快速 Hermite 径向基函数曲面重构

刘圣军^{①②}, 刘新儒^{②*}^① 中南大学高性能复杂制造国家重点实验室, 长沙 410083^② 中南大学数学与统计学院, 长沙 410083

* 通信作者. E-mail: liuxinru@csu.edu.cn

收稿日期: 2014-07-24; 接受日期: 2014-08-19

国家自然科学基金 (批准号: 61173119, 11271376)、教育部新世纪优秀人才支持计划 (批准号: NECT-13-0590)、湖南省科技计划重点项目 (批准号: 2014FJ2008)、浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室开放课题 (批准号: A1414)、中南大学数学与交叉科学重点项目和中南大学博士后基金资助项目

摘要 在这篇论文中, 我们提出了一个使用局部支撑径向基函数对三维散乱点进行 Hermite 插值或逼近的快速曲面重构方法. 通过构造给定数据点集的一个层次结构, 采用逐层精化的方式实现了全局曲面重构的效果, 解决了因使用局部支撑径向基函数导致的问题. 另外, 设计一个基于逼近误差导向的径向基函数中心点选择策略, 减少每层进行插值的数据点, 从而使 Hermite 径向基函数曲面重构方法能处理百万以上规模的点云数据. 实验结果显示, 我们的方法还适用于极度非均匀分布或带噪声的点云数据的曲面重构.

关键词 多层插值 Hermite 插值 径向基函数 曲面重构 散乱点

1 引言

随着三维扫描设备的普遍使用, 出现了越来越多使用扫描设备获取的点云数据. 为了对散乱点数据表示的模型进行进一步处理, 通常会由这些点数据重构出曲面. 在计算机图形学、计算机辅助设计/制造等领域中, 已经存在许多文献研究散乱点云重构曲面的技术^[1,2]. 其中, 基于径向基函数的曲面重构方法由于其数学与计算的简单性及处理非均匀分布点数据的能力, 成为散乱点插值或逼近的主要方法之一^[3~5].

最近, Macedo 等^[6]提出 Hermite 径向基函数隐式曲面重构方法. 该方法能构造出插值一阶 Hermite 数据的隐式曲面, 即同时插值所给数据点的位置及法向. 使用相同的数据, 作者表示他们的方法能获得比文献^[3,7]更好的结果曲面. 径向基函数曲面重构方法通常都需要求解一个线性系统以找到基函数的系数. 给定包含 n 个数据点的集合, 文献^[6]方法会形成一个 $4n \times 4n$ 的线性系统. 当 n 比较大时, 求解一个 $4n \times 4n$ 的线性系统非常费时. 而在实际应用中, 一个点云数据可能包含几十万甚至千万的点云数据. 空间和时间的巨大消耗极大地制约了文献^[6]方法的广泛使用. 为了减少计算量, 文献^[6]使用局部支撑的径向基函数^[8]构造了稀疏的线性系统. 然而, 采用局部支撑的径向基函数会导致在支撑半径范围外出现不需要的额外形状. 文献^[6]采用对拟合函数增加 d 次多项式 ($d = 0, 1, 2$) 的方式增强数据所在空间以消除额外形状, 但构造了一个更大的 $(4n + 3d + 1) \times (4n + 3d + 1)$ 线性系统.

引用格式: 刘圣军, 刘新儒. 快速 Hermite 径向基函数曲面重构. 中国科学: 信息科学, 2014, 44: 1409–1421, doi: 10.1360/N112014-00194

本文提出一个快速 Hermite 径向基函数曲面重构方法. 它采用分层拟合, 逐步求精的过程实现了一个全局曲面重构, 避免出现额外的曲面. 另外, 基于逼近误差, 在每一层的重构过程中有选择性地减少径向基函数中心的数量, 提高曲面重构效率. 对于数据点的位置及法向, 分别提供两个可调参数, 控制重构曲面的光滑程度, 从而使多层 Hermite 径向基函数曲面重构方法能处理具有噪声点 (包括法向噪声) 的点云数据.

在后面的章节安排中, 第 2 节将介绍与曲面重构相关的研究工作及进展, 并重点介绍 Hermite 径向基函数插值方法. 我们的快速 Hermite 径向基函数曲面重构方法将在第 3 节介绍. 第 4 节将给出一些数据实例及相关的统计数据, 并讨论参数的取值. 最后在第 5 节对本文进行总结并给出未来的工作方向.

