综 述

Slice 正则函数理论

献给史济怀教授 80 华诞

任广斌*, 王谢平, 徐正华

中国科学技术大学数学系, 合肥 230026

E-mail: rengb@ustc.edu.cn, pwx@mail.ustc.edu.cn, xzhengh@mail.ustc.edu.cn

收稿日期: 2015-03-31; 接受日期: 2015-07-23; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11071230) 资助项目

摘要 Slice 正则函数理论是单复分析从复数到四元数的自然推广. 它由 Gentili 和 Struppa 于 2006 年引入, 并迅速地得到广泛的研究, 而且在泛函分析、算子理论、Schur 分析、四元数量子力学中取得了广泛的应用. 与此同时, 该理论也被推广到 Clifford 代数、八元数以及更为一般的交错代数上. 本文主要介绍作者在 Slice 正则函数理论中取得的最新进展. 首先, 本文证明了 Borel-Carathéodory 不等式, 并对单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的正规化双全纯函数的 Slice 正则延拓建立了相应的增长定理与掩盖定理. 其次, 本文研究了 Slice 正则函数的边界行为, 证明了相应的 Julia 引理、Julia-Carathéodory 定理以及边界 Schwarz 引理. 特别地, 作者发现与单复变不同的是, Slice 正则理论中的边界 Schwarz 引理不能断言四元数空间单位球上的 Slice 正则自映照在其边界不动点处的导数大于零. 最后, 本文还研究了正则函数空间理论, 建立了相应的 Forelli-Rudin 估计.

关键词 四元数 Slice 正则函数 增长定理 偏差定理 Schwarz 引理 Julia-Carathéodory 定理 边界 Schwarz 引理 Lipschitz 空间

MSC (2010) 主题分类 30G35, 32A26

1 引言

Slice 正则函数的概念于 2006 年由 Gentili 和 Struppa^[1,2] 引进, 其初衷是在四元数代数 $\mathbb{H}$ 上建立一套类似于复平面上全纯函数的理论, 使其研究的函数类包含多项式和幂级数. 现在, Slice 正则函数理论已被广泛地研究, 形成了一套较为完善的理论体系^[3-7], 并在泛函分析、算子理论^[8-14]、Schur 分析^[15-18] 以及四元数量子力学^[19-21] 中取得了极为广泛的应用. 特别是, Slice 正则函数理论给出了非交换算子族的算子演算理论, 从而为量子力学的研究提供了必不可少的研究手段, 这奠定了它的重要地位.

在理论上, Slice 正则函数理论与单复变相似, 例如, Schwarz-Pick 定理^[15,22]、Bloch-Landau 定理^[23]、Bohr 定理^[24] 以及 Landau-Toeplitz 定理^[25] 已经从单复变推广到 Slice 正则函数理论. 但是, Slice 正则函数理论属于非交换分析领域, 与单复变有着本质不同. 例如, 有效地将全纯函数的复合运

算推广到 Slice 正则函数理论, 到目前为止仍然是未解决的重要课题. Slice 正则函数理论与经典的 Clifford 分析也有着显著的差别. 经典的 Clifford 分析研究的算子是经典的 Dirac 算子, 它是常系数的椭圆算子; 而 Slice 正则函数理论研究的是非常系数的非椭圆算子^[26]

$$|\operatorname{Im}(q)|^2 \frac{\partial}{\partial x_0} + \operatorname{Im}(q) \sum_{j=1}^3 x_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

其中 $\operatorname{Im}(q)$ 是四元数 $q = x_0 + \operatorname{Im}(q)$ 的虚部. Slice 正则函数理论现在已被推广到 Clifford 代数^[27, 28]、八元数^[29] 以及更为一般的交错代数上^[30].

本文主要介绍我们在 Slice 正则函数理论中取得的最新进展. 特别地, 我们发现 Slice 正则函数理论中的边界 Schwarz 引理与单复变的情形有很大的不同. 单复变中的边界 Schwarz 引理断言, 单位圆盘上的全纯自映照在边界不动点处的导数必为正数, 但是在四元数中的相应导数可能不再是实数^[31]. 同时, 我们对单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的正规化双全纯函数的 Slice 正则延拓建立了相应的增长定理与掩盖定理^[32]. 我们还研究了正则函数理论中的函数空间理论, 建立了相应的 Forelli-Rudin 估计^[33].

本文主要内容包括以下三个方面.

- (i) Slice 正则函数的几何函数论 (见第 3 节):
 - (a) Carathéodory 定理与 Borel-Carathéodory 定理;
 - (b) 单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的正规化双全纯函数的 Slice 正则延拓对应的增长定理与掩盖定理;
 - (c) Schwarz 引理在 Clifford 代数情形下的推广.
- (ii) Slice 正则函数的边界 Julia-Carathéodory 理论 (见第 4 节):
 - (a) 四元数 $\mathbb{H}$ 中单位开球 $\mathbb{B}$ 的 Slice 正则自映射的 Julia 引理;
 - (b) Julia-Carathéodory 定理;
 - (c) 边界 Schwarz 引理.
- (iii) Slice 正则函数的空间理论 (见第 5 节):
 - (a) Forelli-Rudin 型估计;
 - (b) Slice 正则函数的 Bloch 空间的无导数刻画;
 - (c) Slice 正则函数的 Bloch 空间的对偶空间.

2 预备知识

Slice 正则函数理论已有专著 [7, 34]. 本节介绍该理论的基本概念.

