带灾难和拯救的 n 维分枝过程

孟维维, 李俊平*

中南大学数学与统计学院, 长沙 410075

E-mail: menglingwei181@163.com, jpli@mail.csu.edu.cn

收稿日期: 2015-12-15; 接受日期: 2016-03-17; 网络出版日期: 2016-08-03; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371374 和 11571372) 资助项目

摘要 本文考虑了带灾难和拯救的 n 维分枝模型有效灾难的首次发生时间. 首先讨论了 Q 矩阵生成函数的性质, 通过生成函数给出了有效灾难首次发生时间概率密度函数的 Laplace 变换的表达式、数学期望和方差, 并得到了该模型有效灾难首次发生时间的期望的渐近性质.

关键词 n 维分枝过程 拯救 有效灾难 期望 方差

MSC (2010) 主题分类 60J27, 60J80

1 引言

Markov 分枝过程 (MBPs) 是 Markov 过程的重要分支之一, 在概率论的理论和应用中占据重要的地位 (参见文献 [1–7]). 然而, 对于 n 维 Markov 分枝模型的研究并不深入. 2009 年, Li [8] 首先研究了二维分枝过程的衰减指数及相关性质. 随后, Li 和 Wang [9] 将其推广到了 n 维分枝过程的情形, 讨论了相应的性质.

考虑到模型在实际中的应用, 带有灾难的 Markov 模型已经引起了许多学者的兴趣. 例如, Kaplan 等 [10] 研究了灾难的发生对分枝过程的灭绝性质的影响. 近来, Chen 等 [11] 研究了在一类特殊的灾难下, 一维分枝过程的衰减参数及相关性质. 早在 1982 年, Karlin 和 Tavaré [12] 分析了带灾难的生灭过程的性质. 有关带灾难的生灭过程, Van Doorn 和 Zeifman [6, 7] 讨论了该模型的灭绝性及其相关性质. Di Crescenzo 等 [13] 研究了带灾难的一般的生灭过程有效灾难的首次发生时间.

通常情形下, 当系统状态为 0 时就认为灾难发生了, 并且系统将永远停留在状态 0, 即 0 为吸收态. 本文假定灾难发生后系统仍可以从 0 状态转移到其他正状态, 排除了灾难发生后 0 为吸收态的情形. 这种灾难称为有效灾难, 即当系统状态不为 0 时发生的灾难.

本文主要考虑了带灾难和拯救的 n 维分枝模型中有效灾难首次发生时间. 通过 Q 矩阵的发生函数给出了它的数学期望 (有效灾难发生的平均时间)、方差及其概率密度函数的 Laplace 变换, 并讨论了期望的渐近性质.

我们从过程的无穷小特征 (Q 矩阵) 出发来研究这类过程. 下面先给出带灾难和拯救的 n 维分枝模型 Q 矩阵的定义.

英文引用格式: Meng W W, Li J P. n -Type branching processes with salvation and disasters (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 435–444, doi: 10.1360/N012015-00389

本文有如下设定:

(C-1) $\mathbf{Z}_+^n = \{(i_1, \dots, i_n) : i_1, \dots, i_n \in \mathbf{Z}_+\}$, 对任意 $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{Z}_+^n$, 定义 $|\mathbf{i}| = \sum_{k=1}^n i_k$;

(C-2) $[0, 1]^n = \{(u_1, \dots, u_n) : 0 \leq u_1, \dots, u_n \leq 1\}$;

(C-3) $\chi_{\mathbf{Z}_+^n}(\cdot)$ 表示 $\mathbf{Z}_+^n$ 的示性函数;

(C-4) $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ 为 $[0, 1]^n$ 上的向量.

