单位球上不同 Bergman 空间之间 小 Hankel 算子的本性模

献给史济怀教授 80 华诞

罗 罗

中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026

E-mail: lluo@ustc.edu.cn

收稿日期: 2015-03-09; 接受日期: 2015-08-10

国家自然科学基金 (批准号: 11471301 和 11171318) 资助项目

摘要 本文利用指标 φ 的 Berezin 变换给出了小 Hankel 算子 $h_\varphi: A^p(B) \rightarrow \overline{A^q(B)}$ ($1 \leq p < \infty, 1 < q < \infty, p \leq q$) 的本性模估计 $C_1 \limsup_{|a| \rightarrow 1^-} |V\varphi(a)| \leq \|h_\varphi\|_{e, A^p(B) \rightarrow \overline{A^q(B)}} \leq C_2 \limsup_{|a| \rightarrow 1^-} |V\varphi(a)|$, 其中 $V\varphi(a) = \int_B \frac{K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w,a)}{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(a,a)} \varphi(w) d\nu(w)$, C_1 和 C_2 是常数. 作为应用, 本文给出了此类算子有界当且仅当 $\sup_{a \in B} |V\varphi(a)| < \infty$, 而此类算子是紧的当且仅当 $\limsup_{|a| \rightarrow 1^-} |V\varphi(a)| = 0$.

关键词 小 Hankel 算子 本性模 Bergman 空间

MSC (2010) 主题分类 32A36, 47B35

1 引言

设 B 是 $\mathbb{C}^n$ 中的开单位球, ν 是 $\mathbb{C}^n$ 中的正规化 Lebesgue 测度使得 $\nu(B) = 1$. 设 $0 < p < \infty$, Bergman 空间 $A^p(B)$ 是由 B 中满足 $\int_B |f(z)|^p d\nu(z) < \infty$ 的全纯函数的全体所构成的空间, 它是 $L^p(B)$ 的闭子空间.

存在如下定义的 $L^2(B)$ 到 $A^2(B)$ 的正交投影 P ,

$$Pf(z) = \int_B K(z, w) f(w) d\nu(w),$$

其中 $K(z, w) = \frac{1}{(1-\langle z, w \rangle)^{n+1}}$ 是 B 上的 Bergman 核函数.

用 $\overline{P}$ 表示 $L^2(B)$ 到 $\overline{A^2(B)} = \{\overline{f}: f \in A^2(B)\}$ 的正交投影, 则

$$\overline{P}f(z) = \int_B \overline{K(z, w)} f(w) d\nu(w) = \int_B K(w, z) f(w) d\nu(w).$$

对任一给定的 $\varphi \in L^2(B)$, 具有指标 φ 的小 Hankel 算子是如下定义的一个积分算子:

$$h_\varphi f(z) = \int_B K(w, z) f(w) \varphi(w) d\nu(w), \quad f \in A^2(B).$$

小 Hankel 算子已被进行了广泛的研究, 这方面的重要内容参见文献 [1-3], 文献 [1] 研究的是 $n = 1$ 的情形; 文献 [2,3] 研究的是 $n > 1$ 的情形.

我们自然地会考虑更一般情形的小 Hankel 算子

$$h_\varphi : A^p(B) \rightarrow \overline{A^q(B)}, \quad 0 < p, q < \infty.$$

文献 [4] 研究了 $0 < p, q \leq 1$ 情形中小 Hankel 算子 h_φ 的有界性问题.

本文考虑当 $1 \leq p < \infty, 1 < q < \infty, p \leq q$ 时, 小 Hankel 算子 $h_\varphi : A^p(B) \rightarrow \overline{A^q(B)}$ 的本性模问题.

我们知道线性算子 T 的本性模是算子 T 到紧算子集合的距离, 即

$$\|T\|_e = \inf\{\|T - L\| : L \text{ 是紧算子}\}.$$

线性算子 T 的本性模将算子 T 的有界性和紧性联系在一起.

我们知道 $\|T\|_e < +\infty$ 当且仅当 T 是有界的; $\|T\|_e = 0$ 当且仅当 T 是紧的, 因此, 对本性模 $\|T\|_e$ 的估计可以导出算子 T 的有界性和紧性判别条件.

当 $p = q = 2$ 时, Yamaji [5] 利用共轭算子的性质和指标 φ 的 Berezin 变换给出了小 Hankel 算子 $h_\varphi : A^2(B) \rightarrow \overline{A^2(B)}$ 的本性模估计.

