基于模拟有限差分的嵌入式离散裂缝数学模型

严侠, 黄朝琴, 姚军*, 黄涛

中国石油大学(华东)石油工程学院, 青岛 266580

* E-mail: RCOGFR_UPC@126.com

收稿日期: 2014-05-26; 接受日期: 2014-09-10

国家重点基础研究发展计划(2011CB201004)、国家自然科学基金(51234007)、国家重大科技专项(2011ZX05014-005-003HZ)和中央高校基本科研业务费专项资金(编号: 14CX06091A, 13CX05007A, 14CX02042A, 13CX05017A)资助项目

摘要 嵌入式离散裂缝模型划分网格时不需要考虑油藏内的裂缝形态, 只需对基岩系统进行简单的网格剖分, 可以大大降低网格划分的复杂度, 从而能够提高计算效率. 并且该模型可以将现有成熟的油藏数值模拟技术和离散裂缝网络模型有机地结合起来, 能精细地模拟流体在裂缝性油藏中的流动. 本文模型求解采用模拟有限差分方法, 该方法基于单个网格的节点和面信息构造数值计算格式, 理论上适用于任何复杂网格系统, 且具有良好的局部守恒性, 将其推广到嵌入式离散裂缝模型后, 克服了该模型基于有限差分方法求解时不能有效处理全张量形式的渗透率以及不适用于复杂边界形状裂缝性油藏的局限性. 最后通过实际算例验证了本文方法的正确性和优越性.

关键词

裂缝性油藏
嵌入式离散裂缝模型
模拟有限差分
数值模拟
离散裂缝模型

1 引言

随着我国勘探开发程度的不断加深, 近年来新探明的油藏类型越来越复杂, 裂缝性油藏探明储量不断增加^[1]. 随着裂缝性油气田的开发, 裂缝性油藏数值模拟技术得到广泛的重视并逐渐成为一个热点问题, 出现了一系列优秀的裂缝性油藏数值模型, 包括等效连续介质模型^[2,3]、双重介质模型^[4-7]、离散裂缝模型^[8-13]等.

目前, 裂缝性油藏数值模拟大都是基于双重介质模型, 但该模型仅适用于裂缝发育程度高的储层, 当存在数条控制着流体流动方向和规模的大裂缝时, 其计算结果误差较大. 对此, 离散裂缝模型应运而生, 并随着非常规油气藏中人工压裂技术的广泛使用, 其相关流动模拟技术得到了长足发展. 但现有的离

散裂缝数值模型都是基于匹配型网格, 即将裂缝作为内边界并以此为约束面来进行网格剖分. 由于裂缝几何形态的复杂性, 需采用非结构化网格技术, 其剖分过程非常复杂和繁琐, 尤其当裂缝间距离或夹角很小时, 常常因网格划分质量差导致计算困难. 对此, Lee 研究组^[14,15]和 Moinefar 等人^[16,17]提出了嵌入式离散裂缝模型, 该模型将裂缝网络直接嵌入基岩结构化网格系统中, 避免了上述复杂的非结构化网格剖分过程. 虽然需要计算裂缝与网格之间的几何信息, 但相对于复杂的非结构化网格剖分过程, 其计算复杂度大大降低, 从而能够提高计算效率.

然而, 现有的嵌入式离散裂缝模型均采用有限差分方法求解, 尚不能准确处理全张量渗透率情形, 且只适用于结构化网格. 对此, 本文基于模拟有限差分方法(mimetic finite difference, MFD)建立了一种新

引用格式: 严侠, 黄朝琴, 姚军, 等. 基于模拟有限差分的嵌入式离散裂缝数学模型. 中国科学: 技术科学, 2014, 44: 1333-1342
Yan X, Huang Z Q, Yao J, et al. The embedded discrete fracture model based on mimetic finite difference method (in Chinese). Sci Sin Tech, 2014, 44: 1333-1342, doi: 10.1360/N092014-00047

的嵌入式离散裂缝数值计算模型, 以适用于复杂裂缝性油藏数值模拟. 模拟有限差分作为一种新型数值计算方法, 因其良好的局部守恒性和对复杂网格的适用性, 在计算流体力学、电磁场和油藏数值模拟中得到了成功应用^[18-20]. 本文将该方法进一步推广至嵌入式离散裂缝模型流动数值模拟研究中, 能有效地处理全张量渗透率问题, 并建立了相应的非结构化网格数值计算模型, 最后通过算例验证了本文方法的正确性和优越性.