记四元数代数为 $\mathbb{H}$, 其标准基 $\{1, i, j, k\}$ 满足乘法关系

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

每个四元数 $q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{H}$ 由其实部 $\operatorname{Re}(q) = x_0$ 和虚部 $\operatorname{Im}(q) = x_1 i + x_2 j + x_3 k$ 组成, 其共轭为 $\bar{q} = \operatorname{Re}(q) - \operatorname{Im}(q)$, 模为 $|q|^2 = q\bar{q} = |\operatorname{Re}(q)|^2 + |\operatorname{Im}(q)|^2$. 同时, 每个四元数也可表示为 $q = x + yI$, 其中 $x, y \in \mathbb{R}$. 当 $\operatorname{Im} q \neq 0$ 时, 定义

$$I = \frac{\operatorname{Im}(q)}{|\operatorname{Im}(q)|},$$

否则任取 I 使其满足 $I^2 = -1$. 因此, 每个 I 均属于二维单位球面

$$\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} : q^2 = -1\}.$$

对于任意的 $I \in \mathbb{S}$, 我们记 $\mathbb{R} \oplus I\mathbb{R}$ 为 $\mathbb{C}_I$, 它同构于 $\mathbb{C}$. 此外, 如果 $\Omega \subseteq \mathbb{H}$, 记 $\Omega \cap \mathbb{C}_I$ 为 Ω_I . 对任意的 $R > 0$, 我们用 $B(0, R)$ 表示以原点为球心、 R 为半径的开球

$$B(0, R) = \{q \in \mathbb{H} : |q| < R\}.$$

现在, 我们给出 Slice 正则的定义.

定义 1 设 Ω 为 $\mathbb{H}$ 中的域. 如果函数 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ 满足对任意的 $I \in \mathbb{S}$, 其限制 f_I 在 Ω_I 上全纯, 即 f_I 具有连续的偏导数并满足

$$\bar{\partial}_I f(x + yI) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + I \frac{\partial}{\partial y} \right) f_I(x + yI) = 0, \quad \forall x + yI \in \Omega_I,$$

则称 f 是 Ω 上的 Slice 正则函数 (简称为正则函数).

由定义 1 易知, 所有右系数的四元数多项式以及收敛的幂级数均为正则函数. 事实上, 容易证明函数 f 在开球 $B(0, R)$ 上正则当且仅当 f 具有 Taylor 展开

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n, \quad \forall q \in B(0, R).$$

正则函数的自然定义域是轴对称 Slice 域^[3].

定义 2 设 Ω 为 $\mathbb{H}$ 中的域. 如果 Ω 与实轴 $\mathbb{R}$ 相交, 且满足对任意的 $I \in \mathbb{S}$, Ω_I 仍为 $\mathbb{C}_I$ 中的域, 则称 Ω 为 Slice 域. 此外, 如果 Ω 还满足对任意的 $x + yI \in \Omega$, 均有 $x + y\mathbb{S} \subseteq \Omega$, 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$ 和 $I \in \mathbb{S}$ 均成立, 则称 Ω 为轴对称 Slice 域.

对于正则函数, 我们有如下导数的定义, 详见文献 [1, 2].

定义 3 设 $f : B(0, R) \rightarrow \mathbb{H}$ 为正则函数. 对任意的 $I \in \mathbb{S}$, 定义 f 在点 $q = x + yI$ 的导数为

$$f'(q) = \partial_I f(x + yI) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - I \frac{\partial}{\partial y} \right) f_I(x + yI), \quad \forall x + yI \in \Omega_I.$$

此定义是良定的, 因为简单的计算表明, 在 $\Omega_I \cap \Omega_J$, $\partial_I f = \partial_J f$ 对任意的 $I, J \in \mathbb{S}$ 均成立. 此外, 注意到算子 ∂_I 与 $\bar{\partial}_I$ 可交换, 并且 $\partial_I f = \frac{\partial f}{\partial x}$ 对任意的正则函数均成立. 因此, 正则函数的导函数仍然是正则函数, 并且我们可以逐次求导得到 n 阶导数

$$f^{(n)} := \partial_I^n f = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

由于普通的逐点乘积不再保持函数的正则性, 我们需要引进新的乘积运算, 称为正则乘积 (或 $*$ -乘积), 其由非交换环上的乘法经过适当的修改而来, 类似于离散版本的卷积的定义. 正则乘积在 Slice 正则理论中扮演着非常重要的作用.

定义 4 设 $f, g : B = B(0, R) \rightarrow \mathbb{H}$ 为正则函数, 其幂级数展开分别为

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n, \quad g(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n b_n,$$

则 f 与 g 的 $*$ -乘积 $f * g$ 定义为

$$f * g(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right).$$

注意到 $*$ - 乘积运算是可结合的, 但一般是非交换的.

正则函数的零点理论与单复变完全不同. 非零正则函数的零点是由孤立的 2 维零点和 0 维零点构成. 对于正则函数 f 和 g , 函数 g 的零点不一定是 $f * g$ 的零点. 为了对正则函数的零点结构有较好的刻画, 需如下概念.

定义 5 设 $f: B = B(0, R) \rightarrow \mathbb{H}$ 为正则函数. 定义 f 的正则共轭 f^c 为

$$f^c(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \bar{a}_n,$$

其对称化 f^s 定义为

$$f^s(q) = f * f^c(q) = f^c * f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left(\sum_{k=0}^n a_k \bar{a}_{n-k} \right).$$

显然, f^c 与 f^s 均为 B 上的正则函数.