2 Hermite 径向基函数曲面插值

曲面重构是几何造型及处理中的一个非常重要的过程. 由于不需要任何拓扑信息约束, 隐式曲面特别适合用于修复不完整数据. 从 Ricci^[9] 和 Blinn^[10] 的早期工作开始, 使用隐式曲面进行造型逐渐成为一个较为活跃的研究领域. 在这个领域里, 出现了最新的一些研究工作包括水平集方法^[11,12]、变分隐式曲面^[13~15]、距离场^[16,17]、多层单位分解隐式重构方法^[18,19]、活动最小二乘^[20~22]、Poisson 曲面重构^[23,24]等. 法向信息在隐式曲面重构方法中具有非常重要的作用, 它可以标记物体表面的内外, 同时描述了曲面的一阶属性. 前述的研究工作都只使用法向量来标识曲面内外. 文献 [6] 中的曲面重构方法充分使用了法向信息的二个功能, 重构出插值于给定数据点法向量的曲面.

假设给定点云数据集 $P = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^3$ 及其对应的法向量集合 $N = \{\mathbf{n}_i\}_{i=1}^n, \mathbf{n}_i \in \mathbb{R}^3$, Hermite 径向基函数隐式曲面重构方法将所有的点作为 Hermite 径向基函数的中心, 从而构造出一个函数 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) - \langle \beta_i, \nabla \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \rangle), \quad (1)$$

其中 $\varphi(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x}\|)$ 为径向基函数, $\phi(t) = (1-t)^4 + (4t+1)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}, \beta_i \in \mathbb{R}^3$ 为未知系数, 可以由下列约束条件唯一确定

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}_j) = 0, \\ \nabla f(\mathbf{x}_j) = \mathbf{n}_j, \end{cases} \quad \forall \mathbf{x}_j \in P, \mathbf{n}_j \in N, \quad (2)$$

即

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \varphi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) - \langle \beta_i, \nabla \varphi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \rangle) = 0, \\ \nabla f(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \nabla \varphi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) - \mathbf{H} \varphi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \beta_i) = \mathbf{n}_j, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\mathbf{H}$ 为 Hess 操作符. 将式 (3) 写成矩阵形式

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{c}, \quad (4)$$

其中 $\mathbf{A}$ 为一个 $4n \times 4n$ 的矩阵,

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{j,i})_{n \times n}, \mathbf{A}_{j,i} = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) & -\nabla \varphi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \\ \nabla \varphi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) & -\mathbf{H} \varphi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad (5)$$

λ 和 $\mathbf{c}$ 为 $4n$ 维的向量, 其第 j 子块分别为 $[\alpha_j \ \beta_j]^T$ 和 $[0 \ \mathbf{n}_j]^T$.

由数字实验我们发现, 在使用 Hermite 径向基函数隐式曲面重构方法重构曲面过程中, 当给定的数据集 P 中点的个数 n 比较小时, 法向信息的作用非常大, 它除了标记物体表面的内外, 还反映了曲面的局部几何特征; 然而, 当数据点个数 n 比较大时, 法向信息的作用逐渐减弱, 其反映曲面局部几何特征的作用将被数据点的位置信息所取代, 从而它主要承担识别物体表面内外的作用. 文献 [6] 中讨论了 Hermite 径向基函数隐式曲面对重构稀疏数据所表示曲面的作用. 在本文中, 我们主要讨论大规模数据的快速曲面重构问题, 包含均匀数据、非均匀数据或带噪声数据的曲面重构. 我们的方法解决了文献 [6] 处理大数据量时出现的计算效率及空间需求问题, 并实现了全局重构.

3 快速 Hermite 径向基函数曲面重构

为了实现全局的曲面重构, 避免额外的形状生成, 不同于文献 [6] 采用的空间增强的方法, 我们采用分层的方法逐层精化地进行曲面重构. 我们根据给定的数据集 P 构建数据点集的一个层次结构 $\{P^1, P^2, \dots, P^K = P\}$, 通过偏移第 k 层点数据 P^k 的插值函数实现对第 $k+1$ 层数据点 P^{k+1} 的插值. 另外, 基于第 k 层的重构函数, 在给定的误差范围内, 我们选择对第 $k+1$ 层曲面重构贡献大的点作为第 $k+1$ 层的径向基函数中心, 从而实现更高效的曲面重构.