2 离散裂缝模型和嵌入式离散裂缝模型网格划分对比

离散裂缝数值模型划分网格时是将裂缝作为内部的约束面来进行的, 由于裂缝几何形态的复杂性, 需采用非结构化网格技术, 其剖分过程非常复杂和繁琐, 尤其当裂缝间距离或夹角很小时, 网格划分质量往往较差, 如图 1(a), 导致计算出现偏差. 而嵌入式离散裂缝模型划分网格时不需要考虑内部的裂缝

形态, 基岩系统单独进行网格剖分, 裂缝部分则根据裂缝与基岩网格的相交情况来划分网格, 如图 1(b), 大大降低了网格划分的复杂度, 从而能够有效提高计算效率.

3 嵌入式离散裂缝单相流数学模型

3.1 数学模型

为研究和书写方便, 本文基于二维单相渗流问题来阐述本文数值模拟方法的基本思想和原理, 三维问题与之类似. 假设流体流动过程恒温, 不考虑基岩和流体的压缩性; 基岩系统和裂缝系统中的流体流动满足 Darcy 定律; 忽略重力和毛管压力的影响.

基岩系统数学模型:

$$\mathbf{v}_m = -\frac{K_m}{\mu} \cdot \nabla p_m, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_m = q_m + \frac{q_{mf}}{V_m} \delta_{mf}. \quad (2)$$

图 1 离散裂缝模型和嵌入式离散裂缝模型网格划分对比
(a) 匹配型非结构化网格; (b) 非匹配型结构化网格

裂缝系统数学模型:

$$\frac{k_f}{\mu} \frac{\partial^2 p_f}{\partial \xi^2} = q_f + \frac{q_{mf} + q_{ff} + \xi_{ff}}{V_f}. \quad (3)$$

式中, v_m 为基岩渗流速度; K_m 为基岩渗透率张量; k_f 为裂缝渗透率(标量); μ 为流体黏度; p_m 和 p_f 分别为基岩和裂缝的压力(或流动势); V_f 和 V_m 分别是裂缝单元和基岩单元的体积; q_m 和 q_f 分别表示基岩和裂缝的源汇项; ξ 为沿裂缝方向的局部坐标系; q_{mf} 表示基岩与裂缝之间的窜流量; q_{ff} 表示相交裂缝单元之间的窜流量;

$$\delta_{mf} = \begin{cases} 1, & \text{基岩网格有裂缝嵌入;} \\ 0, & \text{基岩网格没有裂缝嵌入.} \end{cases}$$

$$\delta_{ff} = \begin{cases} 1, & \text{裂缝单元与另一裂缝单元相交;} \\ 0, & \text{裂缝单元不与其他裂缝单元相交.} \end{cases}$$

3.2 基岩网格与裂缝单元间窜流量计算

借鉴常规油藏数值模拟方法中生产井和网格单元间流量交换的计算格式, 可以将基岩与裂缝之间的窜流量表达式定义为

$$q_{mf} = T_{mf} (p_f - p_m). \quad (4)$$

由于裂缝开度与网格尺度相比很小, 且裂缝渗透率远大于基岩渗透率, 因此可以认为裂缝两侧的压力连续, 根据达西定律, 基岩与裂缝间的窜流量为^[15]

$$q_{mf} = \frac{k_{mf} A_{mf}}{\mu} \nabla p = \frac{k_{mf} A_{mf}}{\mu} \frac{p_f - p_m}{\hat{d}} = \frac{k_{mf} A_{mf}}{\mu \hat{d}} (p_f - p_m). \quad (5)$$

此时, 窜流系数表达式为 $T_{mf} = \frac{k_{mf} A_{mf}}{\mu \hat{d}}$; 其中,

$$\hat{d} = \frac{\int x_n dS}{S}, \text{ 表示基岩网格与裂缝段间的等效距离,}$$

即基岩网格内所有点到裂缝段垂直距离的平均值;

$k_{mf} = \frac{1}{1/k_f + 1/k_m}$, k_m 表示基岩垂直于裂缝方向的渗透率标量值; A_{mf} 为裂缝段与基岩的接触面积; p_m 为基岩网格平均压力值.

