随机环境中两性分枝过程的极限性质

李应求*, 胡杨利, 张影

长沙理工大学数学与计算科学学院, 长沙 410114

E-mail: liyq-2001@163.com, hyangli2014@163.com, lnzhying@sina.com

收稿日期: 2015-01-28; 接受日期: 2015-02-27; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11171044)、湖南省自然科学基金 (批准号: 11JJ2001 和 13JJ6048) 和湖南省高等学校科研基金 (批准号: 14B010) 资助项目

摘要 在随机环境两性分枝过程中, 本文引入每个配对单元的条件均值增长率, 讨论它的性质, 得到了过程的条件均值的上、下界, 研究了过程由此上、下界规范化后的极限性质. 特别地, 本文还研究了各代雄性、雌性个体数适当规范化后的极限性质, 建立了过程与各代雄性、雌性个体数规范化后的等价定理.

关键词 随机环境 两性分枝过程 几乎处处收敛 L^1 -收敛

MSC (2010) 主题分类 60K37, 60J80

1 引言

为了更精确地描述生物、物理和化学中的人口模型, Daley 于 1968 年引入了两性分枝过程. 这个模型得到了广泛关注, 许多学者探讨了它的灭绝概率、极限性质和统计推断等问题 (参见文献 [1–4]). 最近, 为了描述更复杂的有性别的物种模型, 一些改进的两性分枝过程模型被引进来, 如具有迁入的两性分枝过程^[5]、配对依赖人口数的两性分枝过程^[6]、变化环境中两性分枝过程^[7] 和随机环境中两性分枝过程^[8].

特别地, 文献 [8] 引入了后代分布随着随机环境变化的随机环境中两性分枝过程, 得到了有关该模型的概率母函数的结论和必然或非必然灭绝的充分条件. 这个模型的生物背景与分枝过程的生物背景相同^[9, 11, 12], 如某些物种的发展繁衍常常受天气条件和食物供给等环境因素的影响.

本文继续研究这个两性分枝模型. 第 2 节给出模型的数学定义; 第 3 节引进配对单元的条件均值增长率, 讨论相关性质, 得到了随机环境中两性分枝过程条件均值的上、下界; 第 4 节以此上、下界为规范化因子, 分别研究过程规范化后的极限性质, 也给出了几乎处处收敛和 L^1 -收敛到非退化到 0 的随机变量的条件; 第 5 节将过程条件均值的上、下界稍作修改, 来作为各代雌性、雄性个体数的规范化因子, 讨论雌性、雄性个体数规范化后的极限性质, 特别是给出了过程与雌性 (雄性) 个体数规范化后 L^1 -收敛的等价定理.

2 模型的描述

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间, (Θ, Σ) 是可测空间, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \dots\}$. 假设配对函数 L :

英文引用格式: Li Y Q, Hu Y L, Zhang Y. Limiting behaviors of bisexual branching processes in random environments (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 611–622, doi: 10.1360/N012015-00058

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 关于每个自变量是单调非降的, 且对任意的 $x, y \in \mathbb{N}$, $L(0, y) = L(x, 0) = 0$. 设 $\vec{\xi} = \{\xi_n, n = 0, 1, \dots\}$ 是列 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 到 (Θ, Σ) 的随机映射; 对任意固定的 $\theta \in \Theta$, $\{p_j(\theta), j = 0, 1, \dots\}$ 是概率分布列. 2006 年, Ma^[8] 将两性分枝过程推广到了随机环境中.

定义 2.1 设 $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ 是满足下列条件的随机过程,

(i) $Z_0 = 1, (F_{n+1}, M_{n+1}) = \sum_{i=1}^{Z_n} (f_{ni}, m_{ni}), Z_{n+1} = L(F_{n+1}, M_{n+1}), n \in \mathbb{N}$;

(ii) $P(f_{ni} + m_{ni} = j \mid \vec{\xi}) = p_j(\xi_n), n, j \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}_+$;

(iii) $P(f_{ni} = j_{ni}, m_{ni} = k_{ni}, 0 \leq n \leq l, 1 \leq i \leq m \mid \vec{\xi}) = \prod_{n=0}^l \prod_{i=1}^m P(f_{ni} = j_{ni}, m_{ni} = k_{ni} \mid \xi_n), j_{ni}, k_{ni} \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_+$,

其中给定 $\vec{\xi}$, 对任意固定的 $n \in \mathbb{N}$, 第 n 代配对单元产生的第 $n+1$ 代个体以概率 $\alpha(\xi_n)$ 为雌性、 $1-\alpha(\xi_n)$ 为雄性, 而 $\alpha(\xi_n)$ 是根据 ξ_n 在 $[0, 1]$ 上取值的变量, 称 $\vec{Z} = \{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ 是随机环境 $\vec{\xi}$ 中两性分枝过程.

在定义 2.1 中, (f_{ni}, m_{ni}) 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 到 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 的随机映射, 表示第 n 代第 i 个配对单元产生的雌性、雄性后代个体数; (F_n, M_n) 表示第 n 代所有雌性、雄性个体数, 它们生成 n 代配对单元数 $Z_n = L(F_n, M_n)$. 由条件 (iii) 可得, 给定 $\vec{\xi}$, 各代各配对单元产生的雌性、雄性后代个体数相互独立, 而只与各自“父辈”的环境有关.

定义 2.2 称配对函数 L 是上可加的, 若对 $k \in \mathbb{N}_+$,

$$L\left(\sum_{i=0}^k (x_i, y_i)\right) \geq \sum_{i=0}^k L(x_i, y_i), \quad x_i, y_i \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

注 2.3 k 组个体混在一起可增加不同组的个体配对的机会, 那么就更容易配对成功, 所以, k 组个体混合配对比 k 组个体各自配对得到的配对单元数会更多. 因此, (2.1) 中配对函数的上可加性是一个合理的条件. 事实上, 不仅在两性分枝过程中, 在其他两性人口模型中, 配对函数通常也被要求是上可加的 (参见文献 [1]).