3.1 多层曲面重构

生成数据点集的层次结构 $\{P^1, P^2, \dots, P^K = P\}$ 及其对应的法向量集合 $\{N^1, N^2, \dots, N^K = N\}$ 后, 我们的多层曲面重构就是一个逐步求精的过程. 第 k 层插值函数的递推构造过程类似于文献 [25]. 只不过在每一层的重构过程中, 不需要利用法向信息进行局部曲面拟合, 而是直接进行法向量插值. 假设第 $k-1$ 层的曲面已经构造出来, 我们定义第 k 层与第 $k-1$ 层的曲面之间的差值为

$$\delta^k(\mathbf{x}) = f^k(\mathbf{x}) - f^{k-1}(\mathbf{x}), \quad (6)$$

其中初始重构函数定义为 $f^0(\mathbf{x}) = -1$. 采用 Hermite 径向基函数来描述该差值

$$\delta^k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n^k} (\alpha_i^k \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^k) - \langle \beta_i^k, \nabla \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^k) \rangle), \quad (7)$$

这里 n^k 为第 k 层数据点集 P^k 所包含的点的数量, $\mathbf{x}_i^k \in P^k$. 第 k 层数据点 $\mathbf{x}_i^k$ 满足式 (6), 将它们代入可得

$$\begin{cases} \delta^k(\mathbf{x}_j^k) = f^k(\mathbf{x}_j^k) - f^{k-1}(\mathbf{x}_j^k), \\ \nabla \delta^k(\mathbf{x}_j^k) = \frac{\nabla f^k(\mathbf{x}_j^k)}{\|\nabla f^k(\mathbf{x}_j^k)\|} - \frac{\nabla f^{k-1}(\mathbf{x}_j^k)}{\|\nabla f^{k-1}(\mathbf{x}_j^k)\|}, \end{cases}$$

其中 $\mathbf{x}_j^k \in P^k, \mathbf{n}_j^k \in N^k, j = 1, \dots, n^k$. 由 $f^k(\mathbf{x}_j^k) = 0, \nabla f^k(\mathbf{x}_j^k)/\|\nabla f^k(\mathbf{x}_j^k)\| = \mathbf{n}_j^k$, 上式形成线性系统

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n^k} (\alpha_i^k \varphi(\mathbf{x}_j^k - \mathbf{x}_i^k) - \langle \beta_i^k, \nabla \varphi(\mathbf{x}_j^k - \mathbf{x}_i^k) \rangle) = -f^{k-1}(\mathbf{x}_j^k), \\ \sum_{i=1}^{n^k} (\alpha_i^k \nabla \varphi(\mathbf{x}_j^k - \mathbf{x}_i^k) - H \varphi(\mathbf{x}_j^k - \mathbf{x}_i^k) \beta_i^k) = \mathbf{n}_j^k - \frac{\nabla f^{k-1}(\mathbf{x}_j^k)}{\|\nabla f^{k-1}(\mathbf{x}_j^k)\|}. \end{cases} \quad (8)$$

图 1 采用法向量插值与法向量近似的多层 Hermite 径向基函数曲面重构结果比较

Figure 1 Multi-level Hermite RBFs surface reconstruction with normal interpolation or normal approximation: (a) The given points; (b) the surface reconstructed by interpolating the normals of the points (a); (c) the reconstructed surface with normals approximation

采用预条件共轭梯度法 (preconditioned biconjugate gradient method)^[26] 求解稀疏线性系统 (8), 可唯一确定权系数 $\{\alpha_i^k, \beta_i^k\}_{i=1}^{n^k}$, 从而得到插值于第 k 层数据点集 P^k 及其法向量集 N^k 的函数 $f^k(\mathbf{x}) = f^{k-1}(\mathbf{x}) + \delta^k(\mathbf{x})$. 在上述多层径向基函数插值重构中, 每一层都需要插值数据点的位置及法向, 这将导致重构过程中约束太强, 出现过拟合现象, 如图 1(b) 所示. 为解决这个问题, 我们调整每一层线性系统的系数矩阵 $\mathbf{A}^k$ 为

$$\tilde{\mathbf{A}}^k = (\tilde{\mathbf{A}}_{j,i}^k)_{n^k \times n^k}, \tilde{\mathbf{A}}_{i,i}^k = \begin{pmatrix} 1 + \sigma_1^k & 0 \\ 0 & (20 + \sigma_2^k)/R_k^2 \mathbf{I} \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad (9)$$

其中 $\mathbf{I}$ 为一个 3×3 的单位向量, R_k 为第 k 层径向基函数的局部支撑半径, σ_1^k 和 σ_2^k 分别为两个控制位置插值及法向插值的参数, $\sigma_1^k = k\sigma_1$ 且 $\sigma_2^k = k\sigma_2$, 也即两个参数随重构层数的增大而增大. 对于无噪声的点云数据, 我们取 $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 100$ 能获得理想的重构曲面, 如图 1(c) 所示.

3.2 点集层次结构构造及径向基函数中心选择

我们构造数据点层次结构的方法类似于文献 [25]. 采用基于二次误差函数的方法^[27,28] 计算出最能代表每个子体网格中所包含数据点的形状的点及其法向量. 其中, 体网格的划分是采用八叉树的形式进行空间划分的.