定义 1.1 Q 矩阵 $Q = (q_{ij}; \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 称为带灾难和拯救的 n 维分枝 Q 矩阵 (简称为带灾难的 n TBR Q 矩阵), 如果

$$Q = Q^* + Q^{(0)} + Q_c, \quad (1.1)$$

其中 $Q^* = (q_{ij}^*; \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$, $Q^{(0)} = (q_{ij}^{(0)}; \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 和 $Q_c = (q_{ij}^{(c)}; \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 均为保守的 Q 矩阵, 且由下式给出:

$$q_{ij}^* = \begin{cases} \sum_{k=1}^n i_k b_{\mathbf{j}-\mathbf{i}+\mathbf{e}_k}^{(k)} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(\mathbf{j}-\mathbf{i}+\mathbf{e}_k), & \text{若 } |\mathbf{i}| > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$q_{ij}^{(0)} = \begin{cases} h_j, & \text{若 } |\mathbf{i}| = 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (1.3)$$

$$q_{ij}^{(c)} = \begin{cases} \xi, & \text{若 } |\mathbf{i}| > 0, \quad |\mathbf{j}| = 0, \\ -\xi, & \text{若 } |\mathbf{i}| > 0, \quad \mathbf{j} = \mathbf{i}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (1.4)$$

这里

$$\begin{cases} h_j \geq 0 \quad (\mathbf{j} \neq \mathbf{0}), \quad 0 < h := -h_{\mathbf{0}} = \sum_{\mathbf{j} \neq \mathbf{0}} h_j < \infty, \\ b_j^{(k)} \geq 0 \quad (\mathbf{j} \neq \mathbf{e}_k), \quad 0 < b^{(k)} := -b_{\mathbf{e}_k}^{(k)} = \sum_{\mathbf{j} \neq \mathbf{e}_k} b_j^{(k)} < \infty, \quad k = 1, \dots, n, \\ \xi \geq 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

定义 1.2 带灾难和拯救的 n 维分枝过程 (简称为带灾难的 n TBRP) 是定义在状态空间 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的连续时间 Markov 链, 其转移函数 $P(t) = (p_{ij}(t); \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 满足 Kolmogorov 向前方程

$$P'(t) = P(t)Q,$$

其中 Q 表示如 (1.1)–(1.5) 定义的带灾难的 n TBR Q 矩阵.

本文结构如下: 第 2 节讨论模型中 Q 矩阵的生成函数以及无灾难情形下过程预解式的基本性质; 第 3 节给出带灾难和拯救的 n 维分枝模型的有效灾难首次发生时间概率密度函数的 Laplace 变换的表达式、数学期望和方差, 并讨论了该模型有效灾难首次发生时间的期望的一些渐近性质.

2 预备知识

为了研究带灾难的 n TBRPs 的性质, 我们引入 $\{h_j; \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n\}$ 和 $\{b_j^{(i)}; \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n\}$ ($i = 1, \dots, n$) 的生成函数:

$$H(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=0}^{\infty} h_{j_1, \dots, j_n} u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n},$$

$$B_i(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=0}^{\infty} b_{j_1, \dots, j_n}^{(i)} u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

为了方便起见, 将 $h_{(j_1, \dots, j_n)}$ 和 $b_{(j_1, \dots, j_n)}^{(i)}$ 分别写成 $h_{j_1, \dots, j_n}$ 和 $b_{j_1, \dots, j_n}^{(i)}$. 显然, $H(u_1, \dots, u_n)$ 和每个 $B_i(u_1, \dots, u_n)$ 至少在 $[0, 1]^n$ 上有定义.

本节首先讨论生成函数 $H(u_1, \dots, u_n)$ 和 $\{B_i(u_1, \dots, u_n); i = 1, \dots, n\}$ 的性质. 令

$$H_j(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial H(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$B_{ij}(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial B_i(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_j}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$g_{ij}(u_1, \dots, u_n) = \delta_{ij} - \frac{B_{ij}(u_1, \dots, u_n)}{b_{e_i}^{(i)}}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

其中 $u_1, \dots, u_n \in [0, 1]$ 且 δ_{ij} 是 Dirac- 函数. 矩阵 $(B_{ij}(u_1, \dots, u_n))$ 和 $(g_{ij}(u_1, \dots, u_n))$ 分别记为 $B(u_1, \dots, u_n)$ 和 $G(u_1, \dots, u_n)$.

定义 2.1 如果存在一个 $n \times n$ 的矩阵 M 使得

$$(B_1(u_1, \dots, u_n), \dots, B_n(u_1, \dots, u_n))^T = M \cdot (u_1, \dots, u_n)^T,$$

其中 $(x_1, \dots, x_n)^T$ 表示向量 $(x_1, \dots, x_n)$ 的转置, 则生成函数 $\{B_i(u_1, \dots, u_n); 1 \leq i \leq n\}$ 称为奇异的.