令 $\mathcal{F}_n(\vec{\xi}) = \sigma(Z_0, Z_1, \dots, Z_n; \vec{\xi}), n \in \mathbb{N}$. 全文假设: 对任意的 $x, y \in \mathbb{N}$, $L(x, y)$ 与 $\{\mathcal{F}_n(\vec{\xi}), n \in \mathbb{N}\}$ 相互独立, 配对函数 L 是上可加的.

3 条件均值增长率

由定义 2.1, 对任意的 $n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}_+, E(Z_{n+1} \mid Z_n = i, \vec{\xi})$ 仅与 ξ_n 和 i 有关, 所以, 我们定义配对单元的条件均值增长率如下:

$$r_j(\xi_n) = \frac{E(Z_{n+1} \mid Z_n = j, \vec{\xi})}{j}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N}_+. \quad (3.1)$$

显然,

$$r_1(\xi_n) = E\left(L\left(\sum_{i=1}^{Z_n} (f_{ni}, m_{ni})\right) \mid Z_n = 1, \vec{\xi}\right) = E(L(f_{n1}, m_{n1}) \mid \vec{\xi}). \quad (3.2)$$

引理 3.1 $r_1(\xi_n) = \inf_{j>0} r_j(\xi_n), n \in \mathbb{N}$.

证明 由定义、上可加性和 (3.2), 对任意的 $j \in \mathbb{N}_+$,

$$r_j(\xi_n) = j^{-1} E\left[L\left(\sum_{i=1}^j (f_{ni}, m_{ni})\right) \mid Z_n = j, \vec{\xi}\right] = j^{-1} E\left[L\left(\sum_{i=1}^j (f_{ni}, m_{ni})\right) \mid \vec{\xi}\right]$$

$$\begin{aligned} &\geq j^{-1} E \left[\sum_{i=1}^j L(f_{ni}, m_{ni}) \mid \vec{\xi} \right] = j^{-1} \sum_{i=1}^j E[L(f_{ni}, m_{ni}) \mid \vec{\xi}] \\ &= j^{-1} \sum_{i=1}^j E[L(f_{n1}, m_{n1}) \mid \vec{\xi}] = r_1(\xi_n), \end{aligned}$$

所以, $r_1(\xi_n) = \inf_{j>0} r_j(\xi_n)$, $n \in \mathbb{N}$. □

命题 3.2 由文献 [8, 命题 3.2],

$$r(\xi_n) := \lim_{j \rightarrow \infty} r_j(\xi_n) = \sup_{j>0} r_j(\xi_n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

对任意的 $n \in \mathbb{N}$, $r(\xi_n)$ ($r_1(\xi_n)$) 称为配对单元的条件均值增长率的上 (下) 界. 对于随机环境中两性分枝过程, 不能如随机环境中分枝过程一样得到其条件均值的表达式, 所以在以下命题中给出其上、下界.

命题 3.3

$$\prod_{k=0}^{n-1} r_1(\xi_k) \leq E(Z_n \mid \vec{\xi}) \leq \prod_{k=0}^{n-1} r(\xi_k), \quad n \in \mathbb{N}_+. \quad (3.4)$$

证明 用数学归纳法证明 (3.4). 由 (3.3),

$$E(Z_1 \mid \vec{\xi}) = E(Z_1 \mid Z_0 = 1, \vec{\xi}) = r_1(\xi_0) \leq r(\xi_0).$$

那么, (3.4) 对 $n = 1$ 成立. 现假设 (3.4) 对任意的 $n \in \mathbb{N}_+$ 成立, 往证 (3.4) 对 $n + 1$ 成立. 由 (3.1) 和引理 3.1,

$$\begin{aligned} E(Z_{n+1} \mid \vec{\xi}) &= E[E(Z_{n+1} \mid Z_n, \vec{\xi}) \mid \vec{\xi}] = E(Z_n r_{Z_n}(\xi_n) \mid \vec{\xi}) \\ &\geq E[Z_n r_1(\xi_n) \mid \vec{\xi}] = r_1(\xi_n) E(Z_n \mid \vec{\xi}) \\ &\geq \prod_{k=0}^n r_1(\xi_k), \end{aligned}$$

所以, (3.4) 中左式对 $n + 1$ 成立. 又由 (3.3),

$$\begin{aligned} E(Z_{n+1} \mid \vec{\xi}) &= E[Z_n r_{Z_n}(\xi_n) \mid \vec{\xi}] \leq E(Z_n r(\xi_n) \mid \vec{\xi}) \\ &= r(\xi_n) E(Z_n \mid \vec{\xi}) \leq \prod_{k=0}^n r(\xi_k), \end{aligned}$$

那么, (3.4) 中右式对 $n + 1$ 成立. 证毕. □

4 $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ 的极限

本节讨论 $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ 适当规范化后的极限性质. 本节假设 $\vec{\xi}$ 是独立的, 且

$$P(Z_n \rightarrow \infty) > 0. \quad (4.1)$$

由此可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EZ_n = \infty.$$

事实上, 由 Fatou 引理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EZ_n \geq E\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} Z_n\right) \geq E\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} Z_n \mid Z_m \rightarrow \infty\right)P(Z_m \rightarrow \infty) = \infty.$$

注 4.1 若 $\vec{\xi}$ 是一列独立同分布的随机变量, 且对任意的 $\theta \in \Theta$,

$$\int_0^1 g_\theta^n(s) ds \leq \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

其中 $g_{\xi_n}(s) := E(s^{X_{ni}} \mid \vec{\xi})$, $X_{ni} = L(f_{ni}, m_{ni})$, 那么 (4.1) 成立.

事实上, 由文献 [9, 定理 3.2], 我们有 $q := P(Z_n \rightarrow 0) < 1$, 从而, 由文献 [8, 命题 3.1], 有

$$P(Z_n \rightarrow \infty) = 1 - P(Z_n \rightarrow 0) = 1 - q > 0.$$

众所周知, 随机环境中分枝过程的规范化因子是过程本身的条件均值. 对于随机环境中两性分枝过程, 虽然我们得不到它条件均值的表达式, 但命题 3.3 得到了它条件均值的上、下界. 令

$$S_n = \prod_{k=0}^{n-1} r(\xi_k), \quad I_n = \prod_{k=0}^{n-1} r_1(\xi_k), \quad n \in \mathbb{N}_+,$$

且 $I_0 = S_0 = 1$. 我们将以序列 $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\{I_n, n \in \mathbb{N}\}$ 作为规范化因子, 定义序列 $\{\bar{W}_n, n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\{\widehat{W}_n, n \in \mathbb{N}\}$ 如下:

$$\bar{W}_n = I_n^{-1} Z_n, \quad \widehat{W}_n = S_n^{-1} Z_n.$$

接下来分别研究这两个序列的性质.