在构造数据点集的层次结构 $\{P^1, P^2, \dots, P^K = P\}$ 及其对应的法向量集合 $\{N^1, N^2, \dots, N^K\}$ 过程中, 为了使得层次结构中每个中间层次的数据集中的点能尽可能表示给定的点云数据所表示的模型形状, 我们采用基于二次误差函数的方法计算空间划分后属于八叉树每个节点的数据点位置及其法向量, 它们能表示该节点所包含原始数据点描述的几何特征. 假设八叉树的一个节点 s 包含 m 个原始数据点 $\mathbf{x}_{s1}, \mathbf{x}_{s2}, \dots, \mathbf{x}_{sm}$, 其对应的法向量为 $\mathbf{n}_{s1}, \mathbf{n}_{s2}, \dots, \mathbf{n}_{sm}$, 我们将生成一个点 $\mathbf{x}_s$ 使得二次误差函数 $E(\mathbf{x})$ 最小,

$$E(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m (\mathbf{n}_{si} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{si}))^2. \quad (10)$$

图 2 数据点集层次结构中不同层的径向基函数中心选择结果 (第一行) 及其对应的重构曲面 (第二行)

Figure 2 The selected RBF centers in different levels of the points hierarchy (the first row) and their corresponding reconstructed surfaces (the second row). (a)–(e) are the 3rd–7th levels respectively

其法向量 $\mathbf{n}_s$ 可以通过最小化二次误差函数 $E(\mathbf{n})$ 获得,

$$E(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^m (\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{si}))^2. \quad (11)$$

它的朝向可以依据该节点包含所有数据点的平均法向量来确定

$$\mathbf{n}_s = \text{sgn}(\mathbf{n}_s \cdot \bar{\mathbf{n}}_s) \mathbf{n}_s, \quad (12)$$

其中 $\text{sgn}(\cdot)$ 为符号函数, $\bar{\mathbf{n}}_s = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{n}_{si}$.

数据点集层次结构的层数 K 由公式 $K = -\text{int}(\log_2(\rho^0/(2\rho^1))) + 1$ 确定, 其中 $\rho^1 = 0.75L$, L 为原始给定数据点集最小包围盒的对角线长度, ρ^0 与原始数据点集的分布密度有关, 取 $\rho^0 = 0.75\bar{L}$, $\bar{L}$ 为采用八叉树对原始数据进行组织后, 包含数据点个数不超过 8 个的八叉树叶子节点的平均对角线长度^[25]. 第 k 层的径向基函数局部支撑半径定义为 $R_k = 0.5R_{k-1}$.

当生成所有中间层的数据点及其对应法向后, 采用多层 Hermite 径向基函数曲面重构的方法将对每一层的数据点及其法向量进行插值. 然而, 求解由数据点位置及法向量的插值约束形成的大型线性系统将严重影响曲面重构效率. 减少径向基函数中心点的数量, 降低线性系统的维数成为提高曲面重构效率的一个有效手段. 在此, 我们将采取基于误差的方法逐层减少径向基函数中心的个数. 假设我们已经获得第 $k-1$ 层的重构函数 f^{k-1} , 对于第 k 层的数据点集 P^k 中的点 $\mathbf{x}_i^k$, 如果满足条件

$$\frac{|f^{k-1}(\mathbf{x}_i^k)|}{\|\nabla f^{k-1}(\mathbf{x}_i^k)\|} < \varepsilon_1, \quad \frac{\nabla f^{k-1}(\mathbf{x}_i^k) \cdot \mathbf{n}_i^k}{\|\nabla f^{k-1}(\mathbf{x}_i^k)\|} > \varepsilon_2, \quad (13)$$

则点 $\mathbf{x}_i^k$ 将不再作为第 k 层的径向基函数中心. 式 (13) 中, ε_1 和 ε_2 为用户根据逼近情况设定的参数. 在本文中, 我们设置 $\varepsilon_1 = 0.005$, $\varepsilon_2 = 0.866$. 图 2 显示了对图 1(a) 所示 Bimba 模型点云数据进行径向基函数中心点选择后的每一层插值点数据及其重构曲面.

图 3 采用单层与多层 Hermite 径向基函数曲面重构结果

Figure 3 Reconstruction results with the single-level and the multi-level Hermite RBFs: (a) A cross section of the distance field and the extracted iso-surface reconstructed by a single-level Hermite RBFs interpolation; (b)–(e) the cross sections of the distance fields and the interpolation surfaces of all levels created by our multi-level Hermite RBFs interpolation method

图 4 极度不均匀分布点云数据的 Hermite 径向基函数曲面重构

Figure 4 Reconstructed surfaces with the Hermite RBFs from a sharply non-uniformly distributed point cloud: (a) The given point cloud, (b)–(d) the reconstructed surfaces by the single-level interpolation method based on Hermite RBFs with different support radii, $R = 0.225, 0.3, 0.4$; (e) the reconstruction by our multi-level approximation method based on Hermite RBFs

4 实验结果与讨论

我们使用 Visual C++ 和 OpenGL 在普通个人电脑 (Intel®Core™ I7-3770, 双 CPU 3.40 GHz, 8 GB 内存) 上实现了本文的方法, 并使用多个不同规模 (4 万到 200 万) 的点云数据来检验算法. 所有的点云数据在重构前经过缩放或平移到一个 $20 \times 20 \times 20$ 的包围盒中.