定义 2.2 非负 $n \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 称为强正则的, 如果存在正整数 N , 使得 $A^N > 0$.

如果 $\{B_i(u_1, \dots, u_n); 1 \leq i \leq n\}$ 奇异, 则每个粒子只有一个后代, 此时过程等价于一个有限状态的 Markov 链. 为避免退化情形, 我们假定下列条件成立:

- (A-1) $\{B_i(u_1, \dots, u_n); 1 \leq i \leq n\}$ 非奇异;
- (A-2) $B_{ij}(1, \dots, 1) < +\infty, i, j = 1, \dots, n$;
- (A-3) $G(1, \dots, 1)$ 强正则.

由于定义 1.1 中给出的带灾难的 n TBR Q 矩阵 Q 是保守的, 根据 Markov 链的一般理论 (参见文献 [14]) 和假设条件 (A-2) 知, 存在唯一的 Q 过程, 即为 Feller 最小过程 (参见文献 [3]). 记此过程为 $\{N(t); t \geq 0\}$.

当 $\xi = 0$ 时, 即没有灾难, 此时 Q 矩阵为

$$\hat{Q} = Q^* + Q^{(0)}. \quad (2.1)$$

记由 $\hat{Q}$ 决定的带拯救的 n 维分枝过程为 $\{\hat{N}(t); t \geq 0\}$.

下面的引理描述了生成函数 $\{B_i(u_1, \dots, u_n); 1 \leq i \leq n\}$ 的性质.

引理 2.1 [9] 设 $G(1, \dots, 1)$ 强正则且 $\{B_i(u_1, \dots, u_n); 1 \leq i \leq n\}$ 非奇异, 则方程组

$$\begin{cases} B_1(u_1, \dots, u_n) = 0, \\ B_2(u_1, \dots, u_n) = 0, \\ \vdots \\ B_n(u_1, \dots, u_n) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

在 $[0, 1]^n$ 上至多有两个解. 令 $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ 和 $\rho(u_1, \dots, u_n)$ 分别表示方程 (2.2) 的最小非负解和 $B(u_1, \dots, u_n)$ 的最大特征值, 则

(i) 如果 $\sum_{k=1}^n B_k(1, \dots, 1) = 0$, 则 q_i 是 Feller 最小过程由状态 $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, \dots, n$) 出发的吸收概率. 若 $\rho(1, \dots, 1) \leq 0$, 则 $\mathbf{q} = \mathbf{1}$; 若 $\rho(1, \dots, 1) > 0$, 则 $\mathbf{q} < \mathbf{1}$, 即 $q_1, \dots, q_n < 1$.

(ii) 如果 $\sum_{k=1}^n B_k(1, \dots, 1) < 0$, 则方程 (2.2) 有唯一解 $\mathbf{q}$, 其中 q_i 是 Feller 最小过程由状态 $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, \dots, n$) 出发的吸收概率, 且 $\mathbf{q} < \mathbf{1}$, 即 $q_1, \dots, q_n < 1$.

(iii) $\rho(q_1, \dots, q_n) \leq 0$.

引理 2.2 ^[15] 令 $P^*(t) = (p_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^*(t); \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 和 $\Phi^*(\lambda) = (\phi_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^*(\lambda); \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 分别表示 Feller 最小 Q^* 函数和 Q^* 预解式, 其中 Q^* 如 (1.2) 定义. 则对任意 $\mathbf{i} \in \mathbf{Z}_+^n$ 和 $(u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$,

$$\frac{\partial F_{\mathbf{i}}(t, u_1, \dots, u_n)}{\partial t} = \sum_{k=1}^n B_k(u_1, \dots, u_n) \frac{\partial F_{\mathbf{i}}(t, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_k}, \quad (2.3)$$

其中 $F_{\mathbf{i}}(t, u_1, \dots, u_n) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n} p_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^*(t) u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n}$, 或等价地,

$$\lambda \Phi_{\mathbf{i}}(\lambda, u_1, \dots, u_n) - u_1^{i_1} \cdots u_n^{i_n} = \sum_{k=1}^n B_k(u_1, \dots, u_n) \frac{\partial \Phi_{\mathbf{i}}(\lambda, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_k}, \quad (2.4)$$

其中 $\Phi_{\mathbf{i}}(\lambda, u_1, \dots, u_n) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n} \phi_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^*(\lambda) u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n}$.