现在可以给出正则函数 f 的正则倒数的定义. 我们用 $\mathcal{Z}_{f^s}$ 表示 f 的对称化 f^s 的零点.

定义 6 设 $f: B = B(0, R) \rightarrow \mathbb{H}$ 为正则函数. 如果 f 不恒为 0, 定义 f 的正则倒数 f^{-*} 为

$$f^{-*}(q) := f^s(q)^{-1} f^c(q),$$

它为 $B \setminus \mathcal{Z}_{f^s}$ 上的正则函数.

3 正则函数的几何函数论

文献 [35] 证明了下面的 Carathéodory 定理和 Borel-Carathéodory 定理.

定理 1 (Carathéodory 定理) 记 $\mathbb{B}$ 为 $\mathbb{H}$ 中的单位开球. 设 $f: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{H}$ 为 $\mathbb{B}$ 上的正则函数, 其 Taylor 展开为

$$f(q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n a_n, \quad \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{H},$$

且满足 $\operatorname{Re} f(q) > 0$, 则

$$\frac{1 - |q|}{1 + |q|} \leq \operatorname{Re} f(q) \leq |f(q)| \leq \frac{1 + |q|}{1 - |q|}, \quad \forall q \in \mathbb{B}, \quad (3.1)$$

并有

$$|a_n| \leq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

此外, 不等式 (3.1) 中的第一或第三个等号在某点 $q_0 \neq 0$ 处成立当且仅当 f 具有如下的形式:

$$f(q) = (1 - qe^{I\theta})^{-*} * (1 + qe^{I\theta}), \quad \forall q \in \mathbb{B},$$

其中 $\theta \in \mathbb{R}$, $I \in \mathbb{S}$.

不等式 (3.2) 中存在某个 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $|a_{n_0}| = 2$ 当且仅当

$$a_{kn_0} = 2 \left(\frac{a_{n_0}}{2} \right)^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

特别地, $|a_1| = 2$ 当且仅当

$$f(q) = (1 - qe^{I\theta_0})^{-*} * (1 + qe^{I\theta_0}), \quad \forall q \in \mathbb{B},$$

其中 $\theta \in \mathbb{R}$, $I \in \mathbb{S}$.

定理 2 (Borel-Carathéodory 定理) 设 $f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$ 为 $\mathbb{B}$ 上的正则函数. 如果

$$A := \sup_{q \in \mathbb{B}} \operatorname{Re} f(q) < +\infty,$$

则对任意的 $|q| \leq r < 1$ 和 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, 成立

$$|a_n| \leq 2(A - \operatorname{Re} f(0)), \quad (3.3)$$

$$|f(q) - f(0)| \leq \frac{2r}{1-r}(A - \operatorname{Re} f(0)), \quad (3.4)$$

$$\operatorname{Re} f(q) \leq \frac{2r}{1+r}A + \frac{1-r}{1+r}\operatorname{Re} f(0), \quad (3.5)$$

$$|f^{(n)}(q)| \leq \frac{2n!}{(1-r)^{n+1}}(A - \operatorname{Re} f(0)). \quad (3.6)$$

文献 [26] 对保持 Slice 的函数运用 Poisson 积分公式证明了不等式 (3.1). 对于定理 1 中关键的不等式 (3.2), 文献 [36] 由 Herglotz 积分公式仅能证明其弱的版本

$$|\operatorname{Re}(a_n)| \leq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.7)$$

而非 (3.2), 因为文献 [36, 推论 8.4] 中的 $d\mu_2(t)$ 一般不是一个非负测度. 值得一提的是, 不等式 (3.7) 亦可由正则函数的 Splitting 引理和单复变全纯函数的 Schwarz 积分公式证明. 然而, 这两种方法都不能用来证明不等式 (3.2). 文献 [35] 运用有限平均的办法证明了不等式 (3.2).

文献 [37] 证明了一个比定理 2 中 (3.4) 弱的不等式. 我们的方法可以用来加强这些结论, 同时, 我们也在文献 [35] 中证明了定理 1 与 2 事实上是等价的.

下面来介绍文献 [32] 中的增长定理和偏差定理.

定理 3 (增长定理与偏差定理) 设 $f: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{H}$ 为 $\mathbb{B}$ 上的正则函数, 且存在某个 $I \in \mathbb{S}$, 使得 f 在 $\mathbb{B}_I$ 上的限制 f_I 为单射并有 $f(\mathbb{B}_I) \subseteq \mathbb{C}_I$. 如果 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, 则对任意的 $q \in \mathbb{B}$, 我们有

$$\frac{|q|}{(1+|q|)^2} \leq |f(q)| \leq \frac{|q|}{(1-|q|)^2}, \quad (3.8)$$

$$\frac{1-|q|}{(1+|q|)^3} \leq |f'(q)| \leq \frac{1+|q|}{(1-|q|)^3}, \quad (3.9)$$

$$\frac{1-|q|}{1+|q|} \leq |qf'(q) * f^{-*}(q)| \leq \frac{1+|q|}{1-|q|}. \quad (3.10)$$

此外, 以上六个不等式中的任何一个在某点 $q \neq 0$ 处成立等号当且仅当 f 具有如下的形式:

$$f(q) = q(1 - qe^{I\theta})^{-*2}, \quad \forall q \in \mathbb{B},$$

其中 $\theta \in \mathbb{R}$.