4.1 单层与多层 Hermite 径向基函数曲面重构

图 3 显示了重构曲面函数所定义的空间距离场. 图 3(a) 为使用单层 Hermite 径向基函数曲面重构方法定义的距离场及结果曲面. 文献 [6] 采用空间增强的方法可去除图 3(a) 中出现的额外曲面 (圆环内部的两条黑色圆形线). 本文中的多层 Hermite 径向基函数曲面重构方法则通过构造给定数据点集的层次结构, 然后进行逐层曲面重构, 以一个逐步求精的过程实现最终的全局曲面重构, 所构造的各层距离场及曲面如图 3(b)–(e) 所示.

文献 [6] 的作者在论文中提到, Hermite 径向基函数曲面重构方法能较好地处理非均匀分布的数据点. 然而, 对于极度非均匀分布的点云数据, 如图 4(a), 采用单层 Hermite 径向基函数进行曲面重构时, 存在如何选择恰当的基函数支撑域半径的问题. 当基函数局部支撑域半径太小, $R = \rho^0 = 0.225$,

图 5 Moai 点云数据的曲面重构结果¹⁾

Figure 5 Reconstructed surfaces from the Moai model: (a) The given points; (b) the interpolation surface from all points; (c) the approximating surface with interpolating the selected points

则在数据点分布稀疏区域无法完成正确的曲面重构任务, 其重构时间为 129.1 秒, 如图 4(b) 所示. 随着支撑域半径增大, 在数据稀疏区域逐渐能成功重构出完整曲面, 但重构时间也随之增长. 如图 4(c) 和 (d) 所示, 其支撑半径分别为 $R = 0.3, 0.4$, 所需重构时间为 230.4 秒和 409.3 秒. 当我们继续增大支撑半径为 $R = 0.45$ 时, 则在数据点分布密集区域会产生大量的冗余计算, 并构造出稠密线性系统, 导致内存空间不足而无法求解. 而本文中的方法解决了该问题, 通过多层拟合实现高效地正确曲面的重构, 如图 4(e) 所示, 重构时间仅需 12.4 秒, 这里参数取值分别为 $\varepsilon_1 = 0.001$, $\varepsilon_2 = 0.866$, $\sigma_1 = 0$ 和 $\sigma_2 = 100$.

4.2 径向基函数中心点选择

当给定的点云数据的规模较大, 由于计算机内存空间约束及从计算效率方面考虑, 插值每一个数据点是不可行的. 我们将在每一层曲面重构过程开始前, 选择与前一层重构出的曲面逼近误差较大的点作为当前层曲面重构所使用的径向基函数中心, 选择准则如式 (13) 所定义. 式 (13) 的几何意义是数据点沿其所在位置梯度的方向与构造出的曲面的偏移距离不小于 ε_1 , 或梯度向量与法向量的夹角不小于 $\arccos \varepsilon_2$. 在实际曲面重构中, 除特殊说明外, 我们选择 $\varepsilon_1 = 0.005$, $\varepsilon_2 = 0.866$ (即角度为 30 度) 获得理想的重构结果.

在图 5~7 中, 我们给出了 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 100$ 的数据点位置插值曲面重构结果, 如图 5(b)~ 图 7(b) 所示, 和 $\varepsilon_1 = 0.005$, $\varepsilon_2 = 0.866$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 100$ 的数据点逼近曲面重构结果, 如图 5(c)~ 图 7(c) 所示. 它们的曲面重构时间及逼近误差在表 1 中列出. 由于单层插值和多层插值方法重构的曲面插值给定的点云数据, 曲面重构函数在给定点处的重构误差为零, 因而插值方法的重构误差没有在表 1 中列出. 在这里, 我们采用下式来近似数据点逼近重构曲面的平均逼近误差,

$$E_{\text{RMS}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|f(\mathbf{x}_i)|}{\|\nabla f(\mathbf{x}_i)\|}.$$

1) 论文中所使用的模型 (Moai, Bimba, MaxPlanck, Dinosaurs, Buste, Lion, Raptor, DancerChildren) 来自于 Aim@Shape 形状仓库, Bunny 模型来自于 Stanford 3D 扫描数据仓库, Rabbit 模型来自于 Cyberware.