为了研究带灾难的 n TBRPs 更深入的性质, 我们需要下面重要的引理.

引理 2.3 ^[15] 假设 $G(1, \dots, 1)$ 强正则, $\{B_i(u_1, \dots, u_n); 1 \leq i \leq n\}$ 非奇异. 进一步, 若 $B_1(0, \dots, 0) > 0$, 则微分方程组

$$\begin{cases} u'_k(u) = \frac{B_k(u, u_2, \dots, u_n)}{B_1(u, u_2, \dots, u_n)}, & 2 \leq k \leq n, \\ u_k|_{u=0} = 0, & 2 \leq k \leq n \end{cases} \quad (2.5)$$

有唯一解 $(u_k(u); 2 \leq k \leq n)$, 且有

(i) $(u_k(u); 2 \leq k \leq n)$ 在 $[0, q_1]$ 上有定义;

(ii) 对任意的 $u \in (0, q_1)$, $2 \leq k \leq n$, 有 $u'_k(0) \geq 0$, $u'_k(u) > 0$;

(iii) $u_k(q_1) = q_k$, $2 \leq k \leq n$.

引理 2.4 Q^* 预解式的生成函数有以下具体表达式: 对 $\mathbf{i} \in \mathbf{Z}_+^n$, $u \in [0, q_1)$,

$$\begin{aligned} & \Phi_{\mathbf{i}}(\lambda, u, u_2(u), \dots, u_n(u)) \\ &= e^{-\int_0^u \frac{\lambda}{B_1(s, u_2(s), \dots, u_n(s))} ds} \left(\phi_{\mathbf{i}, \mathbf{0}}^*(\lambda) + \int_0^u \frac{y^{i_1} [u_2(y)]^{i_2} \cdots [u_n(y)]^{i_n}}{B_1(y, u_2(y), \dots, u_n(y))} e^{-\int_0^y \frac{\lambda}{B_1(x, u_2(x), \dots, u_n(x))} dx} dy \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

证明 对任意的 $\mathbf{i} \in \mathbf{Z}_+^n$, $u \in [0, q_1)$, 由 (2.4) 和 (2.5) 可得

$$\begin{aligned} & \lambda \Phi_{\mathbf{i}}(\lambda, u, u_2(u), \dots, u_n(u)) - u^{i_1} [u_2(u)]^{i_2} \cdots [u_n(u)]^{i_n} \\ &= B_1(u, u_2(u), \dots, u_n(u)) \frac{\partial \Phi_{\mathbf{i}}(\lambda, u, u_2(u), \dots, u_n(u))}{\partial u}, \end{aligned}$$

且满足初始条件 $\Phi_{\mathbf{i}}(\lambda, 0, u_2(0), \dots, u_n(0)) = \phi_{\mathbf{i}, \mathbf{0}}^*(\lambda)$. 解上述微分方程即得 (2.6). 证明完毕. $\square$

注 2.1 由引理 2.4, 我们可以得到 $(p_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^*(t), \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 的所有 Laplace 变换 $(\phi_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^*(\lambda), \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 的表达式. 事实上, 首先微分方程组

$$\begin{cases} u'_k(t) = B_k(u_1(t), \dots, u_n(t)), & k = 1, \dots, n, \\ u_k(0) = 0, & k = 1, \dots, n \end{cases}$$

的唯一解 $(u_1(t), \dots, u_n(t))$ 即为 $(p_{e_1,0}^*(t), \dots, p_{e_n,0}^*(t))$, 又根据 n 维分枝过程的分枝性质, 有 $p_{i,0}^*(t) = \prod_{l=1}^n (p_{e_l,0}^*(t))^{i_l}$ (参见文献 [3]), 从而可得 $\phi_{i,0}^*(\lambda)$, 再根据 (2.6), 即可得到所有 $\phi_{i,j}^*(\lambda)$, $i, j \in \mathbf{Z}_+^n$.