由于 Slice 正则理论缺少可以运用的复合理论, 我们不能运用单复变中的方法来证明上述定理, 我们的出发点是下面的凸组合等式, 详见文献 [32].

定理 4 设 f 为轴对称 Slice 域 $\Omega \subseteq \mathbb{H}$ 上的正则函数. 如果存在某个 $I \in \mathbb{S}$ 以及 $u \in \partial\mathbb{B}$, 使得 $f(\Omega_I) \subseteq \mathbb{C}_I u$, 则对任意的 $x + yJ \in \Omega$, 均有

$$|f(x + yJ)|^2 = \frac{1 + \langle I, J \rangle}{2} |f(x + yI)|^2 + \frac{1 - \langle I, J \rangle}{2} |f(x - yI)|^2. \quad (3.11)$$

众所周知, 在 Clifford 分析中, 经典的 Schwarz 引理是不成立的^[38]. 然而, 我们发现在 Slice Clifford 分析中的 Schwarz 引理仍然成立, 详见文献 [39].

首先, 我们证明了最大模原理在 Slice 域上成立.

定理 5 (最大模原理) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是 Slice 域, $Cl_{0,n}$ 是 Clifford 代数, $n \in \mathbb{N}$. 若 $f: \Omega \rightarrow Cl_{0,n}$ 是正则函数, 则 $|f|$ 在 Ω 内任意点都不能达到最大值, 除非在 Ω 内 f 恒等于常数.

利用最大模原理可导出 Slice Clifford 分析中的 Schwarz 引理.

定理 6 (Schwarz 引理) 设 $B = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : |x| < 1\}$. 若 $f: B \rightarrow Cl_{0,n}$ 是正则函数并且满足

$$f(0) = 0, \quad |f(x)| < 1, \quad \forall x \in B,$$

则

$$|f(x)| \leq |x|, \quad \forall x \in B, \quad (3.12)$$

且有

$$|f'(0)| \leq 1. \quad (3.13)$$

此外, 不等式 (3.12) 在 B 内某点 $x \neq 0$ 处成立等号或不等式 (3.13) 成立等号当且仅当

$$f(x) = xu, \quad \forall x \in B,$$

其中 $u \in \mathbb{R}_{0,m}$ 且 $|u| = 1$.

4 正则函数的 Julia 边界理论

本节介绍我们在正则函数 Julia 边界理论方面的部分工作, 参见文献 [31].

首先, 我们来介绍一些记号. 记 $\mathbb{B}$ 为 $\mathbb{H}$ 中的单位开球 $\{q \in \mathbb{H} : |q| < 1\}$. 对任意的 $k > 0$ 以及任意的 $p \in \partial\mathbb{B}$, 记

$$\mathcal{S}(p, k) = \{q \in \mathbb{B} : |p - q|^2 < k(1 - |q|^2)\}.$$

易知, $\mathcal{S}(p, k)$ 是以 $\frac{p}{1+k}$ 为球心、 $\frac{k}{1+k}$ 为半径且内切于单位球面 $\partial\mathbb{B}$ 的开球, 其边界 $\partial\mathcal{S}(p, k)$ 在正则函数的边界行为理论中扮演着非常重要的角色, 恰如下面的 Julia 引理所示.

定理 7 (Julia 引理) 设 f 为单位开球 $\mathbb{B}$ 的正则自映射且 $\xi \in \partial\mathbb{B}$. 假设数列 $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{B}$ 收敛于 ξ , 且使得极限

$$\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - |f(q_n)|}{1 - |q_n|}, \quad \eta := \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n)$$

均存在, 则 $\alpha > 0$ 且有

$$\operatorname{Re}((1 - f(q)\bar{\eta})^{-*} * (1 + f(q)\bar{\eta})) \geq \frac{1}{\alpha} \operatorname{Re}((1 - q\bar{\xi})^{-*} * (1 + q\bar{\xi})), \quad \forall q \in \mathbb{B}. \quad (4.1)$$

此外, 不等式 (4.1) 中等号在某点 $q \in \mathbb{B}$ 处成立当且仅当 f 是 $\mathbb{B}$ 上的正则 Möbius 变换. 特别地, 当 $\xi = 1$ 时, 不等式 (4.1) 等价于

$$\frac{|\eta - f(q)|^2}{1 - |f(q)|^2} \leq \alpha \frac{|1 - q|^2}{1 - |q|^2}, \quad \forall q \in \mathbb{B}. \quad (4.2)$$

换言之,

$$f(\mathcal{S}(1, k)) \subseteq \mathcal{S}(\eta, \alpha k), \quad \forall k > 0.$$

从定理 7, 我们可得到下面四元数版本的 Julia-Carathéodory 定理.

定理 8 (Julia-Carathéodory 定理) 设 f 为单位开球 $\mathbb{B}$ 的正则自映射且 $\xi \in \partial\mathbb{B}$, 则下面的条件相互等价:

(i) 下极限

$$\alpha := \liminf_{q \rightarrow 1} \frac{1 - |f(q)|}{1 - |q|} \quad (4.3)$$

有限;

(ii) f 在点 1 处有非切向极限 η , 且正则差商 $(q - 1)^{-*} * (f(q) - \eta)$ 在点 1 处有非切向极限 $f'(1)$;

(iii) f' 在点 1 处有非切向极限 $f'(1)$.

