一种新的交通流动力学模型

姜 锐 吴清松 朱祚金

(中国科学技术大学工程科学学院, 合肥 230026)

摘要 从跟驰理论的思想出发, 按照交通流研究中通常采用的微观-宏观参量间联系方法, 得到一种新的动力学模型, 能克服现有动力学模型中普遍存在的一些问题. 数值模拟表明, 新模型能较好地计算堵塞、疏导、幽灵塞车、时走时停现象等车流情况.

关键词 交通流 动力学模型 跟驰模型

随着交通事业的日益迅速发展, 交通流的研究越来越得到人们的重视. 在交通流研究领域, 现在广泛存在的研究方法包括跟驰模型、连续模型、分子动力论方法及元胞自动机方法等^[1,2].

交通流连续模型的提出和发展始于 Lighthill 和 Whitham^[3]以及 Richards^[4]彼此独立提出的 LWR 理论. 当所考虑的路段没有出入匝道时, 路段内车辆数目守恒, 车辆密度的变化等于进出口流量之差, 以 k 表示车辆密度, u 表示车辆平均速度, 则两者有以下关系:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial ku}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

LWR 理论认为, 车辆密度和平均速度之间遵守函数关系:

$$u = u_e(k), \quad (2)$$

称(2)式为平衡状态下的速度密度关系. 图 1 所示就是由 Del Castillo 等人提出的一种典型的平衡速度密度关系^[5].

由于 LWR 理论认为速度处处满足平衡关系, 因此不能准确处理非平衡条件下的车流情况. 为了解决这个问题, Payne^[6]在连续方程(1)的基础上增加了一个动力学方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u}{kT} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{u_e - u}{T}, \quad (3)$$

这里 T 是松弛时间, u 是预期指数. 这一模型中, 速度并不要求满足平衡速度密度关系, 允许有所偏离,

因此能较 LWR 理论更为准确地描述实际车流情况. 称这类由连续方程和动力学方程构成的模型为交通流的动力学模型.

对由(1)和(3)式组成的方程组进行特征线分析, 得到特征速度 $I_1 = u + \sqrt{u/T}$ 和 $I_2 = u - \sqrt{u/T}$, 其中 I_1 大于车流的宏观速度. 正如 Daganzo^[7]指出, 这就意味着车辆未来的运动状况会受到后方车流的影响, 从而违背了车流运动为各向异性、驾驶员只对来自前方的刺激作出反应的基本特性. 因此, 这一模型仍然不能准确描述车流运动的实际情况.

在 Payne 的模型基础上, Zhang, Michalopoulos, Papageorgiou, Phillips, 吴正等人又提出各自的动力学模型^[8~12]. 然而, 这些模型都没有解决 Payne 模型中的特征速度问题. 本文将从跟

图 1 一种典型的平衡速度密度关系
 u_f 是自由流速度, k_m 是堵塞密度

驰理论出发,推导出一种新的动力学模型.该模型不存在大于宏观车流运动速度的特征速度,从而符合车流的实际运动状况.

1 跟驰模型的回顾和改进

在车辆跟驰过程中不允许出现超车的情况下,后车的运动情况取决于前车的速度、本身的速度、两车之间的距离、不同的道路情况、不同车辆之间的性能以及司机的不同心理等因素.然而由于问题的复杂性,为了能够描述这一情况,我们常常忽略一些因素.比如,不考虑不同司机之间的差别,道路情况视为理想道路以及车辆性能相同等.在这种简化假定下,经典的跟驰理论的模型方程可以表述成如下形式^[13]:

$$\frac{dv_{n+1}(t+\Delta t)}{dt} = I\Delta v, \quad (4)$$

其中 $\Delta v = v_n(t) - v_{n+1}(t)$, v_n 和 v_{n+1} 分别为头车和跟驰车的速度, Δt 是反应时间, I 是反应系数.当前后两车速度相等时,经典跟驰模型不会改变后车运动状态,允许两车之间的距离为任意值,这与实际情况不符.