图 6 Dinosaur 模型的点云数据曲面重构结果

Figure 6 Reconstructions from the points of Dinosaur: (a) The input point cloud; (b) a reconstructed surface with interpolating all points; (c) an approximating surface reconstructed by interpolating the selected points

图 7 Rabbit 模型点云数据的曲面重构结果

Figure 7 Reconstructions from the points of a rabbit model: (a) The input points; (b) a surface reconstructed by interpolating all points; (c) a surface approximated by interpolating the selected points

图 8 径向基函数中心选择过程所采用的阈值 (σ_1) 与重构误差之间的变化关系图

Figure 8 Mapping between the threshold values (σ_1) used in the RBF center selection and the reconstruction errors

图 8 给出了图 2 和图 5~7 中 4 个点云数据模型的曲面逼近误差随 ε_1 改变的变化关系图. 我们发现, 当阈值成倍数增大, 则最终曲面的逼近误差也近似成倍数增大. 取 $\varepsilon_1 = 0.005$, 可使重构精度及效率达到较好的平衡.

图 9~12 是另外 4 个数据实例. 由于数据点规模较大, 25.5 万 ~ 217.4 万个点, 如果不进行径向基

表 1 曲面重构时间及误差等统计信息表

Table 1 Runtime and error statistics for surfaces reconstruction

Figure index	Model	Number of points (k)	Interpolation				Approximation		
			Single-level		Multi-level		Multi-level		
			Number of centers (k)	Time (s)	Number of centers (k)	Time (s)	Number of centers (k)	Time (s)	$E_{\text{RMS}} (\times 10^{-5})$
Figure 5	Moai	40	40	25.4	65	20.9	23	5.1	5.4
Figure 6	Dinasour	56	56	60.3	69	97.6	37	28.7	3.6
Figure 2	Bimba	75	75	36.6	95	46.5	32	10.7	3.6
Figure 7	Rabbit	134	134	148.6	217	66.7	18	5.8	5.9
Figure 9	Buste	255	—	—	—	—	46	27.8	5.6
Figure 10	Lion	458	—	—	—	—	88	30.7	4.9
Figure 11	Raptor	1,000	—	—	—	—	198	359.1	6.4
Figure 12	Dancing-children	2,174	—	—	—	—	106	94.5	5

图 9 Buste 模型点云数据曲面重构结果

Figure 9 The reconstructed surface from the Buste model: (a) The input points; (b) the surface reconstructed by our method. For illustration, only 1/5 points are displayed in (a)

图 10 Lion 模型点云数据曲面重构结果

Figure 10 A reconstruction from the Lion model: (a) The given points; (b) the approximating surface with interpolating the selected points. For illustration, only 1/5 points are displayed in (a)

图 11 Raptor 模型点云数据的曲面重构结果

Figure 11 Reconstructed result from the points of a raptor model: (a) The given point cloud; (b) a surface approximated by interpolating the selected points. For the illustration purpose, only 1/20 points are displayed in (a)

图 12 Dancing-children 模型点云数据及其重构曲面

Figure 12 The points of a dancing-children model and the surface reconstructed from them: (a) The input points; (b) a reconstructed surface by interpolating the selected points. For illustration, only 1/20 points are displayed in (a)

图 13 以 Lion 模型为例, 径向基函数中心点个数与计算时间之间的统计曲线

Figure 13 With the Lion model as an example, the statistical curve between the number of RBF centers and the computing time

函数中心选择, 会因为插值点数量太多导致内存空间不足而无法进行曲面重构. 使用本文方法, 选择在每一层选择径向基函数中心点, 成功实现曲面重构. 每个例子所使用的径向基函数中心个数、重构时间及最终逼近误差如表 1 所列.

图 13 给出了本文多层逼近方法在进行曲面重构中径向基函数中心点个数与重构时间之间的统计曲线. 由于不同模型具有不同的形状特征, 这对曲面的重构时间有影响. 因而我们以单一模型 (Lion 模

图 14 对带噪声的点云数据的曲面重构

Figure 14 Surface reconstruction from a point cloud with noises: (a) A given noisy point cloud; (b) a surface reconstructed by approximating positions and normals, $\sigma_1 = 0.5, \sigma_2 = 100$; (c) a surface reconstructed by interpolating positions and normals, $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0$; (d) a surface reconstructed by interpolating positions and approximating normals, $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 100$; (e) a surface reconstructed by approximating positions and interpolating normals, $\sigma_1 = 0.5, \sigma_2 = 0$

型) 为例, 通过设置不同的径向基函数中心选择参数 ε_1 的值, 获得重构过程中各层的径向基函数中心点, 然后统计基于这些中心点进行曲面重构的计算时间. 由于本文方法采用多层拟合技术, 曲面重构的总计算时间是各层拟合时间之和, 而径向基函数中心点数量是各层中心点数量之和. 对于不同的参数 ε_1 , 其计算时间和中心点数量的主要差异产生于较高的细节层次. 由图 13 不难发现计算时间与径向基函数中心点数量之间的关系近似于线性关系.