4.1 序列 $\{\bar{W}_n, n \in \mathbb{N}\}$ 的极限

定理 4.2 $\{\bar{W}_n, \mathcal{F}_n(\vec{\xi}), n \in \mathbb{N}\}$ 是下鞅. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\bar{W}_n$ 几乎处处收敛到非负随机变量 $\bar{W}$, 且 $E\bar{W} < \infty$, 如果

$$\prod_{k=0}^{\infty} E[r_1^{-1}(\xi_k)r(\xi_k)] < \infty. \quad (4.2)$$

证明 由定义 2.1 易得 $\vec{Z}$ 是随机环境 $\vec{\xi}$ 中 Markov 链. 所以, 由 (3.1) 和引理 3.1,

$$E[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n(\vec{\xi})] = E[Z_{n+1} \mid Z_n, \vec{\xi}] = Z_n r_{Z_n}(\xi_n) \geq Z_n r_1(\xi_n), \quad \text{a.s.} \quad (4.3)$$

(4.3) 两边乘以 I_{n+1}^{-1} , 得 $E[\bar{W}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n(\vec{\xi})] \geq \bar{W}_n$, a.s. 因此, $\{\bar{W}_n, n \in \mathbb{N}\}$ 关于 $\{\mathcal{F}_n(\vec{\xi}), n \in \mathbb{N}\}$ 是非负下鞅. 由 (3.4),

$$E[\bar{W}_n \mid \vec{\xi}] = I_n^{-1} E[Z_n \mid \vec{\xi}] \leq \prod_{k=0}^{n-1} r(\xi_k) r_1^{-1}(\xi_k). \quad (4.4)$$

由于 $\vec{\xi}$ 独立, (4.4) 两边取期望, 我们有

$$E[\bar{W}_n] \leq \prod_{k=0}^{n-1} E[r(\xi_k) r_1^{-1}(\xi_k)] \leq \prod_{k=0}^{\infty} E[r(\xi_k) r_1^{-1}(\xi_k)].$$

由题设, $\sup_{n \geq 0} E\bar{W}_n < \infty$. 因此, 由 Doob 收敛定理, 存在非负随机变量 $\bar{W}$, 且 $E\bar{W} < \infty$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{W}_n = \bar{W}, \quad \text{a.s.}$$

定理证毕. $\square$

注 4.3 (i) 如果以下式替代 (4.2), 定理 4.2 的结论亦成立,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \log E[r_1^{-1}(\xi_k)r(\xi_k)] < \infty \quad \text{或} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \{E[r_1^{-1}(\xi_k)r(\xi_k)] - 1\} < \infty. \quad (4.5)$$

(ii) 由 (4.5), 我们有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[r_1^{-1}(\xi_k)r(\xi_k)] = 1.$$

由 Fatou 引理可得

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} r_1^{-1}(\xi_k)r(\xi_k) = 1,$$

而这显然意味着, 随着代数的增长, 条件均值增长率的上、下界逐渐相互逼近, 从而使得各代所有条件均值增长率都相互非常接近.

(iii) 如果在定理 4.2 中假设 $\vec{\xi}$ 独立同分布, 那么, (4.2) 等价于 $r(\xi_0) = r_1(\xi_0)$, a.s.

引理 4.4 令 $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, 给定 $\vec{\xi}$,

(i) 若对任意固定的 $n \in \mathbb{N}$, $\{a_j(\xi_n), j \geq 1\}$ 是一个非增序列, 则存在 $\mathbb{R}^+$ 上一个非增函数 $\psi_{\xi_n}(\cdot)$ 使得 $\psi_{\xi_n}(j) \geq a_j(\xi_n)$, $j \in \mathbb{N}_+$, 且对 $x \geq 1$, $\psi_{\xi_n}^*(x) = x\psi_{\xi_n}(x)$ 是凹函数;

(ii) 若对任意固定的 $n \in \mathbb{N}$, $\{a_j(\xi_n), j \geq 1\}$ 是一个非降序列, 则存在 $\mathbb{R}^+$ 上一个非降函数 $\varphi_{\xi_n}(\cdot)$ 使得 $a_1(\xi_n) \leq \varphi_{\xi_n}(x)$, $x > 0$, $\varphi_{\xi_n}(j) \leq a_j(\xi_n)$, $j \in \mathbb{N}_+$, 且对 $x > 0$, $\varphi_{\xi_n}^*(x) = x\varphi_{\xi_n}(x)$ 是凸函数.

证明 由于 (i) 的证明与 (ii) 类似, 所以只证 (ii). 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$\varphi_{\xi_n}(x) = a_1(\xi_n)I_{(0,1)}(x) + x^{-1} \left[a_1(\xi_n) + \int_1^x a_{[t]}(\xi_n) dt \right] I_{[1,\infty)}(x), \quad x > 0,$$

其中 $[t]$ 表示 t 的整部, $I_A(x)$ 表示 A 的示性函数.