最近, Bando 等人^[14]提出了一种称为优化速度模型(OVM)的跟驰理论.他们认为,描述跟驰行为改变后车运动状态的方法有两种.一种认为,后车状态改变依赖于前后两车的相对速度,即前述经典跟驰理论;另一种认为后车状态改变依赖于前后两车的距离.依据后一种认识,他们提出的 OVM 的形式如下:

$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = k[V(\Delta x) - v_{n+1}(t)], \quad (5)$$

其中 k 是反应系数, $\Delta x = x_n(t) - x_{n+1}(t)$, x_n 和 x_{n+1} 分别为头车和跟驰车的位置, V 是 Δx 的函数.

在 OVM 理论的基础上, Helbing 等人^[15]又提出了广义力模型(GFM)的跟驰理论.这个理论认为,当 $\Delta v < 0$ 时,需要考虑两车的相对速度所引起的加速度,其模型为

$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = k[V(\Delta x) - v_{n+1}(t)] + I\Delta v H(-\Delta v), \quad (6)$$

这里 H 是 Heaviside 函数(当 $x \geq 0$ 时, $H(x) = 1$; 当 $x < 0$ 时, $H(x) = 0$).

根据对跟驰现象的观察,认为两车的相对速度所引起的加速度,不论是在 $\Delta v < 0$ 时,还是在 $\Delta v > 0$ 时,都需要加以考虑.同时,后车加速度还依赖于前后两车之间的距离.按照这一思想,提出如下跟驰模型:

$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = k[V(\Delta x) - v_{n+1}(t)] + I\Delta v. \quad (7)$$

该模型充分考虑到前后车的距离、前后车速度差别对于后车加速度的影响,因此较上述其他跟驰模型准确.在下一节,将从(7)式出发,提出一种新的动力学模型.

2 动力学建模及其分析

车辆跟驰理论从微观的角度描述离散的车流情况,但这并不妨碍从宏观的角度将它与连续的情况联系起来.事实上,微观往往是宏观的具体反映,连续与离散的区别在于观察尺度的不同.如文献[8],假定在 x_{n+1} 位置的第 $n+1$ 辆车的动力学性质代表着 $[x-D, x+D]$ 区域内的平均交通状况,而这一交通状况取决于 $[x, x+2D]$ 区域内的平均交通状况.通过把微观参量转化

为宏观参量^[16], 有

$$v_{n+1}(t) \rightarrow u(x, t), \quad v_n(t) \rightarrow u(x + \mathbf{D}, t), \quad V(\Delta x) \rightarrow u_e(k) \quad (8a)$$

且

$$\mathbf{k} \rightarrow 1/T, \quad \mathbf{l} \rightarrow 1/t, \quad (8b)$$

其中 T 是松弛时间, t 是扰动向后传播 $\mathbf{D}$ 距离所需的时间. 将以上分析应用于跟驰模型关系式 (7), 可以得到

$$\frac{du(x, t)}{dt} = \frac{u_e(k) - u(x, t)}{T} + \frac{u(x + \mathbf{D}, t) - u(x, t)}{t}. \quad (9)$$

对 (9) 式右边进行 Taylor 展开, 忽略高阶项, 得到

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_e - u}{T} + \frac{\mathbf{D}}{t} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (10)$$

对由 (1) 和 (10) 式组成的方程组进行特征线分析, 得到特征速度

$$\mathbf{l}_1 = u, \quad \mathbf{l}_2 = u - c_0, \quad (11)$$

这里 $c_0 = \mathbf{D}/t \geq 0$ 是扰动传播速度. 我们看到, 这个模型中不存在大于宏观车流运动速度的特征速度, 符合实际车流情况.