引理 2.5 ^[16] 设 $b \in \mathbf{Z}_+^n$, 则对任意的 $\lambda > 0$, 方程

$$\begin{cases} V(\lambda I - \tilde{Q}) = \mathbf{0}, \\ V \geq \mathbf{0}, \\ V\mathbf{1} < +\infty \end{cases} \quad (2.7)$$

只有零解, 其中 $\tilde{Q}$ 是 $\hat{Q}$ 在 $N \times N$ 上的限制 ($N = \mathbf{Z}_+^n \setminus \{b\}$).

定理 2.1 令 $\hat{\Pi}(\lambda) = (\hat{\pi}_{i,j}(\lambda); i, j \in \mathbf{Z}_+^n)$ 为 $\hat{Q}$ 预解式, 其中 $\hat{Q}$ 如 (2.1) 定义, 则有

$$\begin{cases} \hat{\pi}_{0,0}(\lambda) = \left[\lambda + \lambda \sum_{i \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}} \sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}} h_i \phi_{i,j}^*(\lambda) \right]^{-1}, \\ \hat{\pi}_{i,0}(\lambda) = \hat{\pi}_{0,0}(\lambda) \sum_{l=1}^n b_0^{(l)} \phi_{i,e_l}^*(\lambda), \quad i \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}, \\ \hat{\pi}_{0,j}(\lambda) = \hat{\pi}_{0,0}(\lambda) \sum_{i \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}} h_i \phi_{i,j}^*(\lambda), \quad j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}, \\ \hat{\pi}_{i,j}(\lambda) = \phi_{i,j}^*(\lambda) + \hat{\pi}_{0,0}(\lambda) \sum_{k \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}} h_k \phi_{k,j}^*(\lambda), \quad i, j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}, \end{cases} \quad (2.8)$$

其中 $\Phi^*(\lambda) = (\phi_{i,j}^*(\lambda); i, j \in \mathbf{Z}_+^n)$ 是 Q^* 预解式.

证明 记 $\tilde{q}_{ij} = \hat{q}_{ij}$, $i, j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}$, 也就是说, $\tilde{Q}$ 是 $\hat{Q}$ 在 $N \times N$ 上的限制 ($N = \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}$).

根据文献 [16] 中预解式分解定理 7.7, $\hat{\Pi}(\lambda)$ 可以唯一地分解为

$$\hat{\Pi}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \psi(\lambda) \end{pmatrix} + \hat{\pi}_{0,0}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix} (1 \quad \eta(\lambda)), \quad (2.9)$$

且文献 [16] 中预解式分解定理 7.7 的所有结论都成立, 其中 $\eta(\lambda) \in H_\psi$, $\xi(\lambda) \in K_\psi$.

由 Kolmogorov 向前方程可得

$$\hat{p}'_{i,j}(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_+^n} \hat{p}_{i,k}(t) \hat{q}_{kj}, \quad i \in \mathbf{Z}_+^n, \quad j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}.$$

将上式进行 Laplace 变换得

$$\lambda \hat{\pi}_{i,j}(\lambda) - \delta_{i,j} = \sum_{k \in \mathbf{Z}_+^n} \hat{\pi}_{i,k}(\lambda) \hat{q}_{kj}, \quad i \in \mathbf{Z}_+^n, \quad j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}, \quad \lambda > 0. \quad (2.10)$$

将 (2.9) 代入 (2.10) 得

$$\lambda \psi_{i,j}(\lambda) - \delta_{i,j} = \sum_{k \in \mathbf{Z}_+^n} \psi_{i,k}(\lambda) \hat{q}_{kj}, \quad i, j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}, \quad \lambda > 0. \quad (2.11)$$

所以, $\Psi(\lambda) = (\psi_{i,j}(\lambda); i, j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\})$ 是关于 $\tilde{Q}$ 的向前方程的解, 注意到根据引理 2.5, 方程 (2.7) 只有零解, 从而关于 $\tilde{Q}$ 的向前方程的解唯一. 因此, 由文献 [16, 定理 7.10] 知, $\Psi(\lambda)$ 一定是 Feller 最小 $\tilde{Q}$ 预解式 $\tilde{\phi}(\lambda)$, 即

$$\Psi(\lambda) \equiv \tilde{\phi}(\lambda), \quad \eta(\lambda) = h\tilde{\phi}(\lambda), \quad h = (h_j; j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}).$$

又 $\hat{q}_{ij} = q_{ij}^*$, $i, j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}$, 所以根据文献 [16] 中预解式分解定理 7.7 得 $\hat{Q}$ 的预解式 (2.8). 证毕. $\square$

3 有效灾难的首次发生时间

本节考虑过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 有效灾难的首次发生时间.