3.3 相交裂缝单元间窜流量计算

本文借鉴 Karimi-Fard^[21] 计算相交裂缝段间传递系数的方法计算裂缝与裂缝间窜流量

$$q_{ff} = T_{ff} (p_{fi} - p_{fj}), \quad (6)$$

其中, $T_{ff} = \frac{T_{fi} T_{fj}}{T_{fi} + T_{fj}}$, $T_{fi} = \frac{k_{fi} d_{fi}}{\mu \hat{d}_i}$, $T_{fj} = \frac{k_{fj} d_{fj}}{\mu \hat{d}_j}$, d_f

表示裂缝开度, $\hat{d}_i = \frac{l_{i1}}{l_{i1} + l_{i2}} \cdot \frac{1}{2} l_{i1} + \frac{l_{i2}}{l_{i1} + l_{i2}} \cdot \frac{1}{2} l_{i2}$,

$$\hat{d}_j = \frac{l_{j1}}{l_{j1} + l_{j2}} \cdot \frac{1}{2} l_{j1} + \frac{l_{j2}}{l_{j1} + l_{j2}} \cdot \frac{1}{2} l_{j2}.$$

4 数学模型求解

4.1 基岩部分模拟有限差分求解

基岩区域被一组互不重叠的多边形网格所剖分. 如图 3 所示, 取任意单元 Ω_i 进行分析, 其中 Ω_j 为其相邻单元, 交界面 $A_k = \Omega_i \cap \Omega_j$, $\mathbf{n}_k = |\mathbf{A}_k| \hat{\mathbf{n}}_k$ 为交界面 A_k 的面积加权法向量, $\hat{\mathbf{n}}_k$ 为单位外法线向量. 在单元中心点 x_i 和边界面中心点 x_k 上分别定义单元压力 p_{mi}^e 和边界面压力 p_{mk}^f , 如下:

$$p_{mi}^e = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} p_m d\Omega, \quad p_{mk}^f = \frac{1}{|A_k|} \int_{A_k} p_m dA. \quad (7)$$

由方程(1)易知基岩网格边界面上的法向渗流速度 $\mathbf{v}_m^f$ 与压力梯度 ∇p_m 之间有如下关系

$$\mathbf{v}_m^f = \mathbf{T}_{mi} \cdot (\mathbf{e}_i p_{mi}^e - \mathbf{p}_m^f). \quad (8)$$

其中, $\mathbf{T}_{mi}$ 为基岩网格的传导矩阵, $\mathbf{v}_m^f = [v_{m1}, v_{m2}, \dots, v_{mn}]^T$, n 为单元 Ω_i 的边界面数, $\mathbf{e}_i = [1, \dots, 1]^T$, 因此, 模拟有限差分方法的关键问题是如何获取矩阵 $\mathbf{T}_{mi}$. 在此, 假设压力在基岩网格内呈线性变化, 即 $p_m = \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x} + b_m$, 显然, 由方程(1)可得

$$\mathbf{v}_{mk}^f = -\mu^{-1} |A_k| \hat{\mathbf{n}}_k \cdot \mathbf{K}_m \cdot \nabla p_m = -\mu^{-1} |A_k| \hat{\mathbf{n}}_k \cdot \mathbf{K}_m \cdot \mathbf{a}_m. \quad (9)$$

同时, $p_{mi}^e - p_{mk}^f = \mathbf{a}_m \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)$, 结合方程(8)和(9), 可得

$$\mathbf{v}_m^f = \mathbf{T}_{mi} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_i \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_i \end{bmatrix} \cdot \mathbf{a}_m = \mu^{-1} \begin{bmatrix} |A_1| \hat{\mathbf{n}}_1 \\ \vdots \\ |A_k| \hat{\mathbf{n}}_k \\ \vdots \\ |A_n| \hat{\mathbf{n}}_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{K}_m \cdot \mathbf{a}_m \quad (10)$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}_{mi} \mathbf{X} = \mu^{-1} \mathbf{N} \mathbf{K}_m.$$