4.3 带噪声点云数据的处理

对于带噪声的点云数据曲面重构, 我们使用式 (9) 求解线性系统以实现光滑的曲面重构. 在式 (9) 中有两个参数 σ_1, σ_2 分别控制对数据点的位置及其法向量拟合的光顺性. 理论上 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ 实现对数据点的位置及其法向量的插值. 然而, 由于我们采用多层重构方法, 每一层都进行法向量插值会导致最后生成的曲面出现过拟合现象. 因而, 通常设置 $\sigma_2 = 100$, 使重构曲面只对法向量进行逼近. 为了比较位置和法向噪声对曲面重构结果的影响, 我们使用取不同值的参数 σ_1, σ_2 进行曲面重构, 结果如图 14 所示. 图 14(a) 为给定的带噪声的点云数据. 设置 $\sigma_1 = 0.5, \sigma_2 = 100$ 将重构出逼近给定数据点位置及其法向量的光滑曲面, 如图 14(b) 所示. 我们取 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, 构造出位置和法向插值的曲面, 该曲面非常不光滑, 如图 14(c) 所示. 分别设置 $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 100$ 和 $\sigma_1 = 0.5, \sigma_2 = 0$ 可获得插值点的位置及逼近点的法向和逼近点的位置及插值点的法向的曲面, 如图 14(d) 和 (e) 所示. 从这些结果发现, 对于噪声数据, 相比于法向信息, 点的位置信息对重构的结果曲面质量影响更大.

5 结语

散乱点曲面重构一直是几何造型领域中的一个重要步骤. 随着三维扫描设备的发展, 点云数据的

获取越来越容易, 且数据规模也越来越大, 从而对曲面重构算法在重构精度及重构效率上提出了新的要求. 基于隐式曲面的重构方法由于不需要去考虑重构过程中的拓扑结构的变化且能光滑填补信息缺失区域, 成为主流方法之一. Hermite 径向基函数曲面重构方法^[6]通过插值给定点云数据的位置及其法向量实现曲面重建, 能处理非均匀分布数据及正确重建包含距离很近的局部面片的曲面. 然而, 由于点数据位置及法向量的插值约束, 会形成一个非常大的线性系统. 当数据点的规模较大时, 重构效率会急剧下降, 甚至因内存空间不足而无法进行曲面重构. 这些问题严重制约了 Hermite 径向基函数曲面重构的广泛应用. 我们采用分层重构、逐步求精的思想构造出快速 Hermite 径向基函数曲面重构方法, 实现了使用局部支撑基函数达到全局曲面重建的目的, 能处理极度非均匀分布点云数据及带噪声的数据. 为了处理大规模点云数据, 我们采用基于逼近误差的径向基函数选择策略, 减少每层进行插值的点数据, 实现在一定的重构精度范围内对散乱点云数据的快速曲面逼近重建.

在未来的工作中, 我们将继续探讨提高曲面重构效率的方法. 采用多核或图形处理器进行并行计算是一个有效方法. 此外, 如何在个人电脑上处理更大规模的散乱点云数据 (千万个点) 及更准确地重构带尖锐特征的曲面也是我们研究的一个方向.