若 $0 < x < 1$, $\varphi_{\xi_n}(x) = a_1(\xi_n)$; 若 $x \geq 1$, 则

$$a_{[x]}(\xi_n) \geq x^{-1} \left[a_1(\xi_n) + \int_1^x a_{[x]}(\xi_n) dt \right] \geq \varphi_{\xi_n}(x) \geq x^{-1} \left[a_1(\xi_n) + \int_1^x a_1(\xi_n) dt \right] = a_1(\xi_n).$$

所以, $a_1(\xi_n) \leq \varphi_{\xi_n}(x)$, $x > 0$, $\varphi_{\xi_n}(j) \leq a_j(\xi_n)$, $j \in \mathbb{N}_+$. 因此, 当 $x \geq 1$ 时,

$$\varphi'_{\xi_n}(x) = x^{-1} [a_{[x]}(\xi_n) - \varphi_{\xi_n}(x)] \geq 0.$$

故 $\varphi_{\xi_n}(\cdot)$ 是非降函数. 由于 $0 < x < 1$ 时, $(\varphi_{\xi_n}^*(x))' = \varphi_{\xi_n}(x) + x\varphi'_{\xi_n}(x)$ 是 $a_1(\xi_n)$, 否则是 $a_{[x]}(\xi_n)$, 所以, 函数 $\varphi_{\xi_n}^*(x) = x\varphi_{\xi_n}(x)$, $x > 0$ 是凸的. 证毕. $\square$

现在, 我们假设: 给定 $\vec{\xi}$, 对任意的 $n = 0, 1, 2, \dots$, $\{r_j(\xi_n), j \geq 1\}$ 是非降序列. 那么, 引理 4.4 保证了函数 φ_{ξ_n} 的存在性.

引理 4.5 $E[\bar{W}_{n+1} | \vec{\xi}] \geq \prod_{k=0}^n r_1^{-1}(\xi_k) \varphi_{\xi_k}(E(Z_k | \vec{\xi}))$, $n \in \mathbb{N}$.

证明 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 由引理 4.4 和 Jensen 不等式,

$$E(Z_{n+1} | \vec{\xi}) = E[E(Z_{n+1} | Z_n, \vec{\xi}) | \vec{\xi}] = E[Z_n r_{Z_n}(\xi_n) | \vec{\xi}] \geq E[Z_n \varphi_{\xi_n}(Z_n) | \vec{\xi}]$$

$$= E[\varphi_{\xi_n}^*(Z_n) | \vec{\xi}] \geq \varphi_{\xi_n}^*(E(Z_n | \vec{\xi})) = E(Z_n | \vec{\xi}) \varphi_{\xi_n}(E(Z_n | \vec{\xi})). \quad (4.6)$$

(4.6) 两边乘以 I_{n+1}^{-1} , 得

$$E(\overline{W}_{n+1} | \vec{\xi}) \geq r_1^{-1}(\xi_n) \varphi_{\xi_n}(E(Z_n | \vec{\xi})) E(\overline{W}_n | \vec{\xi}). \quad (4.7)$$

反复应用 (4.7), 引理得证. $\square$

下面给出序列 $\{\overline{W}_n, n \geq 0\}$ L^1 -收敛的必要条件.

定理 4.6 若当 $n \rightarrow \infty$, $\{\overline{W}_n, n \geq 0\}$ L^1 -收敛到随机变量 $\overline{W}$, 且 $E(\overline{W} | \vec{\xi}) < \infty$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} [r_1^{-1}(\xi_n) \varphi_{\xi_n}(E(Z_n | \vec{\xi})) - 1] < \infty.$$

证明 回忆到 $\{\overline{W}_n, \mathcal{F}_n(\vec{\xi}), n \geq 0\}$ 是非负下鞅, 所以, $E(\overline{W}_{n+1} | \vec{\xi}) \geq E(\overline{W}_n | \vec{\xi})$. 由题设可得

$$\sup_{n \geq 0} E[\overline{W}_n | \vec{\xi}] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\overline{W}_n | \vec{\xi}] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [E(|\overline{W}_n - \overline{W}| | \vec{\xi}) + E(\overline{W} | \vec{\xi})] = E(\overline{W} | \vec{\xi}) < \infty.$$

由引理 4.5,

$$\prod_{n=0}^{\infty} r_1^{-1}(\xi_n) \varphi_{\xi_n}(E(Z_n | \vec{\xi})) \leq \sup_{n \geq 0} E[\overline{W}_n | \vec{\xi}] < \infty$$

等价于

$$\sum_{n=0}^{\infty} |1 - r_1^{-1}(\xi_n) \varphi_{\xi_n}(E(Z_n | \vec{\xi}))| < \infty.$$

结合引理 4.4(ii), 易得 $r_1(\xi_n) \leq \varphi_{\xi_n}(x)$, $x > 0$. 证毕. $\square$

注 4.7 若定理 4.6 的条件成立, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} [1 - r_1(\xi_n) \varphi_{\xi_n}^{-1}(E(Z_n | \vec{\xi}))] < \infty.$$

命题 4.8 设定理 4.6 的条件成立, 若

$$\sum_{n=0}^{\infty} [1 - r^{-1}(\xi_n) \varphi_{\xi_n}(E(Z_n | \vec{\xi}))] < \infty, \quad (4.8)$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} [r_1^{-1}(\xi_n) r(\xi_n) - 1] < \infty.$$

证明 由 (4.8) 有

$$0 < \prod_{n=0}^{\infty} r^{-1}(\xi_n) \varphi_{\xi_n}(E(Z_n | \vec{\xi})) < \infty.$$

所以,

$$\prod_{n=0}^{\infty} r(\xi_n) \varphi_{\xi_n}^{-1}(E(Z_n | \vec{\xi})) < \infty.$$

在定理 4.6 的条件下, 我们有

$$\prod_{n=0}^{\infty} r_1(\xi_n) \varphi_{\xi_n}^{-1}(E(Z_n | \vec{\xi})) < \infty, \quad \prod_{n=0}^{\infty} r_1^{-1}(\xi_n) \varphi_{\xi_n}(E(Z_n | \vec{\xi})) < \infty.$$

所以,

$$\prod_{n=0}^{\infty} r_1^{-1}(\xi_n) r(\xi_n) = \prod_{m=0}^{\infty} r_1^{-1}(\xi_m) \varphi_{\xi_m}(E(Z_m | \vec{\xi})) \prod_{n=0}^{\infty} r(\xi_n) \varphi_{\xi_n}^{-1}(E(Z_n | \vec{\xi})) < \infty.$$

因此,

$$\sum_{n=0}^{\infty} [r_1^{-1}(\xi_n) r(\xi_n) - 1] < \infty.$$

命题证毕. $\square$

由定理 4.6 和命题 4.8 知, 在合适的条件下, $\sum_{n=0}^{\infty} [r_1^{-1}(\xi_n) r(\xi_n) - 1] < \infty$ 是 $\{\bar{W}_n, n \geq 0\}$ L^1 -收敛的必要条件. 另外, 若有合适的条件, 我们也能找到 $\{\bar{W}_n, n \geq 0\}$ L^1 -收敛的充分条件. 给定 $\vec{\xi}$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$R_j(\xi_n) := j^{-1} E(|Z_{n+1} - r_1(\xi_n) Z_n| | Z_n = j, \vec{\xi}), \quad j \in \mathbb{N}_+. \quad (4.9)$$

下面假设: 给定 $\vec{\xi}$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, $\{R_j(\xi_n), j \geq 1\}$ 是一个非增序列. 引理 4.4(i) 保证了函数 ψ_{ξ_n} 的存在性.