本文利用指标 φ 的 Berezin 变换给出了小 Hankel 算子 $h_\varphi : A^p(B) \rightarrow \overline{A^q(B)}$ ($1 \leq p < \infty, 1 < q < \infty, p \leq q$) 的本性模估计, 作为此结论的推论, 我们给出了此类算子的有界性和紧性的判别条件. 我们推广了文献 [5] 的结果, 但我们使用的方法与文献 [5] 的方法是根本不同的, 文献 [5] 的方法在本文讨论的情形中是无效的.

结合本文的技巧和文献 [6] 的技巧, 我们可以将本文的结果推广到有界对称域和有限型凸域上以及加权的情形. 为了本文的简洁, 我们仅考虑球上的简化情形.

在本文中, C 表示正常数, 并且在不同的地方可以不同.

2 主要结果和证明

在本文中, 我们得到下述定理.

定理 1 设 $1 \leq p < \infty, 1 < q < \infty, p \leq q$, 设 φ 是 B 上的关于测度 ν 的 Lebesgue 可积函数, 具有指标 φ 的小 Hankel 算子 $h_\varphi : A^p(B) \rightarrow \overline{A^q(B)}$, 则或者 $\|h_\varphi\|_{e, A^p(B) \rightarrow \overline{A^q(B)}} = +\infty$, 或者存在常数 C_1 和 C_2 , 使得

$$C_1 \limsup_{|a| \rightarrow 1^-} |V\varphi(a)| \leq \|h_\varphi\|_{e, A^p(B) \rightarrow \overline{A^q(B)}} \leq C_2 \limsup_{|a| \rightarrow 1^-} |V\varphi(a)|,$$

其中

$$V\varphi(a) = \int_B \frac{K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, a)}{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(a, a)} \varphi(w) d\nu(w).$$

由定理 1, 我们得到下面两个推论.

推论 1 设 $1 \leq p < \infty, 1 < q < \infty, p \leq q$, 设 φ 是 B 上的关于测度 ν 的 Lebesgue 可积函数, 则具有指标 φ 的小 Hankel 算子 $h_\varphi : A^p(B) \rightarrow \overline{A^q(B)}$ 有界当且仅当

$$\sup_{a \in B} \left| \int_B \frac{K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, a)}{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(a, a)} \varphi(w) d\nu(w) \right| < \infty.$$

推论 2 设 $1 \leq p < \infty$, $1 < q < \infty$, $p \leq q$, 设 φ 是 B 上的关于测度 ν 的 Lebesgue 可积函数, 则具有指标 φ 的小 Hankel 算子 $h_\varphi: A^p(B) \rightarrow \overline{A^q(B)}$ 是紧的当且仅当

$$\limsup_{|a| \rightarrow 1^-} \left| \int_B \frac{K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, a)}{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(a, a)} \varphi(w) d\nu(w) \right| = 0.$$

定理 1 的证明 若 $\|h_\varphi\|_{e, A^p(B) \rightarrow \overline{A^q(B)}} \neq +\infty$, 则具有指标 φ 的小 Hankel 算子 $h_\varphi: A^p(B) \rightarrow \overline{A^q(B)}$ 是有界的. 首先, 我们给出下界估计的证明.

对任意固定的 $a \in B$, 我们令

$$f_a(z) = \frac{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(z, a)}{\|K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(z, a)\|_{A^p}}, \quad g_a(z) = \frac{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(z, a)}{\|K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(z, a)\|_{A^{q'}}},$$

其中 $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, 则 $f_a(z) \in A^p(B)$, $\|f_a(z)\|_{A^p} = 1$, $g_a(z) \in A^{q'}(B)$, $\|g_a(z)\|_{A^{q'}} = 1$.

我们任取一个将 $A^p(B)$ 映到 $\overline{A^q(B)}$ 的紧算子 L . 因为当 $|a| \rightarrow 1^-$ 时, 有界函数列 $\{f_a(z)\}$ 在 B 上内闭一致收敛于 0, 所以, 当 $|a| \rightarrow 1^-$ 时, $\|Lf_a\|_{A^q} \rightarrow 0$. 因为小 Hankel 算子 $h_\varphi: A^p(B) \rightarrow \overline{A^q(B)}$ 是有界的, 利用 Hölder 不等式, 得

$$\left| \int_B (h_\varphi f_a(z) - Lf_a(z)) g_a(z) d\nu(z) \right| \leq \|h_\varphi f_a - Lf_a\|_{A^q} \|g_a\|_{A^{q'}} \leq \|h_\varphi - L\|.$$