图2 裂缝段相交示意图

图3 模拟有限差分网格单元分析示意图

式中 $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 | \cdots | \mathbf{X}_n]$, $\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 | \cdots | \mathbf{N}_n]$, 且 $\mathbf{N}^T \mathbf{X} = [\mathbf{Z}_{ij}]_{n \times n}$, 则有

$$\mathbf{Z}_{ij} = \mathbf{N}_i^T \mathbf{X}_j = \sum_{k=1}^n |A_k| \hat{\mathbf{n}}_k (x_k - x_i). \quad (11)$$

注意到 $\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i = \frac{1}{|A_k|} \int_{A_k} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) dA$, 结合散度定理可得

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{ij} &= \sum_{k=1}^n |A_k| \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_k \frac{1}{|A_k|} \int_{A_k} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) dA \\ &= \sum_{k=1}^n \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \int_{A_k} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \cdot \hat{\mathbf{n}}_k dA \\ &= \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega \\ &= \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j |\Omega_i| = \delta_{ij} |\Omega_i|. \end{aligned} \quad (12)$$

即 $\mathbf{N}^T \mathbf{X} = |\Omega_i| \mathbf{E}_d$, 其中, $\mathbf{E}_d$ 为 d 阶单位矩阵, 因此通过方程(10)求得传导矩阵, 如下:

$$\mathbf{T}_{mi} = \frac{1}{\mu |\Omega_i|} \mathbf{N} \mathbf{K}_m \mathbf{N}^T + \mathbf{T}_2, \quad (13)$$

其中, $\mathbf{T}_2 \mathbf{X} = 0$, 为保证 $\mathbf{T}_{mi}$ 矩阵逆的存在性, 可应用 Brezzi-Lipnikov-Simoncini 定理^[22]来构造 $\mathbf{T}_2$ 矩阵, 本文采用如下形式:

$$\mathbf{T}_{mi} = \frac{1}{\mu |\Omega_i|} \left[\mathbf{N} \mathbf{K}_m \mathbf{N}^T + \frac{6}{d} \text{trace}(\mathbf{K}_m) \mathbf{A} (\mathbf{E}_m - \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T) \mathbf{A} \right], \quad (14)$$

式中,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} |A_1| & & & \\ & \ddots & & \\ & & |A_k| & \\ & & & \ddots \\ & & & & |A_n| \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \text{orth}(\mathbf{A} \mathbf{X}). \quad (15)$$

对于方程(2), 直接在基岩网格单元上积分并运用散度定理

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{v}_{mk}^f = \int_{\Omega} q_{mf} d\Omega + q_{mf} \delta_{mf}. \quad (16)$$

考虑单元边界面上的速度连续条件, 结合方程(8)和(16), 可得到基岩部分模拟有限差分的数值计算格式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_m & -\mathbf{C}_m & \mathbf{D}_m \\ \mathbf{C}_m^T & 0 & 0 \\ \mathbf{D}_m^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_m \\ \mathbf{p}_m \\ \boldsymbol{\pi}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_m + \mathbf{Q}_{mf} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

式中, $\mathbf{v}_m = [\mathbf{v}_{mk}^f]; \mathbf{p}_m = [\mathbf{p}_{mi}^e]; \boldsymbol{\pi}_m = [\mathbf{p}_{mk}^f];$

$\mathbf{f}_m = [\mathbf{f}_{mi}]$, 其中 $\mathbf{f}_{mi} = \int_{\Omega} q_{mf} d\Omega; \mathbf{Q}_{mf} = [q_{mf} \delta_{mf}]$,

为了书写方便这一项暂时放在等号右侧, 在最后的计算格式中需要移到左侧. 显然, 方程(17)中的第一行对应于方程(1)Darcy 定律, 第二行对应于方程(2)质量守恒定律, 第三行则表征了单元边界面上的法向速度连续性条件. 上述方程的系数矩阵表达式具体如下:

$$\mathbf{B}_m = \begin{pmatrix} T_{m1}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & T_{mN_e}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{e}_{N_e} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{D}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{I}_{N_e} \end{pmatrix}.$$