令 $P(t) = (p_{j,m}(t), j, m \in \mathbf{Z}_+^n)$ 和 $\pi(\lambda) = (\pi_{j,m}(\lambda), j, m \in \mathbf{Z}_+^n)$ 分别为对应的 Q 转移函数和 Q 预解式. 对任意的 $i, j \in \mathbf{Z}_+^n$ 和 $t > 0$, $p_{j,m}(t)$ 满足下面的向前方程:

$$\begin{cases} p'_{j,0}(t) = -(h + \xi)p_{j,0}(t) + \sum_{l=1}^n p_{j,e_l}(t)b_0^{(l)} + \xi, \\ p'_{j,m}(t) = h_m p_{j,0}(t) + \sum_{|k|>0} \left(\sum_{l=1}^n k_l b_{m-k+e_l}^{(l)} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(m - k + e_l) p_{j,k}(t) \right) - \xi p_{j,m}(t), \quad |m| > 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

其初始条件为 $\lim_{t \downarrow 0} p_{j,m}(t) = \delta_{j,m}$.

同样地, 令 $\hat{P}(t) = (\hat{p}_{j,m}(t), j, m \in \mathbf{Z}_+^n)$ 和 $\hat{\pi}(\lambda) = (\hat{\pi}_{j,m}(\lambda), j, m \in \mathbf{Z}_+^n)$ 分别为 $\hat{Q}$ 转移函数和 $\hat{Q}$ 预解式. 对任意的 $j, m \in \mathbf{Z}_+^n$ 和 $t > 0$, $\hat{p}_{j,m}(t)$ 满足的向前方程即为 (3.1) 中当 $\xi = 0$ 时的情形, 且有初始条件 $\lim_{t \downarrow 0} \hat{p}_{j,m}(t) = \delta_{j,m}$.

首先给出一个重要引理, 它刻画了关于 $N(t)$ 的转移函数与 $\hat{N}(t)$ 的转移函数之间的关系.

引理 3.1 [4] 对于任意的 $j, m \in \mathbf{Z}_+^n$, $t > 0$, $p_{j,m}(t)$ 与 $\hat{p}_{j,m}(t)$ 有以下关系:

$$p_{j,m}(t) = e^{-\xi t} \hat{p}_{j,m}(t) + \xi \int_0^t e^{-\xi \tau} \hat{p}_{0,m}(\tau) d\tau, \quad (3.2)$$

或者,

$$\pi_{j,m}(\lambda) = \hat{\pi}_{j,m}(\lambda + \xi) + \frac{\xi}{\lambda} \hat{\pi}_{0,m}(\lambda + \xi), \quad \lambda > 0. \quad (3.3)$$

下面考虑过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 有效灾难首次发生时间概率密度函数的 Laplace 变换、期望和方差, 以及期望的一些渐近性质. 令 $C_{j,0}$ 表示过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 从 $N(0) = j$ ($j \in \mathbf{Z}_+^n$) 出发有效灾难的首次发生时间, $d_{j,0}(t)$ ($t > 0$) 为 $C_{j,0}$ 的概率密度函数.

为了考察 $C_{j,0}$ 的性质, 我们考虑一个过程 $\{M(t); t \geq 0\}$, 它的运动规律在灾难发生之前与 $\{N(t); t \geq 0\}$ 相同, 不同的地方就是, 对于 $\{M(t); t \geq 0\}$ 来讲, 在状态 m ($|m| > 0$) 发生灾难的结果是系统从状态 m 直接跳到了吸收态 -1 . 因此, $\{M(t); t \geq 0\}$ 为定义在状态空间 $\mathbf{S} = \{-1\} \cup \mathbf{Z}_+^n$ 上的带灾难的 n 维分枝过程, 其 Q 矩阵为

