的算子值 Fourier 乘子. 设 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 为 Schwartz 空间, $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ 为所有定义在 $\mathbb{T}$ 上的 C^∞ 函数全体. 半范族 $\|f\|_\alpha = \sup_{x \in \mathbb{T}} |f^{(\alpha)}(x)|$ 给出了 $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ 上的局部凸拓扑, 其中 $\alpha \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. 令 $\mathcal{D}'(\mathbb{T}; X) := \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{T}), X)$ 为从 $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ 到 X 上的所有连续线性算子构成的空间. 考虑 $\mathbb{R}$ 上的二进制覆盖 $(I_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$:

$$I_0 = \{t \in \mathbb{R} : |t| \leq 2\}, \quad I_k = \{t \in \mathbb{R} : 2^{k-1} < |t| \leq 2^{k+1}\} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

设 $\phi(\mathbb{R})$ 为所有满足下列条件的函数列 $\phi = (\phi_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 构成的集合: 若 $k \in \mathbb{N}_0$, 则 $\text{supp}(\phi_k) \subset \bar{I}_k$, 对于 $x \in \mathbb{R}$, 我们有 $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \phi_k(x) = 1$ 且对于任意 $\alpha \in \mathbb{N}_0$ 有 $\sup_{x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0} 2^{k\alpha} |\phi_k^{(\alpha)}(x)| < \infty$.

设 $1 \leq p, q \leq \infty, s \in \mathbb{R}, \phi = (\phi_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in \phi(\mathbb{R})$. X -值周期 Besov 空间定义为

$$\begin{aligned} B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X) &:= \left\{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}; X) : \|f\|_{B_{p,q}^s} \right. \\ &\quad \left. := \left(\sum_{j \geq 0} 2^{sjq} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} e_k \otimes \phi_j(k) \hat{f}(k) \right\|_{L^p}^q \right)^{1/q} < \infty \right\} \quad (1 \leq q < \infty) \end{aligned}$$

且

$$B_{p,\infty}^s(\mathbb{T}, X) := \left\{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}; X) : \|f\|_{B_{p,\infty}^s} := \sup_{j \geq 0} 2^{sj} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} e_k \otimes \phi_j(k) \hat{f}(k) \right\|_{L^p} < \infty \right\}.$$

空间 $B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$ 与 ϕ 的选择无关, 不同的 ϕ 定义的范数等价. $B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$ 在赋予范数 $\|\cdot\|_{B_{p,q}^s}$ 下为 Banach 空间. 关于 $B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$ 更详细的内容见文献 [2] 中第 2 节内容. 若 $s_1 \leq s_2$, 则 $B_{p,q}^{s_2}(\mathbb{T}, X) \subset B_{p,q}^{s_1}(\mathbb{T}, X)$ 且其嵌入是连续的 (参见文献 [2, 定理 2.3]). 当 $s > 0$, 我们有 $B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X) \subset L^p(\mathbb{T}, X)$, $f \in B_{p,q}^{s+1}(\mathbb{T}, X)$ 当且仅当 f 几乎处处可导且 $f' \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$ (参见文献 [2, 定理 2.3]). 若 $u \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$ 且存在 $v \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$ 使得 $\hat{v}(k) = ik\hat{u}(k)$ ($k \in \mathbb{Z}$), 则 $u \in B_{p,q}^{s+1}(\mathbb{T}, X)$ 且 $u' = v$.

定义 3.1 设 X, Y 为 Banach 空间, $1 \leq p, q \leq \infty, s \in \mathbb{R}, (M_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. 称 $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子, 若任给 $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$, 存在唯一的 $u \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, Y)$ 满足 $\hat{u}(k) = M_k \hat{f}(k)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

定义 3.2 (参见文献 [9]) 称 $\{M_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ 为 M -有界的, 若

$$\sup_k \|M_k\| < \infty, \quad \sup_k \|k(M_{k+1} - M_k)\| < \infty, \quad (3.1)$$

$$\sup_k \|k^2(M_{k+1} - 2M_k + M_{k-1})\| < \infty. \quad (3.2)$$

Arendt 和 Bu [2] 证明了下述算子值 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子定理.

定理 3.3 设 X, Y 为 Banach 空间, $\{M_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ 为 M -有界序列. 则对于 $1 \leq p, q \leq \infty, s \in \mathbb{R}, (M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子.

注 3.4 (i) 若 $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 和 $(N_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子, 则 $(M_k N_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 与 $(M_k + N_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 也是 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子.