其中, N_e 为网格单元总数; $\mathbf{I}_i = \mathbf{E}_n$. 从方程(18)可知: 方

程(17)中的各系数矩阵仅与网格单元的几何信息和油藏参数有关, 而对网格的几何形状没有特殊要求, 求解方便, 原则上适用于任何复杂网格。

4.2 裂缝部分有限差分求解

对于一维裂缝系统采用隐式差分, 方程左右两端同乘网格单元体积 V_f , 则(3)式的差分方程为

$$\begin{aligned} T_{\xi i+\frac{1}{2}}(p_{fi+1}-p_{fi})-T_{\xi i-\frac{1}{2}}(p_{fi}-p_{fi-1}) \\ = f_{fi}+q_{mfi}+q_{ffi}\delta_{fi}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中, $T_{\xi i\pm\frac{1}{2}}=\frac{k_f}{\mu} \frac{d_{fi}}{0.5(\Delta\xi_{i\pm1}+\Delta\xi_i)}$; $f_{fi}=V_{fi}q_{fi}$ 。

4.3 嵌入式离散裂缝模型计算格式

以存在两条相交裂缝的裂缝性油藏为例, 将基岩部分和裂缝部分的数值计算格式组装到一起, 得到基于模拟有限差分的嵌入式离散裂缝模型计算格式

$$\begin{bmatrix} B_m & -C_m & D_m & 0 & 0 \\ C_m^T & T_{mf1}+T_{mf2} & 0 & -T_{mf1} & -T_{mf2} \\ D_m^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{mf1} & 0 & T_{f1}-T_{mf1}-T_{ff} & T_{ff} \\ 0 & T_{mf2} & 0 & T_{ff} & T_{f2}-T_{mf2}-T_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_m \\ p_m \\ \pi_m \\ p_{f1} \\ p_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_m \\ 0 \\ f_{f1} \\ f_{f2} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

其中, $T_{mfi}=[T_{mfi}]$, 表示第 i 条裂缝与基岩窜流系数矩阵; $T_{ff}=[T_{ff}]$, 表示裂缝之间的窜流系数矩阵; T_{fi} 和 p_{fi} 分别表示第 i 条裂缝的有限差分传导系数矩阵和裂缝单元压力阵列。多条裂缝的计算格式与上类似。

5 算例验证

通过单相流实验以及 3 个算例验证本文方法的正确性和优越性。通过对制作的裂缝性介质模型进行单相流测压实验, 并结合离散裂缝模型和本文方法进行流动模拟, 从而对本文方法进行验证; 第 1 个

算例针对发育两条相交裂缝的油藏(基岩渗透率为全张量形式), 采用三种方法进行流动模拟, 从而说明本文方法对全张量形式渗透率油藏数值模拟的适用性及优越性; 第 2 个例子是对内部含有单条裂缝的不规则油藏进行研究, 通过对比两种方法得到的结果, 说明本文方法对于复杂形状油藏同样适用; 第三个例子是对含多条裂缝的实际三维油藏进行单相流动模拟, 以证明本文方法对复杂油藏同样有效。

5.1 裂缝性介质单相流实验验证

考虑图 4 所示的一注一采物理模型, 其尺寸为 $17\text{ cm}\times 17\text{ cm}\times 1\text{ cm}$, 可视为平面流动问题。模型采用石英砂(80~100 目)结合环氧树脂胶结压实而成, 然后由透明有机玻璃板封装。基岩可视为均质各向同性介质, 其孔隙度 $\phi\approx 0.3$, 渗透率 $K_m=10\text{ }\mu\text{m}^2$ 。模型制作时, 裂缝由薄钢片替代, 待模型胶结后抽离, 开度约为 2 mm , 裂缝内渗透率 $K_f=6.67\times 10^2\text{ }\mu\text{m}^2$ 。水的黏度 $\mu_w=1\text{ mPa}\cdot\text{s}$, 水的密度 $\rho_w=1000\text{ kg/m}^3$ 。模型以定压差稳定流量注入采出。

模型初始时刻饱和水, 通过玻璃管测量稳定流态下各点的液柱高度, 从而计算出流体压力。应用本文方法和离散裂缝模型对上述物理实验过程进行数值模拟, 计算中忽略重力的影响, 相应的数值模拟结果, 如图 5 所示。图 6 给出了注采两点之间直线上两种方法求得的压力曲线和实验测得的压力值对比结果。从图 6 可看到: 数值计算结果与实验结果基本一致, 从而验证了本文方法和程序的正确性。值得注意的是, 由于在模型制作时, 侧面的有机玻璃板和石英砂胶接