此外, 在上述条件下, 我们有

(a) (i) 中的 α 大于 0;

(b) (ii) 中的 $f'(1)$ 与 (iii) 中的相同;

(c) $f'(1) = \alpha\eta$;

(d) 差商 $\frac{1 - |f(q)|}{1 - |q|}$ 在点 1 处有非切向极限 α .

对于任意给定的 $\xi \in \mathbb{H}$, 我们用 $[\xi]$ 表示二维球面:

$$[\xi] = \{q\xi q^{-1} : q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}\}.$$

两个不同的四元数属于同一个二维球面当且仅当它们具有相同的实部与虚部.

定理 9 (边界 Schwarz 引理) 设 $\xi \in \partial\mathbb{B}$, f 为 $\mathbb{B} \cup [\xi]$ 上的正则函数且满足 $f(\mathbb{B}) \subseteq \mathbb{B}$, $f(\xi) \in \partial\mathbb{B}$, 则

(i) 我们有下面的精确估计:

$$\bar{\xi}(f(\xi)\overline{f'(\xi)} + [\bar{\xi}, f(\xi)\overline{R_{\bar{\xi}}R_{\xi}f(\xi)}]) \geq \frac{2|f(\xi) - f(0)|^2}{1 - |f(0)|^2 + |f'(0)|}, \quad (4.4)$$

其中

$$R_{\xi}f(q) := (q - \xi)^{-*} * (f(q) - f(\xi)).$$

此外, 上述不等式中成立等号当且仅当

$$f(q) = (1 - q(1 - qa\bar{\eta}))^{-*} * (q\bar{\eta} - a)\overline{f(0)v}^{-*} * (f(0) - q(1 - qa\bar{\eta}))^{-*} * (q\bar{\eta} - a)\bar{v}, \quad (4.5)$$

其中

$$\begin{aligned} a &\in [-1, 0], \quad v = (f(0) - f(\xi))^{-1}\xi(1 - f(\xi)\overline{f(0)}) \in \partial\mathbb{B}, \\ \eta &= (1 - f(\xi)\overline{f(0)})^{-1}\xi(1 - f(\xi)\overline{f(0)}) \in \partial\mathbb{B}. \end{aligned}$$

(ii) 如果还有

$$f^{(k)}(0) = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1,$$

其中 $n \in \mathbb{N}$ 为某个正整数, 则

$$\bar{\xi}(f(\xi)\overline{f'(\xi)} + [\bar{\xi}, f(\xi)\overline{R_{\bar{\xi}}R_{\xi}f(\xi)}]) \geq n + \frac{2|f(\xi) - \xi^n f^{(n)}(0)/n!|^2}{1 - |f^{(n)}(0)/n!|^2 + |f^{(n+1)}(0)/(n+1)!|}.$$

此外, 上述不等式中成立等号当且仅当

$$f(q) = q^n \left(1 - q(1 - qa\bar{\eta})^{-*} * (q\bar{\eta} - a) \frac{\overline{f^{(n)}(0)v}}{n!} \right)^{-*} * \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!} - q(1 - qa\bar{\eta})^{-*} * (q\bar{\eta} - a)\bar{v} \right),$$

其中

$$\begin{aligned} a &\in [-1, 0], \quad v = \left(\frac{\xi^n f^{(n)}(0)}{n!} - f(\xi) \right)^{-1} \xi \left(\xi^n - \frac{f(\xi)\overline{f^{(n)}(0)}}{n!} \right) \in \partial\mathbb{B}, \\ \eta &= \left(\xi^n - \frac{f(\xi)\overline{f^{(n)}(0)}}{n!} \right)^{-1} \xi \left(\xi^n - \frac{f(\xi)\overline{f^{(n)}(0)}}{n!} \right) \in \partial\mathbb{B}. \end{aligned}$$

特别地,

$$\bar{\xi}(f(\xi)\overline{f'(\xi)} + [\bar{\xi}, f(\xi)\overline{R_{\bar{\xi}}R_{\xi}f(\xi)}]) > n$$

除非 $f(q) = q^n u$, 其中 $u \in \partial\mathbb{B}$.

值得一提的是, 即使在复的情形下, 定理 9 中的结果也是一个新的结果. 更确切地讲, 对于任意满足条件 $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ 以及存在某个点 $\xi \in \partial\mathbb{D}$, 使得 $f(\xi) \in \partial\mathbb{D}$ 且在 $\mathbb{D} \cup \{\xi\}$ 的全纯函数 f , 我们均可将其唯一地正则延拓到 $\mathbb{B} \cup [\xi]$ 上使其满足定理 9 中的所有假设. 我们将该唯一的正则延拓仍记为 f , 其中包含关系 $f(\mathbb{B}) \subseteq \mathbb{B}$ 可由凸组合等式 (3.11) 得到. 对于所有这样的函数 f , 我们的结果变为

$$\frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)} \geq \frac{2|f(\xi) - f(0)|^2}{1 - |f(0)|^2 + |f'(0)|},$$

其改进了下面的由 Osserman 在文献 [40] 中建立的估计 (也称为 Osserman 不等式):

$$\frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)} \geq \frac{2(1 - |f(0)|^2)}{1 - |f(0)|^2 + |f'(0)|}.$$

此外, 注意到定理 8 仅对实边界点 $\xi = \pm 1 \in \partial\mathbb{B}$ 成立. 恰如定理 4 所证, 即使在假定

$$\alpha := \liminf_{\mathbb{B} \ni q \rightarrow \xi} \frac{1 - |f(q)|}{1 - |q|} < +\infty$$

下, 关系式

$$f'(\xi) = \alpha \bar{\xi} f(\xi)$$

在四元数情形下一般不成立, 这与复的情形形成了鲜明的对比. 这样一来, 一般的 Julia-Carathéodory 定理 ($\pm 1 \neq \xi \in \partial\mathbb{B}$ 的情形) 将比较复杂, 值得进一步研究. 同时, 该现象再次体现了实轴在 Slice 正则理论中的特殊地位.