参考文献

- 1 Dey T K. Curve and Surface Reconstruction: Algorithms with Mathematical Analysis. New York: Cambridge University Press, 2007. 173–202
- 2 Schall O, Samozino M. Surface from scattered points: a brief survey of recent developments. In: Proceedings of 1st International Workshop on Semantic Virtual Environment, 2005. 138–147
- 3 Carr J C, Beatson R K, Cherrie J B, et al. Reconstruction and representation of 3D objects with radial basis function. In: Proceedings of the 28th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, New York, 2001. 67–76
- 4 Turk G, O'Brien J F. Modeling with implicit surfaces that interpolate. ACM Trans Graph, 2002, 21: 855–873
- 5 Morse B S, Yoo T S, Rheingans P, et al. Interpolating implicit surfaces from scattered surfaces data using compactly supported radial basis functions. In: Proceedings of Shape Modeling International, Genova, 2001. 89–98
- 6 Macedo I, Gois J P, Velho L. Hermite radial basis functions implicit. Comput Graph Forum, 2011, 30: 27–42
- 7 Pan R J, Meng X X, Whangbo T K. Hermite variational implicit surface reconstruction. Sci China Ser-F: Inf Sci, 2009, 52: 308–315
- 8 Wendland H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degree. Adv Comput Math, 1995, 4: 389–396
- 9 Ricci A. A constructive geometry for computer graphics. Comput J, 1973, 16: 157–160
- 10 Blinn J F. A generalization of algebraic surface drawing. ACM Trans Graph, 1982, 1: 235–256
- 11 Sethian J A. Level Set Methods and Fast Marching Methods. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999
- 12 Zhao H, Osher S. Visualization, analysis and shape reconstruction of unorganized data sets. In: Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision and Graphics. Berlin: Springer, 2002. 1–25
- 13 Savchenko V V, Pasko A A, Okunev O G, et al. Function representation of solids reconstructed from scattered surface points and contours. Comput Graph Forum, 1995, 14: 181–188
- 14 Turk G, O'Brien J F. Shape transformation using variational implicit surfaces. In: Proceedings of ACM SIGGRAPH, 1999. 335–342
- 15 Turk G, O'Brien J F. Modelling with implicit surfaces that interpolate. ACM Trans Graph, 2002, 21: 855–873
- 16 Frisken S F, Perry R N, Rockwood A P, et al. Adaptively sampled distance fields: a general representation of shape for computer graphics. In: Proceedings of ACM SIGGRAPH, New York, 2000. 249–254
- 17 Calakli F, Taubin G. SSD: smooth signed distance surface reconstruction. Comput Graph Forum, 2011, 30: 1993–2002
- 18 Ohtake Y, Belyaev A, Alexa M, et al. Multilevel partition of unity implicit. ACM Trans Graph, 2003, 22: 463–470
- 19 Xiao C X. Multi-level partition of unity algebraic point set surfaces. J Comput Sci Technol, 2011, 26: 229–238
- 20 Alexa M, Behr J, Cohen-Or D, et al. Point set surfaces. In: Proceedings of the Conference on Visualization, 2001.

21–28

- 21 Guennebaud G, Gross M. Algebraic point set surface. *ACM Trans Graph*, 2007, 26: 23
- 22 Amenta N, Kil Y J. Defining point-set surfaces. *ACM Trans Graph*, 2004, 23: 264–270
- 23 Kazhdan M, Bolitho M, Hoppe H. Poisson surface reconstruction. In: *Proceedings of Symposium on Geometry Processing*, 2006. 61–70
- 24 Kazhdan M, Hoppe H. Screened poisson surface reconstruction. *ACM Trans Graph*, 2013, 32: 29
- 25 Ohtake Y, Belyaev A, Seidel H P. 3D scattered data interpolation and approximation with multilevel compactly supported RBFs. *Graph Mod*, 2005, 67: 150–165
- 26 Press W H, Teukolsky S A, Vetterling W T, et al. *Numerical Recipes in C++: The Art of Scientific Computing*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002
- 27 Garland M, Heckbert P S. Surface simplification using quadric error metrics. In: *Proceedings of SIGGRAPH*, 1997. 209–216
- 28 Ju T, Losasso F, Schaefer S, et al. Dual contouring of hermite data. *ACM Trans Graph*, 2002, 21: 339–346

Fast Hermite radial basis function surface reconstruction

LIU ShengJun^{1,2} & LIU XinRu^{2*}

1 *State Key Laboratory of High Performance Complex Manufacturing, Central South University, Changsha 410083, China;*

2 *School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410083, China*

*E-mail: liuxinru@csu.edu.cn

Abstract In this paper, a fast method with compactly supported radial basis functions (CSRBFs) is presented for Hermite surface interpolation or approximation from scattered points. By constructing a hierarchy of the given points, a global surface reconstruction is achieved in a coarse-to-fine way which overcome the problems resulted from using CSRBFs. Moreover, we design a radial basis function center selection approach based on approximating errors, to reduce the interpolating points on each level, which make the Hermite radial basis function implicit to be able to deal with point clouds more than one million of points. The experiments demonstrate our method is also suitable for handling extremely nonuniform or noisy point clouds.

Keywords multi-level interpolation, Hermite interpolation, radial basis function, surface reconstruction, scattered points

LIU ShengJun was born in 1979. He received the Ph.D. degree in computer graphics from Zhejiang University in 2007. Currently, he is a professor at Central South University. His research interests include geometric modeling, computer graphics, and computer aided design /manufacture.

LIU XinRu was born in 1982. He received the Ph.D. degree in applied mathematics from the Central South University, Changsha, in 2011. Currently, he is a Intermediate Researcher at Central South University. His research interests include CAD, CAM and function optimization.