图 4 物理模型示意图及实物图
(a) 物理模型示意图; (b) 实验模型

图5 两种方法计算得到的压力场分布(kPa)
(a) 离散裂缝模型; (b) 嵌入式离散裂缝模型(MFD)

图6 注采对角线上的压力分布比较

模型很难达到完全密封以及模型内石英砂很难达到完全均质充填, 因此, 实验结果会有一定误差。

5.2 矩形裂缝性油藏

如图 7(a)所示, 为一 100 m×50 m 裂缝性油藏模型, 基岩的渗透率为全张量形式。图 7(b)和(c)分别是三角网格和 20×10 的正方形网格的划分结果。模型中的基本参数如表 1 所示。

基于以上两种网格系统, 分别运用离散裂缝模型(图 8(a))和嵌入式离散裂缝模型两种方法结合封闭

表1 矩形裂缝性油藏模型基本参数

参数名称	参数值
裂缝渗透率(μm^2)	1×10^4
裂缝开度(m)	1×10^{-3}
流体黏度(mPa s)	1
基岩渗透率张量($1 \times 10^{-3} \mu\text{m}^2$)	$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

定压边界条件对该裂缝性油藏进行单相流数值模拟, 其中嵌入式离散裂缝模型分别采用有限差分(图 8(b))和模拟有限差分(图 8(c))求解。图 9 给出了 $y=22.5 \text{ m}$ 直线上三种方法求得的压力曲线, 从图中可看到本文方法计算结果与离散裂缝模型参考解吻合更好。通过式(21)可进一步计算整体的误差范数: 本文方法的为 1.10%, 采用有限差分方法求解的则为 3.80%, 两种方法的局部最大误差范数分别 3.9%和 9.1%。可以看出本文方法计算结果更为准确, 精度更高, 在处理全张量形式的渗透率时具有一定的优势。

$$\text{误差范数} = \sqrt{\frac{\sum_i (p_i - p_i^{\text{DFM}})^2}{\sum_i (p_i^{\text{DFM}})^2}} \quad (21)$$

研究网格划分密度对嵌入式离散裂缝模型精度的影响, 采用 10×5 和 40×20 两种网格系统求解并与以上 20×10 网格系统的解进行对比。图 10 给出了 $x=45 \text{ m}$ 直线上的压力曲线对比。通过(21)式求得三套网格的整体误差范数, 结果见表 2。可以看出随着网格的加密, 基于模拟有限差分的嵌入式离散裂缝模型求

表2 不同网格密度下压力场整体误差范数

网格密度	整体误差范数
10×5	4.66%
20×10	0.72%
40×20	0.22%

图7 裂缝性油藏几何模型及网格划分结果图

(a) 裂缝性油藏几何模型; (b) 三角网格系统; (c) 20×10 的正方形网格系统

图 8 三种方法计算得到的压力场分布(MPa)

(a) 离散裂缝模型; (b) 嵌入式离散裂缝模型(FD); (c) 嵌入式离散裂缝模型(MFD)

图 9 在 $y=22.5\text{ m}$ 线上的压力分布比较

图 10 在 $x=45\text{ m}$ 线上的压力分布比较

表 3 不规则四边形裂缝性油藏模型基本参数

参数名称	参数值
裂缝渗透率(μm^2)	1×10^4
裂缝开度(m)	1×10^{-3}
流体黏度(mPa s)	1
基岩渗透率张量($1 \times 10^{-3} \mu\text{m}^2$)	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

解精度也随之变高, 并且当网格密度达到一定程度后, 再加密导致的精度增加很小.

5.3 不规则四边形裂缝性油藏

如图 11(a)所示, 为一不规则四边形裂缝性油藏几何模型, 基岩的渗透率为全张量形式. 图 11(b)和图 11(c)分别是将裂缝作为内边界划分的匹配型三角网格和不考虑裂缝划分的嵌入式三角网格. 模型中的基本参数如表 3 所示.