推论 1 设 $\xi \in \partial\mathbb{B}$, f 为 $\mathbb{B} \cup [\xi]$ 上的正则函数且满足 $f(\mathbb{B}) \subseteq \mathbb{B}$, $f(0) = 0$ 以及 $f(\xi) = \xi$, 则

$$f'(\xi) - [\xi, R_{\bar{\xi}}R_{\xi}f(\xi)] \geq \frac{2}{1 + \operatorname{Re}f'(0)}.$$

此外, 上式中等号成立当且仅当

$$f(q) = q(1 - qa\bar{\xi})^{-*} * (q - a\xi)\bar{\xi},$$

其中 $a \in [-1, 1)$.

注 1 推论 1 中的 Lie 括号不一定恒为 0, 导数 $f'(\xi)$ 也不一定是实数, 恰如下面的例 1 所示. 特别地, 这意味着大家公认的事实

$$f'(\xi) > 1$$

在四元数情形下并不一定成立, 同时也说明文献 [34, 定理 9.24] 是错误的.

例 1 令

$$f(q) = -q\left(1 + \frac{qI}{2}\right)^{-*} * \left(q - \frac{I}{2}\right)J,$$

其中 $I, J \in \mathbb{S}$ 且 $I \perp J$. 显然, f 是二阶 Blaschke 乘积, 因此, 其在 $\mathbb{B}$ 上正则且满足 $f(\mathbb{B}) \subseteq \mathbb{B}$, $f(0) = 0$ 以及 $f(J) = J$. 这意味着, f 满足推论 1 中的所有假设. 但是, 我们发现 $f'(J)$ 的确不是实数. 事实上, 我们有

$$f'(J) = \frac{4}{3}(2 - IJ) \notin \mathbb{R}.$$

然而, 简单的计算表明,

$$[J, R_{-J}R_J f(J)] = -\frac{4}{3}IJ, \quad f'(J) - [J, R_{-J}R_J f(J)] = \frac{8}{3} \geq 1,$$

恰如推论 1 所断言.

5 正则函数的空间理论

本节介绍我们在正则函数空间理论方面的部分工作.

文献 [33] 引入了 Slice Lebesgue 测度

$$d\text{Vol}_B(q) = |q|^{-2}dm(q),$$

其中 dm 表示 $\mathbb{R}^4$ 中的 Lebesgue 体积元. 这个新测度可以用广义极坐标 $q = re^{I\theta}$ 解释为

$$d\text{Vol}_B(q) = r dr d\sigma_{\mathbb{S}}(q) = r dr d\theta dA_{\mathbb{S}}(I),$$

其中 $dA_{\mathbb{S}}(I)$ 表示 $\mathbb{S} \cong S^2$ 上的 Lebesgue 面积元.

基于 Slice Lebesgue 测度和凸组合等式 (3.11), 我们可以建立下面的 Forelli-Rudin 型估计. 它是正则函数空间理论中最基本的不等式.

定理 10 假设 c 是实数且 $t > -1$, 则积分

$$I_c(q) = \int_{\partial B} |(1 - q\bar{w})^{-*(1+c)}| d\sigma_{\mathbb{S}}(w)$$

和积分

$$J_{c,t}(q) = \int_B |(1 - q\bar{w})^{-*(2+t+c)}| (1 - |w|^2)^t d\text{Vol}_B(w)$$

具有下面的渐近关系:

- (i) 如果 $c < 0$, 则 I_c 和 $J_{c,t}$ 在单位球内均有界;
- (ii) 如果 $c = 0$, 则当 $|q| \rightarrow 1^-$ 时, $I_c(q) \approx J_{c,t}(q) \approx \log \frac{1}{1-|q|^2}$;
- (iii) 如果 $c > 0$, 则当 $|q| \rightarrow 1^-$ 时, $I_c(q) \approx J_{c,t}(q) \approx (1 - |q|^2)^{-c}$.

文献 [33] 研究了正则函数的 Lipschitz 空间. 为了给出整体 Lipschitz 空间定义, 我们用 σ -距离代替 Euclid 距离.

定义 7 四元数 q 与 p 的 σ -距离定义为

$$\sigma(q, p) = \begin{cases} |q - p|, & \text{如果 } p \text{ 和 } q \text{ 属于同一复平面 } \mathbb{C}_I, \\ \omega(q, p), & \text{其他,} \end{cases} \quad (5.1)$$

其中

$$\omega(q, p) = \sqrt{(\operatorname{Re}(q) - \operatorname{Re}(p))^2 + (|\operatorname{Im}(q)| + |\operatorname{Im}(p)|)^2}.$$

正则 α -Lipschitz 空间 Λ^α ($0 < \alpha < 1$) 定义为在单位开球内正则函数 f 全体且满足

$$\|f\|_{\Lambda^\alpha} := |f(0)| + \sup_{\substack{q_1, q_2 \in B \\ q_1 \neq q_2}} \frac{|f(q_1) - f(q_2)|}{\sigma(q_1, q_2)^\alpha} < +\infty.$$