定理 4.9 若

$$\sum_{n=0}^{\infty} [r_1^{-1}(\xi_n) r(\xi_n) - 1] < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} [r_1^{-1}(\xi_n) \psi_{\xi_n}(I_n)] < \infty,$$

则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\{\bar{W}_n, n \geq 0\}$ L^1 -收敛到有限随机变量 $\bar{W}$. 若另设

$$\sum_{n=0}^{\infty} [r_1^{-1}(\xi_n) \varphi_{\xi_n}(E(Z_n | \vec{\xi})) - 1] < \infty,$$

则 $\bar{W}$ 非退化到 0.

证明 先证明 $\{\bar{W}_n, n \geq 0\}$ 是一个 L^1 -Cauchy 序列. 事实上, 由 (4.9) 和引理 4.4(i) 有

$$\begin{aligned} E(|\bar{W}_{n+1} - \bar{W}_n| | \vec{\xi}) &= E[E(|I_{n+1}^{-1} Z_{n+1} - I_n^{-1} Z_n| | Z_n, \vec{\xi}) | \vec{\xi}] \\ &= E\{I_{n+1}^{-1} E[|Z_{n+1} - r_1(\xi_n) Z_n| | Z_n, \vec{\xi}] | \vec{\xi}\} = E[I_{n+1}^{-1} Z_n R_{Z_n}(\xi_n) | \vec{\xi}] \\ &\leq E[I_{n+1}^{-1} Z_n \psi_{\xi_n}(Z_n) | \vec{\xi}] = I_{n+1}^{-1} E[\psi_{\xi_n}^*(Z_n) | \vec{\xi}]. \end{aligned}$$

利用 Jensen 不等式, 有

$$\begin{aligned} E(|\bar{W}_{n+1} - \bar{W}_n| | \vec{\xi}) &\leq I_{n+1}^{-1} \psi_{\xi_n}^*(E(Z_n | \vec{\xi})) = I_{n+1}^{-1} E(Z_n | \vec{\xi}) \psi_{\xi_n}(E(Z_n | \vec{\xi})) \\ &= r_1^{-1}(\xi_n) E(\bar{W}_n | \vec{\xi}) \psi_{\xi_n}(E(\bar{W}_n | \vec{\xi}) I_n). \end{aligned}$$

由于 $\{\bar{W}_n, \mathcal{F}_n(\vec{\xi}), n \in \mathbb{N}\}$ 是下鞅, 所以,

$$E(\bar{W}_{n+1} | \vec{\xi}) \geq E(\bar{W}_n | \vec{\xi}) \geq \cdots \geq E(\bar{W}_0 | \vec{\xi}) = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

结合函数 $\psi_{\xi_n}(x)$ 的单调性和 (3.4), 我们有

$$E(|\bar{W}_{n+1} - \bar{W}_n| | \vec{\xi}) \leq r_1^{-1}(\xi_n) E(\bar{W}_n | \vec{\xi}) \psi_{\xi_n}(I_n) \leq r_1^{-1}(\xi_n) \psi_{\xi_n}(I_n) \prod_{k=0}^{\infty} r_1^{-1}(\xi_k) r(\xi_k), \quad n \in \mathbb{N}.$$

由题设,

$$\prod_{n=0}^{\infty} r_1^{-1}(\xi_n) r(\xi_n) < \infty. \quad (4.10)$$

所以,

$$\sum_{n=0}^{\infty} E(|\bar{W}_{n+1} - \bar{W}_n| \mid \vec{\xi}) \leq \prod_{k=0}^{\infty} r_1^{-1}(\xi_k) r(\xi_k) \sum_{n=0}^{\infty} r_1^{-1}(\xi_n) \psi_{\xi_n}(I_n) < \infty.$$

因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|\bar{W}_{n+1} - \bar{W}_n| \mid \vec{\xi}) = 0.$$

结合 Fatou 引理, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|\bar{W}_{n+1} - \bar{W}_n|) = \lim_{n \rightarrow \infty} E[E(|\bar{W}_{n+1} - \bar{W}_n| \mid \vec{\xi})] \leq E\left[\limsup_{n \rightarrow \infty} E(|\bar{W}_{n+1} - \bar{W}_n| \mid \vec{\xi})\right] = 0.$$

故当 $n \rightarrow \infty$, $\{\bar{W}_n, n \in \mathbb{N}\}$ L^1 -收敛到有限随机变量 $\bar{W}$.

接下来只须证明 $E\bar{W} > 0$. 由单调收敛定理、引理 4.5 和题设, 有

$$E\bar{W} = \lim_{n \rightarrow \infty} E\bar{W}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} E[E(\bar{W}_n \mid \vec{\xi})] \geq E\left[\prod_{n=0}^{\infty} r_1^{-1}(\xi_n) \varphi_{\xi_n}(E(Z_n \mid \vec{\xi}))\right] > 0.$$

定理证毕. □

4.2 序列 $\{\widehat{W}_n, n \in \mathbb{N}\}$ 的极限

由文献 [8, 定理 3.2], 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\widehat{W}_n$ 几乎处处收敛到非负随机变量 $\widehat{W}$, 且 $E\widehat{W} < \infty$. 但需要条件来保证 $P(\widehat{W} > 0) > 0$. 首先, 引入序列 $\{\sigma_j(\xi_n), j \geq 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ 如下:

$$\sigma_j(\xi_n) := j^{-2} \text{Var}(Z_{n+1} \mid Z_n = j, \vec{\xi}), \quad j \in \mathbb{N}_+, \quad n \in \mathbb{N},$$

其中

$$\text{Var}(Z_{n+1} \mid Z_n = j, \vec{\xi}) = E(Z_{n+1}^2 \mid Z_n = j, \vec{\xi}) - [E(Z_{n+1} \mid Z_n = j, \vec{\xi})]^2.$$

令

$$d_j(\xi_n) := j^{-2} E(Z_{n+1}^2 \mid Z_n = j, \vec{\xi}), \quad j \in \mathbb{N}_+, \quad n \in \mathbb{N}.$$

下面的引理说明序列 $\{\sigma_j(\xi_n), j \geq 1\}$ 有上界.