基于以上两种网格系统, 分别运用离散裂缝模型(图 12(a))和嵌入式离散裂缝模型结合模拟有限差分(图 12(b))对该裂缝性油藏进行单相流数值模拟. 图 13 给出了源、汇两点直线上两种方法求得的压力曲线, 从图中可看到本文方法计算结果与离散裂缝模型参考解基本一致. 通过(21)式求得相应的整体误差范数为 2.0%, 局部最大误差范数为 5.0%. 可以看出本文方法同样适用于三角网格系统, 因此, 将本文方法与三角网格或者混合网格相结合可以用于各种复杂边界形状的裂缝性油藏流动模拟.

图 11 裂缝性油藏几何模型及网格划分结果图

(a) 裂缝性油藏几何模型; (b) 匹配型三角网格系统; (c) 嵌入式三角网格系统

图 12 两种方法计算得到的压力场分布(MPa)

(a) 离散裂缝模型; (b) 嵌入式离散裂缝模型(MFD)

图 13 对角线上的压力分布比较

图 14 复杂裂缝性油藏模型

5.4 实际复杂裂缝性油藏

根据某一实际裂缝性油藏的裂缝信息统计资料, 包括裂缝密度、长度、开度、走向等, 生成相应的实际复杂裂缝性油藏模型, 图 14, 其中裂缝在垂直方向上都贯穿地层. 模型中部分参数如表 3 所示, 而基岩渗透率张量数值为

$$k_m = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

分别运用离散裂缝模型(图 15(a))和本文提出的方法(图 15(b)), 结合封闭定压边界条件对该复杂裂缝性油藏进行单相流数值模拟. 图 16 和 17 分别给出了地层上表面 $y=26.25$ m 和 $x=48.75$ m 两条直线上两种方法求得的压力曲线, 可以看出两者结果基本一致. 通过(21)式进一步计算两者的整体误差范数, 分别为 0.9% 和 0.5%. 因此, 本文方法对于实际复杂裂缝性油藏同样适用.

6 结论

1) 嵌入式离散裂缝模型划分网格时不需要考虑

图 15 两种方法计算得到的压力场分布(MPa)

(a) 离散裂缝模型; (b) 嵌入式离散裂缝模型(MFD)

图 16 在 $y=26.25$ m 线上的压力分布比较 图 17 在 $x=48.75$ m 线上的压力分布比较

油藏内的裂缝形态, 只需对基岩系统进行简单的网格剖分, 可以有效避免由于裂缝间距离或夹角很小而导致所剖分的网格质量太差的情况. 虽然需要计算裂缝单元与基岩网格之间的窜流信息, 但相对于离散裂缝模型将裂缝作为内边界并以此为约束面来进行非结构化网格剖分, 其网格划分的复杂度大大降低, 从而能够有效提高计算效率.

2) 模拟有限差分法基于单个网格的节点和面信息构造数值计算格式, 理论上适用于任何复杂网格系统, 且具有良好的局部守恒性, 本文将推广到嵌入式离散裂缝模型后, 克服了该模型基于有限差分方法时不能有效处理全张量形式的渗透率以及不适用于复杂边界形状裂缝性油藏的局限性. 本文仅对裂缝性油藏单相流问题予以了研究, 两相及三维问题是下一步的研究内容.

参考文献

- 1 袁士义, 宋新民, 冉启全. 裂缝性油藏开发技术. 北京: 石油工业出版社, 2004. 1-3
- 2 Snow D. Anisotropic permeability of fractured media. *Water Resour Res*, 1969, 5: 1273-1289
- 3 Oda M. Permeability tensor for discontinuous rock masses. *Geotechnique*, 1985, 35: 483-495
- 4 Barenblatt G I, Zheltov I P, Kochina I N. Basic concept in the theory of homogeneous liquids in fissured rocks. *J Appl Math Mech*, 1960, 24: 1286-1303
- 5 Kazemi H, Porterfield K, Zeman P. Numerical simulation of water-oil flow in naturally fractured reservoirs. *Old SPE J*, 1976, 16: 317-326
- 6 Lemonnier P, Bourbiaux B. Simulation of naturally fractured reservoirs. State of the art. Part 1 physical mechanisms and simulator formulation. *Oil Gas Sci Technol*, 2010, 65: 239-262
- 7 Lemonnier P, Bourbiaux B. Simulation of naturally fractured reservoirs. State of the art. Part 2 matrix-fracture transfers and typical features of numerical studies. *Oil Gas Sci Technol*, 2010, 65: 263-286
- 8 Noorishad J, Mehran M. An upstream finite element method for solution of transient transport equation in fractured porous media. *Water Resour Res*, 1982, 18: 588-596
- 9 Kim J G, Deo M D. Finite element, discrete-fracture model for multiphase flow in porous media. *AIChE J*, 2000, 46: 1120-1130