类似于单复变函数论中的全纯 α -Bloch 空间, 我们定义正则 α -Bloch 空间 $\mathcal{B}_\alpha$ ($\alpha > 0$) 为在单位开球内正则函数 f 全体且满足

$$\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha} := |f(0)| + \sup_{q \in B} (1 - |q|^2)^\alpha |f'(q)| < +\infty.$$

类似地, 定义正则小 α -Bloch 空间 $\mathcal{B}_{\alpha,0}$ ($\alpha > 0$) 为

$$\mathcal{B}_{\alpha,0} = \left\{ f \in \mathcal{B}_\alpha : \lim_{|q| \rightarrow 1^-} (1 - |q|^2)^\alpha |f'(q)| = 0 \right\}.$$

下列定理给出了正则函数的 Bloch 空间的无导数刻画.

定理 11 对任意的 $\alpha \in (0, 1)$ 成立 $\Lambda^\alpha = \mathcal{B}_{1-\alpha}$.

为了研究 α -Bloch 空间的对偶空间, 我们引入加权 Bergman 空间

$$A_\beta^p = L^p(B, dv_\beta) \cap \mathcal{SR}(B),$$

其中 $\beta > -1$, $p > 0$ 且

$$dv_\beta(q) = c_\beta (1 - |q|^2)^\beta d\operatorname{Vol}_B(q), \quad c_\beta = \frac{1 + \beta}{2\pi^2}$$

是单位球上概率测度, $\mathcal{SR}(B)$ 表示 B 中正则函数全体.

对于 $s > -1$, 我们记

$$\langle f, g \rangle_s = \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_B \overline{g(rq)} f(rq) dv_s(q),$$

其中 f 和 g 均为定义在单位开球上的正则函数.

定理 12 设 $\alpha > 0$, $\beta > -1$, $0 < p \leq 1$, $s = \frac{2+\beta}{p} + \alpha - 3$. 如果 $s > -1$, 则在积分配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ 意义下有下面的对偶关系:

$$(A_\beta^p)^* = \mathcal{B}_\alpha,$$

其中等号在范数等价意义下成立, $(A_\beta^p)^*$ 表示 A_β^p 上有界右 $\mathbb{H}$ -线性泛函.

定理 13 设 $\alpha > 0$, $\beta > -1$, $s = \alpha + \beta - 1 > -1$, 则在积分配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ 意义下有下面的对偶关系:

$$(\mathcal{B}_{\alpha,0})^* = A_{\beta}^1,$$

其中等号在范数等价意义下成立, $(\mathcal{B}_{\alpha,0})^*$ 表示 $\mathcal{B}_{\alpha,0}$ 上有界右 $\mathbb{H}$ -线性泛函.

参考文献

- Gentili G, Struppa D C. A new approach to Cullen-regular functions of a quaternionic variable. *C R Math Acad Sci Paris*, 2006, 342: 741–744
- Gentili G, Struppa D C. A new theory of regular functions of a quaternionic variable. *Adv Math*, 2007, 216: 279–301
- Colombo F, Gentili G, Sabadini I, et al. Extension results for Slice regular functions of a quaternionic variable. *Adv Math*, 2009, 222: 1793–1808
- Gentili G, Stoppato C. Zeros of regular functions and polynomials of a quaternionic variable. *Michigan Math J*, 2008, 56: 655–667
- Stoppato C. Poles of regular quaternionic functions. *Complex Var Elliptic Equ*, 2009, 54: 1001–1018
- Stoppato C. Singularities of Slice regular functions. *Math Nachr*, 2012, 285: 1274–1293
- Colombo F, Sabadini I, Struppa D C. *Noncommutative Functional Calculus: Theory and Applications of Slice Hyperholomorphic Functions*. Basel: Birkhäuser, 2011
- Colombo F, Sabadini I. On the formulations of the quaternionic functional calculus. *J Geom Phys*, 2010, 60: 1490–1508
- Colombo F, Sabadini I. The Cauchy formula with s -monogenic kernel and a functional calculus for noncommuting operators. *J Math Anal Appl*, 2011, 373: 655–679
- Colombo F, Sabadini I. The quaternionic evolution operator. *Adv Math*, 2011, 227: 1772–1805
- Colombo F, Sabadini I, Struppa D C. A new functional calculus for noncommuting operators. *J Funct Anal*, 2008, 254: 2255–2274
- Ghiloni R, Moretti V, Perotti A. Continuous Slice functional calculus in quaternionic Hilbert spaces. *Rev Math Phys*, 2013, 25: 1350006
- Ghiloni R, Recupero V. Semigroups over real alternative $*$ -algebras: Generation theorems and spherical sectorial operators. *Trans Amer Math Soc*, in press, 2015
- Colombo F, Sabadini I. On some properties of the quaternionic functional calculus. *J Geom Anal*, 2009, 19: 601–627
- Alpay D, Bolotnikov V, Colombo F, et al. Self-mappings of the quaternionic unit ball: Multiplier properties, Schwarz-Pick inequality, and Nevanlinna-Pick interpolation problem. *Indiana Univ Math J*, 2015, 64: 151–180
- Alpay D, Colombo F, Sabadini I. Schur functions and their realizations in the Slice hyperholomorphic setting. *Integral Equations and Operator Theory*, 2012, 72: 253–289
- Alpay D, Colombo F, Sabadini I. Pontryagin-de Branges-Rovnyak spaces of Slice hyperholomorphic functions. *J Anal Math*, 2013, 121: 87–125
- Alpay D, Colombo F, Sabadini I. Krein-Langer factorization and related topics in the Slice hyperholomorphic setting. *J Geom Anal*, 2014, 24: 843–872
- Alpay D, Colombo F, Kimsey D P, et al. The spectral theorem for unitary operators based on the S -spectrum. *ArXiv:1403.0175*, 2014
- Adler S L. *Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields*. New York: The Clarendon Press; Oxford University Press, 1995
- Birkhoff G, von Neumann J. The logic of quantum mechanics. *Ann of Math*, 1936, 37: 823–843
- Bisi C, Stoppato C. The Schwarz-Pick lemma for Slice regular functions. *Indiana Univ Math J*, 2012, 61: 297–317
- Rocchetta C D, Gentili G, Sarfatti G. A Bloch-Landau theorem for Slice regular functions. In: *Advances in Hypercomplex Analysis*. Milan: Springer, 2013, 55–74
- Rocchetta C D, Gentili G, Sarfatti G. The Bohr theorem for Slice regular functions. *Math Nachr*, 2012, 285: 2093–2105
- Gentili G, Sarfatti G. Landau-Toeplitz theorems for Slice regular functions over quaternions. *Pacific J Math*, 2013, 265: 381–404
- Colombo F, González-Cervantes J O, Sabadini I. A nonconstant coefficients differential operator associated to Slice monogenic functions. *Trans Amer Math Soc*, 2013, 365: 303–318
- Colombo F, Sabadini I, Struppa D C. An extension theorem for Slice monogenic functions and some of its consequences. *Israel J Math*, 2010, 177: 369–389