下面采用此模型对 Daganzo^[7]提出的车辆倒退问题进行分析. Daganzo 提出的车流运动的初值条件如下:

$$u = 0, \quad k = k_m H(x), \quad \forall x \leq A, \quad t = 0 \quad (A > 0), \quad (12a)$$

$$u = 0, \quad x = A, \quad t > 0, \quad (12b)$$

这里 $H(x)$ 亦为 Heaviside 函数, k_m 是堵塞密度. 在这种初值条件下, 正确的结果应该是车流不会发生任何运动, 因此 $du/dt = 0$. 若按照 Payne 的模型, 将其代入 (3) 式, 可以得到

$$u(x, t) = u_e - \frac{u}{k} \frac{\partial k}{\partial x},$$

而 $u(x, t) \geq 0$, 故要求

$$\frac{\partial k}{\partial x} \leq \frac{ku_e}{u}, \quad (13)$$

即密度梯度要为有限值. 任何大于 ku_e/u 的密度梯度都会造成负的 $u(x, t)$, 车辆出现倒退运动. 由初值条件 (12), 在间断处, 可以认为, $\partial k/\partial x \rightarrow \infty$, 不满足 (13) 式. 因此, 应用 Payne 模型会预测出车辆倒退运动, 不符合实际情况.

应用本文模型对这一问题进行分析. 将 $du/dt = 0$ 代入 (10) 式, 由初值条件, 速度的偏导数 $\partial u/\partial x = 0$, 这样可以得到 $u(x, t) = u_e$. 因为 $u_e \geq 0$, 所以 $u \geq 0$ 恒成立, 也即不会出现车辆倒退情况.

3 数值结果

采用有限差分方法对此模型进行数值离散. 连续方程的离散采用适合交通流物理意义的差分格式^[12,17]:

$$k_i^{j+1} = k_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} k_i^j (u_i^j - u_{i+1}^j) + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_i^j (k_{i-1}^j - k_i^j). \quad (14a)$$

动力学方程采用一阶迎风格式离散:

I. 当路段密度较大时, $u_i^j < c_0$,

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} (c_0 - u_i^j)(u_{i+1}^j - u_i^j) + \frac{\Delta t}{T} (u_e - u_i^j). \quad (14b)$$

II. 当路段密度较小时, $u_i^j \geq c_0$,

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} (c_0 - u_i^j)(u_i^j - u_{i-1}^j) + \frac{\Delta t}{T} (u_e - u_i^j). \quad (14c)$$

以下就两种 Riemann 初值条件进行数值模拟, 以考察交通流出现拥塞时及拥塞车流得到疏导时的情况, 也即考察本文模型及其离散格式能否较好地处理交通激波及交通稀疏波等情况.

(i) $k_u^1 = 0.04$, $k_d^1 = 0.18$;

(ii) $k_u^2 = 0.18$, $k_d^2 = 0.04$,

这里 k_u 和 k_d 分别指上、下游车流密度, 上标 1 和 2 代表两种初始情况. 初值速度条件采用

$$u_u^{1,2} = u_e(k_u^{1,2}), \quad u_d^{1,2} = u_e(k_d^{1,2}). \quad (15)$$

边界条件采用自由边界条件, 即 $\partial k / \partial x$ 和 $\partial u / \partial x$ 在边界为零. 平衡速度密度关系取 Del Castillo 等人^[5]提出的如下形式(如图 1 所示):

$$u_e = u_f \left[1 - \exp \left(1 - \exp \left(\frac{c_m}{u_f} \left(\frac{k_m}{k} - 1 \right) \right) \right) \right], \quad (16)$$

这里 c_m 是堵塞时的扰动传播速度. 模拟路段长 20 km, 等距分成 100 网格, 时间步长按计算稳定性要求确定. 根据有关实测和参数辨识^{[5][1]}, 参数取值 $u_f = 30$ m/s, $k_m = 0.2$ 辆/m, $T = 7$ s, $c_m = c_0 = 6$ m/s. 计算结果如图 2 所示.

图 2 对应于不同的初始 Riemann 条件的车流密度时空变化图

(a)对应于条件(i), (b)对应于条件(ii)

由图 2 可以看出, 本文模型在两种 Riemann 初始条件下都可以得出定性正确的结果. 在条件(i)下, 交通激波向后传播. 在条件(ii)下, 产生了交通稀疏波. 这些结果和文献[18]给出的交通流性质是一致的. 线性稳定性分析和进一步的数值模拟显示, 本文模型还能够较好地描述时走时停波、局部阻塞效应等交通现象.