(ii) 若 $a_k = \frac{1}{k}$, $b_k = \frac{1}{a + \alpha i k}$, $c_k = \frac{k}{a + \alpha i k}$, 其中 $a, \alpha \in \mathbb{R}$ 为固定常数. 则 $\{a_k I_X : k \in \mathbb{Z}\}$, $\{b_k I_X : k \in \mathbb{Z}\}$ 与 $\{c_k I_X : k \in \mathbb{Z}\}$ 满足条件 (3.1) 和 (3.2). 根据定理 3.3 知 $(a_k I_X)_{k \in \mathbb{Z}}$, $(b_k I_X)_{k \in \mathbb{Z}}$ 和 $(c_k I_X)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子.

设 $1 \leq p, q \leq \infty$, $s > 0$, (2.2) 在 $B_{p,q}^s$ -适定性意义下的解空间定义为

$$S_{p,q,s}(A, M) := \{u \in B_{p,q}^{s+1}(\mathbb{T}, X) \cap B_{p,q}^s(\mathbb{T}, D(A)) : \\ u' \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, D(M)) \cap B_{p,q}^s(\mathbb{T}, D(A)), Mu' \in B_{p,q}^{s+1}(\mathbb{T}, X)\},$$

这里 $D(A)$ 和 $D(M)$ 赋予图像范数成为 Banach 空间. $S_{p,q,s}(A, M)$ 装备下面范数为 Banach 空间:

$$\|u\|_{S_{p,q,s}(A, M)} := \|u\|_{B_{p,q}^s} + \|u'\|_{B_{p,q}^s} + \|Au\|_{B_{p,q}^s} + \|Au'\|_{B_{p,q}^s} + \|Mu'\|_{B_{p,q}^s} + \|(Mu')'\|_{B_{p,q}^s}.$$

根据文献 [1, 引理 2.1], 若 $u \in S_{p,q,s}(A, M)$, 则 u 与 Mu' 是 X -值连续的且有 $u(0) = u(2\pi)$, $(Mu')(0) = (Mu')(2\pi)$.

现在我们给出 (2.2) 具有 $B_{p,q}^s$ -适定性的定义.

定义 3.5 设 $1 \leq p, q \leq \infty$, $s > 0$ 且 $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$, 称 $u \in S_{p,q,s}(A, M)$ 为 (2.2) 的一 $B_{p,q}^s$ -强解, 若 (2.2) 几乎处处成立. 称 (2.2) 具有 $B_{p,q}^s$ -适定性, 若任给 $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$, (2.2) 存在唯一 $B_{p,q}^s$ -强解. 若 (2.2) 具有 $B_{p,q}^s$ -适定性且 $u \in S_{p,q,s}(A, M)$ 为 (2.2) 的 $B_{p,q}^s$ -强解, 则存在常数 $C > 0$ 使得

$$\|u\|_{S_{p,q,s}(A, M)} := \|u\|_{B_{p,q}^s} + \|u'\|_{B_{p,q}^s} + \|Au\|_{B_{p,q}^s} + \|Au'\|_{B_{p,q}^s} + \|Mu'\|_{B_{p,q}^s} + \|(Mu')'\|_{B_{p,q}^s} \\ \leq C \|f\|_{B_{p,q}^s}. \quad (3.3)$$

这可由 A 和 M 的闭性与闭图像定理得到.

现在我们证明下面结果.

命题 3.6 设 $1 \leq p, q \leq \infty$, $s > 0$, A 和 M 为 Banach 空间 X 中闭线性算子满足 $D(A) \subseteq D(M)$. 设 $N_k = (k^2 M + (a + \alpha i k)A)^{-1}$ ($k \in \mathbb{Z}$), 则下述论断等价.

(i) $\{ik : k \in \mathbb{Z}\} \subset \rho_M(A)$ 且 $(k^2 M N_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, $(k N_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子.

(ii) $\{ik : k \in \mathbb{Z}\} \subset \rho_M(A)$ 且 $\sup_{k \in \mathbb{Z}} \|k^2 M N_k\| < \infty$, $\sup_{k \in \mathbb{Z}} \|k N_k\| < \infty$.