- 28 Colombo F, Sabadini I, Struppa D C. Slice monogenic functions. *Israel J Math*, 2009, 171: 385–403
- 29 Gentili G, Struppa D C. Regular functions on the space of Cayley numbers. *Rocky Mountain J Math*, 2010, 40: 225–241
- 30 Ghiloni R, Perotti A. Slice regular functions on real alternative algebras. *Adv Math*, 2011, 226: 1662–1691
- 31 Ren G B, Wang X P. Julia theory for Slice regular functions. *Tran Amer Math Soc*, in press, 2015
- 32 Ren G B, Wang X P. The growth and distortion theorems for Slice regular functions. *ArXiv:1410.4369*, 2014
- 33 Ren G B, Xu Z H. Slice Lebesgue measure of quaternions. *Adv Appl Clifford Algebr*, doi: 10.1007/s00006-015-0578-1, 2015
- 34 Gentili G, Stoppato C, Struppa D C. *Regular Functions of a Quaternionic Variable*. Berlin: Springer, 2013
- 35 Ren G B, Wang X P. Carathéodory theorems for Slice regular functions. *Complex Anal Oper Theory*, 2015, 9: 1229–1243
- 36 Alpay D, Colombo F, Kimsey D P, et al. An extension of Herglotz’s theorem to the quaternions. *J Math Anal Appl*, 2015, 421: 754–778
- 37 Rocchetta C D, Gentili G, Sarfatti G. The Bohr theorem for Slice regular functions. *Math Nachr*, 2012, 285: 2093–2105
- 38 Yang Y, Qian T. Schwarz lemma in Euclidean spaces. *Complex Var Elliptic Equ*, 2006, 51: 653–659
- 39 Ren G B, Xu Z H. Schwarz’s Lemma for Slice Clifford analysis. *Adv Appl Clifford Algebr*, doi: 10.1007/s00006-015-0534-0, 2015
- 40 Osserman R. A sharp Schwarz inequality on the boundary. *Proc Amer Math Soc*, 2000, 128: 3513–3517

Recent development of the theory of Slice regular functions

REN GuangBin, WANG XiePing & XU ZhengHua

Abstract Theory of Slice regular functions is a natural generalization of complex analysis from complex numbers to quaternions. It was introduced initially by Gentili and Struppa in 2006, and has been extensively studied and has found its elegant applications to functional calculus for quaternionic linear operators, operator theory, Schur analysis and quaternionic quantum mechanics. Meanwhile, the notion of Slice regularity was also extended to functions of an octonionic variable and to the setting of Clifford algebras as well as to the setting of alternative real algebras. In this survey, we shall focus mainly on our recent results in the theory of Slice regular functions. Firstly, we establish the Borel-Carathéodory inequality and the sharp growth and distortion theorems for Slice regular extensions of normalized biholomorphic functions on the unit disc in the setting of quaternions. In addition, we study the boundary behavior of Slice regular functions and obtain the Julia lemma, the Julia-Carathéodory theorem as well as the boundary Schwarz lemma. In particular, we find that the boundary Schwarz lemma does not ensure the Slice derivative of a Slice regular self-mappings of the open unit ball $\mathbb{B} \subset \mathbb{H}$ at its boundary fixed point to be necessarily a real number, in contrast to that in the complex case. Finally, we study theory of function spaces of Slice regular functions and establish the Forelli-Rudin type estimates.

Keywords quaternions, Slice regular functions, growth theorem, distortion theorem, Schwarz lemma, Julia-Carathéodory theorem, boundary Schwarz lemma, Lipschitz space

MSC(2010) 30G35, 32A26

doi: 10.1360/N012015-00151