$$Q_M = \tilde{Q}^* + \tilde{Q}^{(0)} + Q_d, \quad (3.4)$$

其中 $\tilde{Q}^* = (\tilde{q}_{ij}^*, i, j \in \mathbf{S})$, $\tilde{Q}^{(0)} = (\tilde{q}_{ij}^{(0)}, i, j \in \mathbf{S})$, $\tilde{q}_{ij}^* = q_{ij}^*$, $\tilde{q}_{ij}^{(0)} = q_{ij}^{(0)}$ ($i, j \in \mathbf{Z}_+^n$) 分别由 (1.2) 和 (1.3) 给出, $\tilde{q}_{ij}^* = \tilde{q}_{ij}^{(0)} = 0$ (i 或 $j = -1$), $Q_d = (q_{ij}^{(d)}, i, j \in \mathbf{S})$ 为保守的 Q 矩阵, 且由下式给出:

$$q_{ij}^{(d)} = \begin{cases} \xi, & \text{若 } i \in \mathbf{Z}_+^n, \quad |i| > 0, \quad j = -1, \\ -\xi, & \text{若 } i \in \mathbf{Z}_+^n, \quad |i| > 0, \quad j = i, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (3.5)$$

令 $F(t) = (f_{j,m}(t), j, m \in \mathbf{S})$ 和 $\eta(\lambda) = (\eta_{j,m}(\lambda), j, m \in \mathbf{S})$ 分别为 Q_M 转移函数和 Q_M 预解式. 对任意的 $j \in \mathbf{Z}_+^n$, $m \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}$ 和 $t \geq 0$, $f_{j,m}(t)$ 满足下面的向前方程:

$$\begin{cases} f'_{j,-1}(t) = \xi(1 - f_{j,-1}(t) - f_{j,0}(t)), \\ f'_{j,0}(t) = -hf_{j,0}(t) + \sum_{l=1}^n b_0^{(l)} f_{j,e_l}(t), \\ f'_{j,m}(t) = h_m f_{j,0}(t) + \sum_{k \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}} \left(\sum_{l=1}^n k_l b_{m-k+e_l}^{(l)} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(m - k + e_l) \right) f_{j,k}(t) - \xi f_{j,m}(t), \end{cases} \quad (3.6)$$

其初始条件为 $f_{j,m}(0) = \delta_{j,m}$. 由文献 [13] 知, $\{M(t); t \geq 0\}$ 与 $C_{j,0}$ 之间有以下关系:

$$P(C_{j,0} > t) \equiv \int_t^{+\infty} d_{j,0}(\tau) d\tau = \sum_{m \in \mathbf{Z}_+^n} f_{j,m}(t) = 1 - f_{j,-1}(t), \quad j \in \mathbf{Z}_+^n. \quad (3.7)$$

下面的定理给出了 $\{M(t); t \geq 0\}$ 的转移概率 $f_{j,m}(t)$ ($j \in \mathbf{Z}_+^n$, $m \in \mathbf{S}$) 的 Laplace 变换.

定理 3.1 对于任意的 $j \in \mathbf{Z}_+^n$ 和 $\lambda > 0$, 有

$$\eta_{j,-1}(\lambda) = \frac{\xi}{\lambda + \xi} \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{\hat{\pi}_{j,0}(\lambda + \xi)}{1 - \xi \hat{\pi}_{0,0}(\lambda + \xi)} \right], \quad (3.8)$$

$$\eta_{j,m}(\lambda) = \hat{\pi}_{j,m}(\lambda + \xi) + \xi \hat{\pi}_{0,m}(\lambda + \xi) \frac{\hat{\pi}_{j,0}(\lambda + \xi)}{1 - \xi \hat{\pi}_{0,0}(\lambda + \xi)}, \quad m \in \mathbf{Z}_+^n, \quad (3.9)$$

其中 $\hat{\pi}_{j,m}(\lambda + \xi)$ ($j, m \in \mathbf{Z}_+^n$) 可由引理 2.4、注 2.1 和定理 2.1 得到.