- 10 Karimi-Fard M, Firoozabadi A. Numerical simulation of water injection in fractured media using the discrete-fracture model and the Galerkin method. *SPE Reserv Eval Eng*, 2003, 6: 117–126
- 11 黄朝琴, 姚军, 王月英, 等. 基于离散裂缝模型的裂缝性油藏注水开发数值模拟. *计算物理*, 2011, 28: 41–49
- 12 姚军, 王子胜, 张允, 等. 天然裂缝性油藏的离散裂缝网络数值模拟方法. *石油学报*, 2010, 31: 284–288
- 13 Huang Z Q, Yao J, Wang Y Y, et al. Numerical study on two-phase flow through fractured porous media. *Sci China Technol Sc*, 2011, 54: 2412–2420
- 14 Lee S H, Lough M F, Jensen C L. Hierarchical modeling of flow in naturally fractured formations with multiple length scales. *Water Resour Res*, 2001, 37: 443–455
- 15 Li L, Lee S H. Efficient field-scale simulation of black oil in a naturally fractured reservoir through discrete fracture networks and homogenized media. *SPE Reserv Eval Eng*, 2008, 11: 750–758
- 16 Moinfar A. Development of an efficient embedded discrete fracture model for 3D compositional reservoir simulation in fractured reservoirs. *SPE J*, 2014, 19, doi: <http://dx.doi.org/10.2118/154246-PA>
- 17 Moinfar A, Varavei A, Sepehrnoori K, et al. Development of a novel and computationally-efficient discrete-fracture model to study IOR processes in naturally fractured reservoirs. In: *SPE Improved Oil Recovery Symposium*. Tulsa, Oklahoma, 2012
- 18 Brezzi F, Lipnikov K, Simoncini V. A family of mimetic finite difference methods on polygonal and polyhedral meshes. *Math Mod Meth Appl S*, 2005, 15: 1533–1551
- 19 Lie K A, Krogstad S, Lagaarden I S, et al. Open-source MATLAB implementation of consistent discretisations on complex grids. *Computat Geosci*, 2012, 16: 297–322
- 20 Lipnikov K, Manzini G, Shashkov M. Mimetic finite difference method. *J Computat Phys*, 2014, 257: 1163–1227
- 21 Karimi-Fard M, Durlofsky L J, Aziz K. An efficient discrete-fracture model applicable for general-purpose reservoir simulators. *SPE J*, 2004, 9: 227–236
- 22 Brezzi F, Lipnikov K, Simoncini V. A family of mimetic finite difference methods on polygonal and polyhedral meshes. *Math Mod Meth Appl S*, 2005, 15: 1533–1551

The embeded discrete fracture model based on mimetic finite difference method

YAN Xia, HUANG ZhaoQin, YAO Jun & HUANG Tao

School of Petroleum Engineering, China University of Petroleum (East China), Qingdao 266580, China

The meshing of embeded discrete fracture model (EDFM) dose not need to conside the distribution pattern of fractures. It only needs to partition grid for matrix, so it can reduce the complexity of meshing and improve the computational efficiency. The embeded discrete fracture model can combine the mature reservoir simulation technology and the discrete fracture network model. It can simulate the flow of fluid in fractured reservoir accurately. We use mimetic finite difference (MFD) method to solve the model because of its local conservativeness and applicability of complex grids. The embeded discrete fracture model can deal with permeability tensor and be used to simulate fractured reservoir with complex boundary shape. Lastly, we have proven the validity and superiority of this method with some actual examples.

fractured reservoir, embeded discrete fracture model, mimetic finite difference, numerical simulation, discrete fracture model

doi: 10.1360/N092014-00047