因为

$$\left| \int_B (h_\varphi f_a(z)) g_a(z) d\nu(z) \right| - \left| \int_B Lf_a(z) g_a(z) d\nu(z) \right| \leq \left| \int_B (h_\varphi f_a(z) - Lf_a(z)) g_a(z) d\nu(z) \right|,$$

所以,

$$\limsup_{|a| \rightarrow 1^-} \left| \int_B (h_\varphi f_a(z)) g_a(z) d\nu(z) \right| \leq \|h_\varphi - L\|.$$

因为

$$\int_B (h_\varphi f_a(z)) g_a(z) d\nu(z) = \frac{1}{\|K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(z, a)\|_{A^p} \cdot \|K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(z, a)\|_{A^{q'}}} \int_B K(w, a)^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \varphi(w) d\nu(w),$$

利用文献 [7, 性质 1.4.10], 我们得

$$\|K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(z, a)\|_{A^p} \approx (1 - |a|^2)^{-(1-\frac{1}{q})(n+1)}, \quad \|K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(z, a)\|_{A^{q'}} \approx (1 - |a|^2)^{-\frac{n+1}{p}},$$

因此,

$$\left| \int_B (h_\varphi f_a(z)) g_a(z) d\nu(z) \right| \approx \left| \int_B \frac{K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, a)}{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(a, a)} \varphi(w) d\nu(w) \right|.$$

所以,

$$\|h_\varphi - L\| \geq C \limsup_{|a| \rightarrow 1^-} \left| \int_B \frac{K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, a)}{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(a, a)} \varphi(w) d\nu(w) \right|.$$

因为 L 是任一个将 $A^p(B)$ 映到 $\overline{A^q(B)}$ 的紧算子, 所以,

$$\|h_\varphi\|_{e, A^p(B) \rightarrow \overline{A^q(B)}} \geq C \limsup_{|a| \rightarrow 1^-} \left| \int_B \frac{K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, a)}{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(a, a)} \varphi(w) d\nu(w) \right|,$$

我们完成了下界估计的证明.

下面开始上界估计的证明.

对 $1 \leq p < \infty$, $1 < q < \infty$, $p \leq q$, $f \in A^p(B)$, 有

$$K(w, z)f(w) \in A^1(B, K^{-1-2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, w)d\nu(w)),$$

其中 $A^1(B, K^{-1-2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, w)d\nu(w))$ 是球上全纯函数关于加权 Lebesgue 测度 $K^{-1-2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, w)d\nu(w)$ 的加权 Bergman 空间, 由加权 Bergman 空间上全纯函数的积分表示公式 (参见文献 [8, 定理 2.2]), 有

$$K(w, z)f(w) = C \int_B K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, u)K(u, z)f(u)K^{-1-2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(u, u)d\nu(u),$$

其中 C 是常数, 与所表示的全纯函数无关. 因此,

$$\begin{aligned} h_\varphi f(z) &= \int_B K(w, z)f(w)\varphi(w)d\nu(w) \\ &= C \int_B \varphi(w)d\nu(w) \int_B K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, u)K(u, z)f(u)K^{-1-2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(u, u)d\nu(u) \\ &= C \int_B K(u, z)f(u)K^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(u, u)d\nu(u) \int_B \frac{K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, u)}{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(u, u)}\varphi(w)d\nu(w). \end{aligned}$$

对 $0 < \rho < 1$, 我们令

$$\begin{aligned} T_1 f(z) &= C \int_{B \setminus \rho B} K(u, z)f(u)K^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(u, u)d\nu(u) \int_B \frac{K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, u)}{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(u, u)}\varphi(w)d\nu(w), \\ T_2 f(z) &= C \int_{\rho B} K(u, z)f(u)K^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(u, u)d\nu(u) \int_B \frac{K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, u)}{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(u, u)}\varphi(w)d\nu(w). \end{aligned}$$

我们首先证明 $T_2 : A^p(B) \rightarrow \overline{A^q(B)}$ 是紧的, 只需证明对 $A^p(B)$ 中的任一有界函数列 $\{f_k\}$ 且当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\{f_k\}$ 在 B 上内闭一致收敛于 0, 则当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\int_B |T_2 f_k(z)|^q d\nu(z) \rightarrow 0$.