引理 4.10 给定 $\vec{\xi}$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $\sigma(\xi_n)$ 使得 $\sigma_j(\xi_n) \leq \sigma(\xi_n)$, $j \in \mathbb{N}_+$.

证明 由定义 2.1 和 $L(\cdot, \cdot)$ 的上可加性,

$$\begin{aligned} E(Z_{n+1}^2 \mid Z_n = k+j, \vec{\xi}) &\geq E\left\{\left[L\left(\sum_{i=1}^k f_{ni}, \sum_{i=1}^k m_{ni}\right) + L\left(\sum_{i=k+1}^{k+j} f_{ni}, \sum_{i=k+1}^{k+j} m_{ni}\right)\right]^2 \mid \vec{\xi}\right\} \\ &\geq E\left\{\left[L\left(\sum_{i=1}^k f_{ni}, \sum_{i=1}^k m_{ni}\right)\right]^2 \mid \vec{\xi}\right\} + E\left\{\left[L\left(\sum_{i=1}^j f_{ni}, \sum_{i=1}^j m_{ni}\right)\right]^2 \mid \vec{\xi}\right\} \\ &= E(Z_{n+1}^2 \mid Z_n = k, \vec{\xi}) + E(Z_{n+1}^2 \mid Z_n = j, \vec{\xi}). \end{aligned}$$

所以, $f_{\xi_n}(j) := E(Z_{n+1}^2 \mid Z_n = j, \vec{\xi})$ 是上可加的. 又由上可加函数的性质, 当 $j \rightarrow \infty$ 时, $j^{-1}f_{\xi_n}(j)$ 收敛, 且

$$\lim_{j \rightarrow \infty} j^{-1}f_{\xi_n}(j) = \sup_{j > 0} j^{-1}f_{\xi_n}(j).$$

由于 $d_j(\xi_n) = j^{-2}f_{\xi_n}(j) \leq j^{-1}f_{\xi_n}(j)$, 所以存在 $\sigma(\xi_n) := \sup_{j>0} j^{-1}f_{\xi_n}(j) - r_1^2(\xi_n)$, 使得

$$\sigma_j(\xi_n) = d_j(\xi_n) - r_j^2(\xi_n) \leq \sup_{j>0} j^{-1}f_{\xi_n}(j) - r_1^2(\xi_n) = \sigma(\xi_n).$$

引理证毕. $\square$

定理 4.11 若 $\sum_{n=0}^{\infty} E[r^{-2}(\xi_n)\sigma(\xi_n)] < \infty$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\{\widehat{W}_n, n \in \mathbb{N}\}$ L^1 -收敛到有限随机变量 $\widehat{W}$. 若另设

$$\sum_{n=0}^{\infty} [1 - r^{-1}(\xi_n)\varphi_{\xi_n}(E(Z_n | \vec{\xi}))] < \infty,$$

则 $\widehat{W}$ 非退化到 0.

证明 先证 $\{E[\widehat{W}_n^2], n \in \mathbb{N}\}$ 有界. 事实上, 由引理 4.10, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned} E(\widehat{W}_{n+1}^2 | \vec{\xi}) &= S_{n+1}^{-2} E[E(Z_{n+1}^2 | Z_n, \vec{\xi}) | \vec{\xi}] = S_{n+1}^{-2} E[Z_n^2 d_{Z_n}(\xi_n) | \vec{\xi}] \\ &= S_{n+1}^{-2} E\{Z_n^2 [\sigma_{Z_n}(\xi_n) + r_{Z_n}^2(\xi_n)] | \vec{\xi}\} \leq S_{n+1}^{-2} E\{Z_n^2 [\sigma(\xi_n) + r^2(\xi_n)] | \vec{\xi}\} \\ &= E\{\widehat{W}_n^2 [1 + r^{-2}(\xi_n)\sigma(\xi_n)] | \vec{\xi}\} = [1 + r^{-2}(\xi_n)\sigma(\xi_n)] E(\widehat{W}_n^2 | \vec{\xi}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

反复应用 (4.11), 可得

$$E(\widehat{W}_{n+1}^2 | \vec{\xi}) \leq \prod_{k=0}^n [1 + r^{-2}(\xi_k)\sigma(\xi_k)] \leq \prod_{k=0}^{\infty} [1 + r^{-2}(\xi_k)\sigma(\xi_k)].$$

由题设有 $\prod_{k=0}^{\infty} \{1 + E[r^{-2}(\xi_k)\sigma(\xi_k)]\} < \infty$. 注意 $\vec{\xi}$ 是独立的, 所以, $\{E[\widehat{W}_n^2], n \geq 0\}$ 有界, 从而一致可积. 由此, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\widehat{W}_n$ L^1 -收敛到有限随机变量 $\widehat{W}$, 且此极限 $\widehat{W}$ 就是文献 [8] 中 $\widehat{W}_n$ 几乎处处收敛的极限.