证明 令 $M_k = k^2 M N_k$, $S_k = k N_k$ ($k \in \mathbb{Z}$). (i) $\Rightarrow$ (ii). 根据文献 [7, 命题 3.4] 的证明即可得到. (ii) $\Rightarrow$ (i). 由 (2.7) 与 (2.8) 知

$$\sup_k \|k(M_{k+1} - M_k)\| < \infty, \quad \sup_k \|k(S_{k+1} - S_k)\| < \infty. \quad (3.4)$$

观察

$$\begin{aligned} & k^2(M_{k+1} - 2M_k + M_{k-1}) \\ &= k^2[(k+1)^2 M N_{k+1} - 2k^2 M N_k + (k-1)^2 M N_{k-1}] \\ &= k^2 M N_{k+1} [(k+1)^2 N_k^{-1} - 2k^2 N_{k+1}^{-1} + (k-1)^2 N_{k+1}^{-1} N_{k-1} N_k^{-1}] N_k \\ &= k^2 M N_{k+1} \{ (k+1)^2 N_k^{-1} - 2k^2 [(k+1)^2 M + (a + \alpha i(k+1))A] \\ &\quad + (k-1)^2 [(k+1)^2 M + (a + \alpha i(k+1))A] N_{k-1} N_k^{-1} \} N_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k^2 M N_{k+1} \{ (k+1)^2 N_k^{-1} - 2k^2 [N_k^{-1} + (2k+1)M + \alpha i A] \\
&\quad + (k-1)^2 [N_{k-1}^{-1} + 4kM + 2\alpha i A] N_{k-1} N_k^{-1} \} N_k \\
&= k^2 M N_{k+1} [2 - 2(2k+1)M_k + 4kM_{k-1} - 2k^2 \alpha i A N_k + 2(k-1)^2 \alpha i A N_{k-1}] \\
&= k^2 M N_{k+1} [2 - 4k(M_k - M_{k-1}) - 2M_k - 2k^2 \alpha i A (N_k - N_{k-1}) - 2(2k-1) \alpha i A N_{k-1}] \\
&= \frac{k^2}{(k+1)^2} M_{k+1} \left[2 - \frac{4k}{k-1} (k-1)(M_k - M_{k-1}) - 2M_k - 2k^2 \alpha i A (N_k - N_{k-1}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(2k-1) \alpha i}{a + \alpha i(k-1)} (I_X - M_{k-1}) \right] \tag{3.5}
\end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned}
&k^2 (S_{k+1} - 2S_k + S_{k-1}) \\
&= k^2 [(k+1)N_{k+1} - 2kN_k + (k-1)N_{k-1}] \\
&= k^2 N_{k+1} [(k+1)N_k^{-1} - 2kN_{k+1}^{-1} + (k-1)N_{k+1}^{-1} N_{k-1} N_k^{-1}] N_k \\
&= k^2 N_{k+1} \{ (k+1)N_k^{-1} - 2k[(k+1)^2 M + (a + \alpha i(k+1))A] \\
&\quad + (k-1)[(k+1)^2 M + (a + \alpha i(k+1))A] N_{k-1} N_k^{-1} \} N_k \\
&= k^2 N_{k+1} \{ (k+1)N_k^{-1} - 2k[N_k^{-1} + (2k+1)M + \alpha i A] \\
&\quad + (k-1)[N_{k-1}^{-1} + 4kM + 2\alpha i A] N_{k-1} N_k^{-1} \} N_k \\
&= k^2 N_{k+1} [-2k(2k+1)MN_k + 4k(k-1)MN_{k-1} - 2k\alpha i A N_k + 2(k-1)\alpha i A N_{k-1}] \\
&= kN_{k+1} [-2k^2(2k+1)MN_k + 4k^2(k-1)MN_{k-1} - 2k^2 \alpha i A N_k + 2k(k-1)\alpha i A N_{k-1}] \\
&= kN_{k+1} [-2(2k+1)M_k + 4kM_{k-1} + 4k(k-1)MN_{k-1} - 2k^2 \alpha i A (N_k - N_{k-1}) - 2k\alpha i A N_{k-1}] \\
&= \frac{k}{k+1} S_{k+1} \left[\frac{-4k}{k-1} (k-1)(M_k - M_{k-1}) - 2M_k + \frac{4k}{k-1} M_{k-1} - 2k^2 \alpha i A (N_k - N_{k-1}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2k\alpha i}{a + \alpha i(k-1)} (I_X - M_{k-1}) \right]. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