从上面的下界估计中, 我们知道 $\left| \int_B \frac{K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, a)}{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(a, a)}\varphi(w)d\nu(w) \right|$ 是有界的, 所以,

$$|T_2 f_k(z)| \leq C \int_{\rho B} |K(u, z)f_k(u)|(1-|u|^2)^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})(n+1)}d\nu(u) \leq C \int_{\rho B} |f_k(u)|d\nu(u).$$

因为当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\{f_k\}$ 在 B 上内闭一致收敛于 0, 所以, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\int_B |T_2 f_k(z)|^q d\nu(z) \rightarrow 0$, 因此, $T_2 : A^p(B) \rightarrow \overline{A^q(B)}$ 是紧的.

对积分算子 T_1 , 有

$$\begin{aligned} |T_1 f(z)| &\leq C \int_{B \setminus \rho B} |K(u, z)f(u)|(1-|u|^2)^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})(n+1)}d\nu(u) \sup_{u \in B \setminus \rho B} \left| \int_B \frac{K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, u)}{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(u, u)}\varphi(w)d\nu(w) \right| \\ &< C \sup_{u \in B \setminus \rho B} \left| \int_B \frac{K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, u)}{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(u, u)}\varphi(w)d\nu(w) \right| \int_B |K(u, z)f(u)|(1-|u|^2)^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})(n+1)}d\nu(u). \end{aligned}$$

因此,

$$\left\{ \int_B |T_1 f(z)|^q d\nu(z) \right\}^{\frac{1}{q}} \leq C \sup_{u \in B \setminus \rho B} \left| \int_B \frac{K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, u)}{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(u, u)}\varphi(w)d\nu(w) \right|$$

$$\times \left\{ \int_B \left[\int_B |K(u, z)f(u)|(1 - |u|^2)^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})(n+1)} d\nu(u) \right]^q d\nu(z) \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

令 $c = \frac{1}{qq'}$ 和 $g(u) = (1 - |u|^2)^{-c}$, $u \in B$, 其中 $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

由 Hölder 不等式, 我们得到

$$\begin{aligned} & \int_B |K(u, z)f(u)|(1 - |u|^2)^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})(n+1)} d\nu(u) \\ & \leq \left\{ \int_B |K(u, z)|g(u)^{q'} d\nu(u) \right\}^{\frac{1}{q'}} \left\{ \int_B \frac{|K(u, z)||f(u)|^q(1 - |u|^2)^{q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})(n+1)}}{g(u)^q} d\nu(u) \right\}^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

由文献 [7, 性质 1.4.10], 我们得

$$\int_B |K(u, z)|g(u)^{q'} d\nu(u) \leq Cg(z)^{q'}, \quad \int_B |K(u, z)|g(z)^q d\nu(z) \leq Cg(u)^q.$$

因此,

$$\begin{aligned} & \int_B \left\{ \int_B |K(u, z)f(u)|(1 - |u|^2)^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})(n+1)} d\nu(u) \right\}^q d\nu(z) \\ & \leq C \int_B \frac{|f(u)|^q(1 - |u|^2)^{q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})(n+1)}}{g(u)^q} d\nu(u) \int_B |K(u, z)|g(z)^q d\nu(z) \\ & \leq C \int_B |f(u)|^q(1 - |u|^2)^{q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})(n+1)} d\nu(u). \end{aligned}$$

利用文献 [8, 引理 2.24], 我们有

$$|f(u)|^p \leq \frac{C}{|E(u, r)|} \int_{E(u, r)} |f(w)|^p d\nu(w) \leq C(1 - |u|^2)^{-(n+1)} \int_B \chi_{E(u, r)}(w) |f(w)|^p d\nu(w),$$

其中 $r > 0$, $E(u, r) = \{z \in B : \beta(u, z) \leq r\}$ 是闭的 Bergman 度量球, $\beta(u, z)$ 是 Bergman 度量下的距离, $|E(u, r)| = \nu[E(u, r)]$, $|E(u, r)| \approx (1 - |u|^2)^{(n+1)}$. 因此,

$$\begin{aligned} & \int_B |f(u)|^q(1 - |u|^2)^{q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})(n+1)} d\nu(u) \\ & \leq C \int_B [(1 - |u|^2)^{-(n+1)} \int_B \chi_{E(u, r)}(w) |f(w)|^p d\nu(w)]^{\frac{q}{p}} (1 - |u|^2)^{q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})(n+1)} d\nu(u). \end{aligned}$$