接下来, 只须证明 $E\widehat{W} > 0$. 由引理 4.4(ii) 有

$$\begin{aligned} E(\widehat{W}_{n+1} | \vec{\xi}) &= S_{n+1}^{-1} E[E(Z_{n+1} | Z_n, \vec{\xi}) | \vec{\xi}] = S_{n+1}^{-1} E[Z_n r_{Z_n}(\xi_n) | \vec{\xi}] \\ &\geq S_{n+1}^{-1} E[Z_n \varphi_{\xi_n}(Z_n) | \vec{\xi}] = S_{n+1}^{-1} E[\varphi_{\xi_n}^*(Z_n) | \vec{\xi}] \\ &\geq S_{n+1}^{-1} \varphi_{\xi_n}^*(E(Z_n | \vec{\xi})) = S_{n+1}^{-1} E(Z_n | \vec{\xi}) \varphi_{\xi_n}(E(Z_n | \vec{\xi})) \\ &= r^{-1}(\xi_n) E(\widehat{W}_n | \vec{\xi}) \varphi_{\xi_n}(E(Z_n | \vec{\xi})). \end{aligned} \quad (4.12)$$

反复应用 (4.12), 可得

$$E(\widehat{W}_{n+1} | \vec{\xi}) \geq \prod_{k=0}^n r^{-1}(\xi_k) \varphi_{\xi_k}(E(Z_k | \vec{\xi})), \quad n \in \mathbb{N}.$$

由引理 4.4(ii), 不难得到 $\varphi_{\xi_n}(x) \leq r(\xi_n)$, $x > 0$, 所以结合题设, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\widehat{W}_n | \vec{\xi}) \geq \prod_{n=0}^{\infty} r^{-1}(\xi_n) \varphi_{\xi_n}(E(Z_n | \vec{\xi})) > 0.$$

因此, 由控制收敛定理得

$$E(\widehat{W}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(\widehat{W}_n) = E\left[\lim_{n \rightarrow \infty} E(\widehat{W}_n | \vec{\xi})\right] > 0.$$

定理证毕. $\square$

5 $\{F_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\{M_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ 的极限

本节对随机环境中分枝过程条件均值增长率的上、下界稍微作了修改, 来作为序列 $\{F_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\{M_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ 的规范化因子. 而这两个序列在模型中是对称的, 我们只讨论序列 $\{F_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ 的极限性质, 关于序列 $\{M_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ 的性质类似可得.

对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$\widehat{F}_{n+1} = (S_n E(f_{n1} | \vec{\xi}))^{-1} F_{n+1}, \quad \overline{F}_{n+1} = (I_n E(f_{n1} | \vec{\xi}))^{-1} F_{n+1}.$$

定理 5.1 若 $\sum_{n=0}^{\infty} E(\frac{E(f_{n1}^2 | \vec{\xi})}{S_n (E(f_{n1} | \vec{\xi}))^2}) < \infty$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\{\widehat{F}_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ 几乎处处收敛到 $\widehat{W}$.

证明 由定义 2.1,

$$\begin{aligned} E(F_{n+1} | \mathcal{F}_n(\vec{\xi})) &= E\left(\sum_{i=1}^{Z_n} f_{ni} \mid \mathcal{F}_n(\vec{\xi})\right) = \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^k f_{ni}, Z_n = k \mid \mathcal{F}_n(\vec{\xi})\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} I_{\{Z_n=k\}} \sum_{i=1}^k E(f_{ni} | \vec{\xi}) = Z_n E(f_{n1} | \vec{\xi}), \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (5.1)$$

所以, 由 $\{\widehat{F}_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ 的定义, 有

$$E(\widehat{F}_{n+1} | \mathcal{F}_n(\vec{\xi})) = \widehat{W}_n, \quad \text{a.s.} \quad (5.2)$$

从而, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\{E(\widehat{F}_{n+1} | \mathcal{F}_n(\vec{\xi})), n \in \mathbb{N}\}$ 几乎处处收敛到 $\widehat{W}$, 其中 $\widehat{W}$ 就是文献 [8, 定理 3.2] 中 $\{\widehat{W}_n, n \in \mathbb{N}\}$ 几乎处处收敛的极限.

设 $C_{n+1} = \widehat{F}_{n+1} - E(\widehat{F}_{n+1} | \mathcal{F}_n(\vec{\xi})), n \in \mathbb{N}$. 显然, $E(C_{n+1} | \mathcal{F}_n(\vec{\xi})) = 0$. 那么只须证明 $\{C_{n+1}\}$ L^2 -有界, 即只须证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} E(C_{n+1}^2) < \infty. \quad (5.3)$$

类似 (5.1) 的推导, 我们可得

$$\text{Var}(F_{n+1} | \mathcal{F}_n(\vec{\xi})) = Z_n \text{Var}(f_{n1} | \vec{\xi}), \quad \text{a.s.}$$

所以,

$$\begin{aligned} E(C_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n(\vec{\xi})) &= E\{[\widehat{F}_{n+1} - E(\widehat{F}_{n+1} | \mathcal{F}_n(\vec{\xi}))]^2 | \mathcal{F}_n(\vec{\xi})\} \\ &= \text{Var}(\widehat{F}_{n+1} | \mathcal{F}_n(\vec{\xi})) = (S_n E(f_{n1} | \vec{\xi}))^{-2} Z_n \text{Var}(f_{n1} | \vec{\xi}) \\ &= \widehat{W}_n S_n^{-1} (E(f_{n1} | \vec{\xi}))^{-2} \text{Var}(f_{n1} | \vec{\xi}), \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (5.4)$$

由文献 [8, 定理 3.2] 知, $\{\widehat{W}_n, n \in \mathbb{N}\}$ 是一个非负上鞅, 即 $E(\widehat{W}_{n+1} | \mathcal{F}_n(\vec{\xi})) \leq \widehat{W}_n$, a.s. 所以,

$$E(\widehat{W}_{n+1} | \vec{\xi}) \leq E(\widehat{W}_n | \vec{\xi}) \leq \cdots \leq E(\widehat{W}_0 | \vec{\xi}) = 1, \quad \text{a.s.} \quad (5.5)$$

因此, (5.4) 两边取期望, 得

$$\begin{aligned} E(C_{n+1}^2 | \vec{\xi}) &= S_n^{-1} (E(f_{n1} | \vec{\xi}))^{-2} \text{Var}(f_{n1} | \vec{\xi}) E(\widehat{W}_n | \vec{\xi}) \\ &\leq S_n^{-1} (E(f_{n1} | \vec{\xi}))^{-2} E(f_{n1}^2 | \vec{\xi}), \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

结合题设, (5.3) 得证. 应用 L^2 - 有界鞅收敛定理, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{F}_{n+1} - E(\hat{F}_{n+1} | \mathcal{F}_n(\vec{\xi})))^2$$

几乎处处收敛和 L^1 - 收敛. 故当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\hat{F}_{n+1} - E(\hat{F}_{n+1} | \mathcal{F}_n(\vec{\xi})) \rightarrow 0, \quad \text{a.s.}$$

又注意到 $\{E(\hat{F}_{n+1} | \mathcal{F}_n(\vec{\xi})), n \in \mathbb{N}\}$ 几乎处处收敛到 $\widehat{W}$, 结论得证. $\square$

类似的推导可得下面的结论.