1) 冯苏苇. 低速混合型城市交通流的建模、实测与模拟. 上海大学博士学位论文, 1997

<https://engine.scichina.com/doi/10.1360/csb2000-45-17-1895>

4 结论

近几十年来,随着交通事业的迅速发展,交通流研究已逐渐引起人们越来越广泛的重视.人们为了解决存在的交通问题,提出各种交通流理论.动力学理论就是重要的研究方法之一.但是,这一理论存在这样那样的问题.本文从跟驰理论的角度出发,对跟驰车辆的各种行为给予比较全面的考虑,综合现有的跟驰理论中存在的问题,提出一种改进的跟驰理论.在这一理论的基础上,得出一种新的动力学模型.这个模型克服了现有的动力学模型中普遍存在的特征速度问题,物理上更符合实际交通情况.数值模拟显示这个模型可以模拟交通中的各种现象.

致谢 本工作为国家自然科学基金资助项目(批准号:19872062).

参 考 文 献

- 1 Helbing D, Treiber M. Traffic theory—jams, waves, and clusters. *Science*, 1998, 282: 2001~2003
- 2 戴世强, 冯苏苇, 顾国庆. 交通流动力学: 它的内容、方法和意义. *自然杂志*, 1997, 11: 196~201
- 3 Lighthill M H, Whitham G B. On kinematics wave: II A theory of traffic flow on long crowded roads. *Proc R Soc London, Ser A*, 1955, 22: 317~345
- 4 Richards P I. Shock waves on the highway. *Opns Res*, 1956, 4: 42~51
- 5 Del Castillo J M, Bennitez F G. On functional form of the speed-density relationship—I: General theory; II: Empirical investigation. *Transpn Res B*, 1995, 29: 373~406
- 6 Payne H J. Models of freeway traffic and control. *Mathematical Methods of Public Systems*, 1971, 1(1): 51~61
- 7 Daganzo C F. Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow. *Transpn Res B*, 1995, 29: 277~286
- 8 Zhang H M. A theory of nonequilibrium traffic flow. *Transpn Res B*, 1998, 32: 485~498
- 9 Michalopoulos P G, Yi P, Lyrintzis A S. Continuum modeling of traffic dynamics for congested freeways. *Transpn Res B*, 1993, 27: 315~332
- 10 Papageorgiou M, Blosseville J M, Hadj-Salem H. Macroscopic modeling of traffic flow on the Boulevard Peripherique in Paris. *Transpn Res B*, 1989, 23: 29~47
- 11 Phillips W F. A new continuum traffic model obtained from kinetic theory. *IEEE Trans Autom Control*, 1978, 23: 1032~1036
- 12 吴 正. 低速混合型城市交通的流体力学模型. *力学学报*, 1994, 26: 149~157
- 13 Gazis D C, Herman R, Rothery W. Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow. *Opns Res*, 1961, 9: 545~567
- 14 Bando M, Hasebe K, Nakayama A, et al. Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation. *Phys Rev E*, 1995, 51: 1035~1042
- 15 Helbing D, Tilch B. Generalized force model of traffic dynamics. *Phys Rev E*, 1998, 58: 133~138
- 16 Liu G Q, Lyrintzis A S, Michalopoulos P G. Improved high-order model for freeway traffic flow. *Transpn Res Rec*, 1998, 1644: 37~46
- 17 Papageorgiou M. *Applications of Automatic Control Concepts to Traffic Flow Modeling and Control*. New York: Springer-Verlag, 1983. 4~41
- 18 Treiber M, Hennecke A, Helbing D. Derivation, properties, and simulation of a gas-kinetic-based, nonlocal traffic model. *Phys Rev E*, 1999, 59: 239~253

(2000-01-31 收稿, 2000-06-04 收修改稿)