在不等式的右边利用 Minkowski 积分不等式及 $\chi_{E(u, r)}(w) = \chi_{E(w, r)}(u)$, 有

$$\begin{aligned} & \int_B |f(u)|^q(1 - |u|^2)^{q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})(n+1)} d\nu(u) \\ & \leq C \left\{ \int_B |f(w)|^p d\nu(w) \left[\int_B (1 - |u|^2)^{-(n+1)} \chi_{E(u, r)}(w) d\nu(u) \right]^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{q}{p}} \\ & \leq C \left\{ \int_B |f(w)|^p d\nu(w) \right\}^{\frac{q}{p}}. \end{aligned}$$

由此, 我们得

$$\left\{ \int_B |T_1 f(z)|^q d\nu(z) \right\}^{\frac{1}{q}} \leq C \sup_{u \in B \setminus \rho B} \left| \int_B \frac{K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, u)}{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(u, u)} \varphi(w) d\nu(w) \right| \left\{ \int_B |f(z)|^p d\nu(z) \right\}^{\frac{1}{p}},$$

则

$$\|T_1\| \leq C \sup_{u \in B \setminus \rho B} \left| \int_B \frac{K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, u)}{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(u, u)} \varphi(w) d\nu(w) \right|.$$

因此, 由本性模的定义, 我们有

$$\|h_\varphi\|_{e, A^p(B) \rightarrow A^q(B)} \leq \|T_1 + T_2\|_e \leq \|T_1\| \leq C \sup_{u \in B \setminus \rho B} \left| \int_B \frac{K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, u)}{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(u, u)} \varphi(w) d\nu(w) \right|.$$

当 $\rho \rightarrow 1$ 时, 我们有

$$\|h_\varphi\|_{e, A^p(B) \rightarrow A^q(B)} \leq C \limsup_{|a| \rightarrow 1^-} \left| \int_B \frac{K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, a)}{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(a, a)} \varphi(w) d\nu(w) \right|.$$

我们完成了定理 1 的证明. □

参考文献

- 1 Janson S, Peetre J, Rochberg R. Hankel forms and the Fock space. *Rev Mat Iberoamericana*, 1987, 3: 61–138
- 2 Zhu K H. Hankel operators on the Bergman spaces of bounded symmetric domains. *Trans Amer Math Soc*, 1991, 324: 707–730
- 3 Bonami A, Peloso M M, Symesak F. Factorization of Hardy spaces and Hankel operators on convex domains in C^n . *J Geom Anal*, 2001, 11: 363–397
- 4 Bonami A, Luo L. On Hankel operators between Bergman spaces on the unit ball. *Houston J Math*, 2005, 31: 815–828
- 5 Yamaji . Essential norm estimates for little Hankel operators on weighted Bergman spaces of the unit ball. *Complex Anal Oper Theory*, 2014, 8: 863–873
- 6 Bonami A, Peloso M M, Symesak F. Powers of the Szegő kernel and Hankel operators on Hardy spaces. *Michigan Math J*, 1999, 46: 225–250
- 7 Rudin W. *Function Theory in the Unit Ball of C^n* . New York: Springer-Verlag, 1980
- 8 Zhu K. *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball*. New York: Springer-Verlag, 2005

Essential norm of the little Hankel operators between Bergman spaces of the unit ball

LUO Luo

Abstract In this paper, we estimate the essential norm of the little Hankel operators $h_\varphi : A^p(B) \rightarrow \overline{A^q(B)}$ ($1 \leq p < \infty$, $1 < q < \infty$, $p \leq q$) as follows: $C_1 \limsup_{|a| \rightarrow 1^-} |V\varphi(a)| \leq \|h_\varphi\|_{e, A^p(B) \rightarrow \overline{A^q(B)}} \leq C_2 \limsup_{|a| \rightarrow 1^-} |V\varphi(a)|$, where

$$V\varphi(a) = \int_B \frac{K^{2(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(w, a)}{K^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(a, a)} \varphi(w) d\nu(w),$$

C_1 and C_2 are constants. As an application of these estimates, we also get that this kind operators is bounded if and only if $\sup_{a \in B} |V\varphi(a)| < \infty$, and it is compact if and only if $\limsup_{|a| \rightarrow 1^-} |V\varphi(a)| = 0$.

Keywords little Hankel operator, essential norm, Bergman space

MSC(2010) 32A36, 47B35

doi: 10.1360/N012015-00121