另一方面, 根据 (2.4) 得

$$\begin{aligned}
&2k^2 \alpha i A (N_k - N_{k-1}) \\
&= -2k^2 (2k-1) \alpha i A N_k M N_{k-1} + 2k^2 \alpha^2 A N_k A N_{k-1} \\
&= \frac{-2k^2 (2k-1) \alpha i}{(k-1)^2 (a + \alpha i k)} (I_X - M_k) M_{k-1} + \frac{2k^2 \alpha^2}{(a + \alpha i k)(a + \alpha i(k-1))} [I_X - M_k] [I_X - M_{k-1}]. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

由 (3.4)–(3.7) 知

$$\sup_k \|k^2 (M_{k+1} - 2M_k + M_{k-1})\| < \infty, \quad \sup_k \|k^2 (S_{k+1} - 2S_k + S_{k-1})\| < \infty.$$

因此 $\{M_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 与 $\{S_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 是 M -有界的. 根据定理 3.3 有 $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 和 $(S_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子. $\square$

下面结果给出 (2.2) 具有 $B_{p,q}^s$ -适定性的一个充分条件.

定理 3.7 设 X 为 Banach 空间, $1 \leq p, q \leq \infty, s > 0$, A, M 为 X 中闭线性算子满足 $D(A) \subset D(M)$. 假设 $i\mathbb{Z} \subset \rho_M(A)$ 且 $\{kN_k : k \in \mathbb{Z}\}, \{k^2 M N_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 是范数有界的, 这里 $N_k = [k^2 M + (a + \alpha i k)A]^{-1}$. 则 (2.2) 具有 $B_{p,q}^s$ -适定性.

证明 让 $M_k = k^2 MN_k, S_k = kN_k$ ($k \in \mathbb{Z}$). 根据命题 3.6, $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 和 $(S_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子. 由注 3.4 知 $(\frac{-1}{k}I)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子. 注意到 $(S_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子, 因此 $(-N_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 也是 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子. 故任给 $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$, 存在 $u \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$ 使得

$$\hat{u}(k) = -N_k \hat{f}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (3.8)$$

因为 $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子, 存在 $v \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$ 满足

$$\hat{v}(k) = M_k \hat{f}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (3.9)$$

观察

$$AN_k = \frac{1}{a + \alpha i k} (I_X - M_k),$$

于是

$$A\hat{u}(k) = \frac{-1}{a + \alpha i k} \hat{f}(k) + \frac{1}{a + \alpha i k} M_k \hat{f}(k) = \frac{-1}{a + \alpha i k} \hat{f}(k) + \frac{1}{a + \alpha i k} \hat{v}(k).$$

根据注 3.4 知 $(\frac{1}{a + \alpha i k} I)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子. 由文献 [1, 引理 3.1] 知 $u(t) \in D(A)$ 且 $Au \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$. 类似地, 有

$$Ak\hat{u}(k) = \frac{-k}{a + \alpha i k} \hat{f}(k) + \frac{k}{a + \alpha i k} \hat{v}(k) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

同样可以证明 $u'(t) \in D(A)$ 且 $Au' \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$.

因为 $(-iS_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子, 存在 $w \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$ 使得

$$\hat{w}(k) = -ikN_k \hat{f}(k) = ik\hat{u}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

于是 $u \in B_{p,q}^{s+1}(\mathbb{T}, X)$. 我们已经证明了 $u \in B_{p,q}^{s+1}(\mathbb{T}, X) \cap B_{p,q}^s(\mathbb{T}, D(A))$ 且 $u' \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, D(A))$.

注意到 $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 和 $(\frac{-1}{k}I)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子, 于是 $(-ikMN_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子. 因此存在 $h \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$ 使得

$$\hat{h}(k) = -ikMN_k \hat{f}(k) = ikM\hat{u}(k) = [Mu']^\wedge(k).$$

这样 $u' \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, D(M))$. 根据 (3.9) 得

$$\hat{v}(k) = M_k \hat{f}(k) = k^2 MN_k \hat{f}(k) = -k^2 M\hat{u}(k) = [(Mu')']^\wedge(k).$$

于是 $Mu' \in B_{p,q}^{s+1}(\mathbb{T}, X)$. 故 $u \in S_{p,q,s}(A, M)$. 由 (3.8) 知

$$-k^2 M\hat{u}(k) - aA\hat{u}(k) - \alpha i k A\hat{u}(k) = \hat{f}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

因此由唯一性定理知 $(Mu')'(t) = aAu(t) + \alpha Au'(t) + f(t)$ 几乎处处成立^[1]. 于是 u 为 (2.2) 的 $B_{p,q}^s$ -强解. 这样就证明了存在性.