定理 5.2 若 $\{\bar{W}_n, n \in \mathbb{N}\}$ 几乎处处收敛到非负有限随机变量 $\bar{W}$, 且 $\sum_{n=0}^{\infty} E(\frac{E(f_{n+1}^2 | \vec{\xi})}{I_n(E(f_{n+1} | \vec{\xi}))^2}) < \infty$, 则 $\{\bar{F}_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ 几乎处处收敛到 $\bar{W}$.

定理 5.3 以下两结论等价:

- (i) $\{\widehat{W}_n, n \in \mathbb{N}\}$ L^1 - 收敛;
- (ii) $\{\hat{F}_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ L^1 - 收敛.

证明 若 (i) 成立, 记其极限为 $\widehat{W}$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $E\widehat{W}_n \rightarrow E\widehat{W}$. 由 (5.2),

$$E(\hat{F}_{n+1} | \vec{\xi}) = E(\widehat{W}_n | \vec{\xi}), \quad \text{a.s.}$$

结合 (5.5), 由 Scheffé 引理 (参见文献 [13, 第 55 页]) 有 $\{\hat{F}_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ L^1 - 收敛到 $\widehat{W}$.

可类似由 (ii) 证 (i). $\square$

对于 $\{M_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ 有类似的结论, 我们列出如下定理.

定理 5.4 若 $\sum_{n=0}^{\infty} E(\frac{E(m_{n+1}^2 | \vec{\xi})}{S_n(E(m_{n+1} | \vec{\xi}))^2}) < \infty$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\{(S_n E(m_{n+1} | \vec{\xi}))^{-1} M_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ 几乎处处收敛到 $\widehat{W}$.

定理 5.5 若 $\{\bar{W}_n, n \in \mathbb{N}\}$ 几乎处处收敛到非负有限随机变量 $\bar{W}$, 且 $\sum_{n=0}^{\infty} E(\frac{E(m_{n+1}^2 | \vec{\xi})}{I_n(E(m_{n+1} | \vec{\xi}))^2}) < \infty$, 则 $\{(I_n E(m_{n+1} | \vec{\xi}))^{-1} M_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ 几乎处处收敛到 $\bar{W}$.

定理 5.6 以下两结论等价:

- (i) $\{\widehat{W}_n, n \in \mathbb{N}\}$ L^1 - 收敛;
- (ii) $\{(S_n E(m_{n+1} | \vec{\xi}))^{-1} M_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ L^1 - 收敛.

参考文献

- 1 Alsmeyer G, Rosler U. The bisexual Galton-Watson process with promiscuous mating: Extinction probabilities in the supercritical case. *Ann Appl Probab*, 1996, 6: 922–939
- 2 Daley D J. Extinction conditions for certain bisexual Galton-Watson process. *Z Wahrscheinlichkeitstheorie Verw Geb*, 1968, 9: 315–322
- 3 González M, Molina M. On the convergence of a superadditive bisexual Galton-Watson branching processes. *J Appl Probab*, 1997, 34: 575–582
- 4 González M, Molina M, Mota M. Nonparametric estimation of the offspring distribution and the mean vector for a bisexual Galton-Watson process. *Comm Statist Theory Methods*, 2001, 30: 497–516
- 5 González M, Molina M, Mota M. Bisexual Galton-Watson branching process with immigration of females and males: Asymptotic behaviour. *Markov Process Relat Fields*, 2002, 8: 651–663
- 6 Molina M, Mota M, Ramos A. Limit behaviour for a supercritical bisexual Galton-Watson branching process with population-size dependent mating. *Stochastic Process Appl*, 2004, 112: 309–317

- 7 Molina M, Mota M, Ramos A. Limiting behaviour for superadditive bisexual Galton-Watson processes in varying environments. TEST, 2004, 13: 481–499
- 8 Ma S X. Bisexual Galton-Watson branching processes in random environments. Acta Math Appl Sin Engl Ser, 2006, 22: 419–428
- 9 Hu Y L, Yin Y, Zhang Y. Extinction probabilities, Markov properties and duality for bisexual branching processes in random environments. In: Proceedings of 2011 World Congress on Engineering and Technology (CET 2011). Shanghai: Tongji University Press, 2011, 187–190
- 10 Hu Y L, Yang X Q, Li Y Q. The theorem of equivalence about the branching processes in random environments. Acta Math Appl Sin, 2007, 30: 411–421
- 11 李应求, 李旭, 刘全升. 随机环境中随机游动上的随机分枝系统. 中国科学 A 辑, 2007, 37: 341–347
- 12 李应求, 刘全升. 随机环境中依赖年龄的分枝过程. 中国科学 A 辑, 2008, 38: 799–819
- 13 Williams D. Probability with Martingales. Oxford: Cambridge University Press, 2008

Limiting behaviors of bisexual branching processes in random environments

LI YingQiu, HU YangLi & ZHANG Ying

Abstract For a bisexual branching process in a random environment, the conditional mean growth rate per mating unit is introduced, and its related properties are studied, then the upper and lower bounds of conditional mean of the process are obtained. The limiting behaviors of the number of mating units in each generation normalized by these two bounds are respectively investigated. Particularly, the limiting behaviors of the number of females and males in each generation normalized by slightly modified bounds are discussed too, and equivalence theorems between the normalized number of mating units and that of females or males in each generation are obtained.

Keywords random environment, bisexual branching process, almost sure convergence, convergence in L^1

MSC(2010) 60K37, 60J80

doi: 10.1360/N012015-00058