下面证明唯一性, 设 $u \in S_{p,q,s}(A, M)$ 使得

$$(Mu')'(t) - aAu(t) - \alpha Au'(t) = 0$$

几乎处处成立. 两边取 Fourier 变换有

$$[-k^2 M - (a + \alpha i k)A]\hat{u}(k) = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

根据 $\{ik : k \in \mathbb{Z}\} \in \rho_M(A)$ 知 $u = 0$. 因此 (2.2) 具有 $B_{p,q}^s$ - 适定性. $\square$

下面结果给出 (2.2) 具有 $B_{p,q}^s$ - 适定性的一个必要条件.

定理 3.8 设 X 为 Banach 空间, $1 \leq p, q \leq \infty, s > 0$, A, M 为 X 中闭线性算子满足 $D(A) \subset D(M)$. 假设 (2.2) 具有 $B_{p,q}^s$ - 适定性. 则 $i\mathbb{Z} \subset \rho_M(A)$ 且 $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子, 这里 $M_k = k^2 M[k^2 M + (a + \alpha ik)A]^{-1}$ ($k \in \mathbb{Z}$). 特别地, 集合 $\{M_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 是范数有界的.

证明 设 $k \in \mathbb{Z}, y \in X$, 定义 $f(t) = e^{ikt}y$ ($t \in \mathbb{T}$). 则 $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$, $\hat{f}(k) = y$ 且 $\hat{f}(n) = 0$ ($n \neq k$). 因为 (2.2) 具有 $B_{p,q}^s$ - 适定性, 则存在唯一 $u \in S_{p,q,s}(A, M)$ 使得

$$(Mu')'(t) - aAu(t) - \alpha Au'(t) = f(t)$$

几乎处处成立, 于是根据文献 [1, 引理 3.1] 知 $\hat{u}(n) \in D(A)$ ($n \in \mathbb{Z}$). 两边取 Fourier 变换有

$$[-k^2 M - (a + \alpha ik)A]\hat{u}(k) = y \quad (3.9)$$

且 $[-n^2 M - (a + \alpha in)A]\hat{u}(n) = 0$ ($n \neq k$). 故 $-k^2 M - (a + \alpha ik)A$ 是满射. 下面证明 $-k^2 M - (a + \alpha ik)A$ 是单射, 设 $x \in D(A)$ 满足

$$[-k^2 M - (a + \alpha ik)A]x = 0.$$

定义 $u(t) = e^{ikt}x$ ($t \in \mathbb{T}$), 则 $u \in S_{p,q,s}(A, M)$ 且 (2.2) 几乎处处成立, 其中 $f = 0$. 于是 u 为 (2.2) 的 $B_{p,q}^s$ - 强解, 其中 $f = 0$. 由唯一性假设知 $x = 0$. 于是 $-k^2 M - (a + \alpha ik)A$ 是单射. 因此 $-k^2 M - (a + \alpha ik)A$ 是 $D(A)$ 到 X 上的双射.

下证 $[-k^2 M - (a + \alpha ik)A]^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. 设 $f(t) = e^{ikt}y$ 且 $u \in S_{p,q,s}(A, M)$ 为 (2.2) 的 $B_{p,q}^s$ - 强解. 则

$$\hat{u}(n) = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ [-k^2 M - (a + \alpha ik)A]^{-1}, & n = k. \end{cases}$$

于是 $u(t) = e^{ikt}[-k^2 M - (a + \alpha ik)A]^{-1}y$. 根据 (3.3) 知, 存在独立于 y 和 k 的常数 $C > 0$ 使得

$$\|u\|_{B_{p,q}^s} + \|u'\|_{B_{p,q}^s} + \|Au\|_{B_{p,q}^s} + \|Au'\|_{B_{p,q}^s} + \|Mu'\|_{B_{p,q}^s} + \|(Mu')'\|_{B_{p,q}^s} \leq C \|f\|_{B_{p,q}^s}.$$

因此 $\|[-k^2 M - (a + \alpha ik)A]^{-1}y\| \leq C\|y\|$, $\forall y \in X$. 故

$$\|[-k^2 M - (a + \alpha ik)A]^{-1}\| \leq C.$$

我们已经证明了 $\{ik : k \in \mathbb{Z}\} \in \rho_M(A)$, 即 $i\mathbb{Z} \subset \rho_M(A)$.

最后证明, 若 $M_k = k^2 M[k^2 M + (a + \alpha ik)A]^{-1}$ ($k \in \mathbb{Z}$), 则 $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子. 设 $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$, 则存在 $u \in S_{p,q,s}(A, M)$ 为 (2.2) 的 $B_{p,q}^s$ - 强解. (2.2) 两边取 Fourier 变换有, $\hat{u}(k) \in D(A)$ 且 $[-k^2 M - (a + \alpha ik)A]\hat{u}(k) = \hat{f}(k)$ ($k \in \mathbb{Z}$). 因为 $-k^2 M - (a + \alpha ik)A$ 可逆, 故

$$\hat{u}(k) = [-k^2 M - (a + \alpha ik)A]^{-1}\hat{f}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

由 $u \in S_{p,q,s}(A, M)$ 知

$$[(Mu')']^\wedge(k) = -k^2 M\hat{u}(k) = M_k \hat{f}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

又因为 $(Mu')' \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$, 于是 $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $B_{p,q}^s$ -Fourier 乘子. 根据命题 3.6 知 $\{M_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 是范数有界的. $\square$

致谢 作者对审稿人的宝贵建议深表感谢.

参考文献

- 1 Arendt W, Bu S. The operator-valued Marcinkiewicz multiplier theorem and maximal regularity. *Math Z*, 2002, 240: 311–343
- 2 Arendt W, Bu S. Operator-valued Fourier multipliers on periodic Besov spaces and applications. *Proc Edinb Math Soc*, 2004, 47: 15–33
- 3 Bu S, Kim J. Operator-valued Fourier multipliers on periodic Triebel spaces. *Acta Math Sinica Engl Ser*, 2005, 21: 1049–1056
- 4 Keyantuo V, Lizama C. Periodic solutions of second order differential equations in Banach spaces. *Math Z*, 2006, 253: 489–514
- 5 Lizama C, Ponce R. Periodic solutions of degenerate differential equations in vectorvalued function spaces. *Studia Math*, 2011, 202: 49–63
- 6 Bu S, Fang Y. Periodic solutions for second order integro-differential equations with infinite delay in Banach spaces. *Studia Math*, 2008, 184: 103–119
- 7 Keyantuo V, Lizama C. Fourier multipliers and integro-differential equations in Banach spaces. *J London Math Soc*, 2004, 69: 737–750
- 8 Keyantuo V, Lizama C. Maximal regularity for a class of integro-differential equations with infinite delay in Banach spaces. *Studia Math*, 2005, 168: 25–50
- 9 Keyantuo V, Lizama C, Pobleto V. Periodic solutions of integro-differential equations in vector-valued function spaces. *J Differential Equations*, 2009, 246: 1007–1037
- 10 Pobleto V. Solutions of second-order integro-differential equations on periodic Besov spaces. *Proc Edinb Math Soc*, 2007, 50: 477–492
- 11 Bourgain J. Vector-valued singular integrals and the H1-BMO duality. In: *Probability Theory and Harmonic Analysis* (Cleveland, OH, 1983). *Festbooks Pure Appl Math*, vol. 98. New York: Dekker, 1988, 1–19
- 12 Bu S, Fang Y. Maximal regularity of second order delay equations in Banach spaces. *Sci China Math*, 2010, 53: 51–62
- 13 Bu S. Well-posedness of second order degenerate differential equations in vector-valued function spaces. *Studia Math*, 2013, 214: 1–16

Periodic solution of second order degenerate differential equation in Banach spaces

CAI Gang

Abstract In this paper, we study the well-posedness of the second order degenerate differential equation: $[Mu']'(t) - aAu(t) - \alpha Au'(t) = f(t)$ ($t \in \mathbb{T} := [0, 2\pi]$) with periodic boundary conditions $u(0) = u(2\pi)$, $(Mu')(0) = (Mu')(2\pi)$, in periodic Lebesgue-Bochner spaces $L^p(\mathbb{T}, X)$ and periodic Besov spaces $B_{p,q}^s(\mathbb{T}, X)$. Using operator-valued Fourier multipliers theorems, we give necessary or sufficient conditions for the above equation.

Keywords operator-valued Fourier multipliers, well-posedness, UMD-spaces, Besov spaces

MSC(2010) 47D06, 47D09, 47F05, 35L70, 35G20

doi: 10.1360/012015-16