证明 当 $j = 0$ 时, 对 (3.6) 的第 2 和 3 个方程取 Laplace 变换, 得

$$\begin{cases} (\lambda + h)\eta_{0,0}(\lambda) - 1 = \sum_{l=1}^n b_0^{(l)} \eta_{0,e_l}(\lambda), \\ (\lambda + \xi)\eta_{0,m}(\lambda) = h_m \eta_{0,0}(\lambda) + \sum_{k \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}} \left(\sum_{l=1}^n k_l b_{m-k+e_l}^{(l)} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(m - k + e_l) \right) \eta_{0,k}(\lambda), \\ m \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (3.10)$$

同时, 对 (3.1) 取 Laplace 变换, 得

$$\begin{cases} (\lambda + h + \xi)\pi_{0,0}(\lambda) - 1 = \sum_{l=1}^n b_0^{(l)} \pi_{0,e_l}(\lambda) + \frac{\xi}{\lambda}, \\ (\lambda + \xi)\pi_{0,m}(\lambda) = h_m \pi_{0,0}(\lambda) + \sum_{k \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}} \left(\sum_{l=1}^n k_l b_{m-k+e_l}^{(l)} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(m - k + e_l) \right) \pi_{0,k}(\lambda), \\ m \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (3.11)$$

令

$$\eta_{0,m}(\lambda) = C(\lambda) \pi_{0,m}(\lambda), \quad m \in \mathbf{Z}_+^n. \quad (3.12)$$

将 (3.12) 代入 (3.10), 并与 (3.11) 联立, 可得

$$C(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda + \xi - \lambda \xi \pi_{0,0}(\lambda)}. \quad (3.13)$$

将 (3.13) 代入 (3.12), 并利用 (3.3), 可得 $j = \mathbf{0}$ 时的 (3.9).

当 $j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ 时, 对 (3.6) 的第 2 和 3 个方程取 Laplace 变换, 可得

$$\begin{cases} (\lambda + h)\eta_{j,\mathbf{0}}(\lambda) = \sum_{l=1}^n b_{\mathbf{0}}^{(l)} \eta_{j,e_l}(\lambda), \\ (\lambda + \xi)\eta_{j,\mathbf{m}}(\lambda) - \delta_{j,\mathbf{m}} = h_{\mathbf{m}}\eta_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(\lambda) + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}} \left(\sum_{l=1}^n k_l b_{\mathbf{m}-\mathbf{k}+e_l}^{(l)} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(\mathbf{m} - \mathbf{k} + e_l) \right) \eta_{\mathbf{0},\mathbf{k}}(\lambda), \\ \mathbf{m} \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}. \end{cases} \quad (3.14)$$

令

$$\eta_{j,\mathbf{m}}(\lambda) = D_j(\lambda)\pi_{j,\mathbf{m}}(\lambda) + F_j(\lambda)\pi_{\mathbf{0},\mathbf{m}}(\lambda), \quad j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \mathbf{m} \in \mathbf{Z}_+^n. \quad (3.15)$$

对 (3.1) 取 Laplace 变换, 并把 (3.15) 代入 (3.14), 然后联立可得

$$D_j(\lambda) = 1, \quad F_j(\lambda) = \frac{\xi[\lambda\pi_{j,\mathbf{0}}(\lambda) - 1]}{\lambda + \xi - \lambda\xi\pi_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(\lambda)}, \quad j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (3.16)$$

将 (3.16) 代入 (3.15), 并利用 (3.3), 可得 $j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ 时的 (3.9).

进一步, 将 (3.6) 的第 1 个方程作 Laplace 变换, 得 $\eta_{j,-1}(\lambda) = \frac{\xi}{\lambda + \xi} [\frac{1}{\lambda} - \eta_{j,\mathbf{0}}(\lambda)]$. 因此, 由 (3.9) 可立即得到 (3.8). 证明完毕. $\square$

令 $\Delta_{j,\mathbf{0}}(\lambda)$ 表示 $d_{j,\mathbf{0}}(t)$ ($j \in \mathbf{Z}_+^n$) 的 Laplace 变换. 由 (3.7) 可得 $d_{j,\mathbf{0}}(t) = f'_{j,-1}(t)$ ($j \in \mathbf{Z}_+^n$), 即 $\Delta_{j,\mathbf{0}}(\lambda) = \lambda\eta_{j,-1}(\lambda)$, 因此得到下述推论.

推论 3.1 对任意的 $j \in \mathbf{Z}_+^n$, 有

$$\Delta_{j,\mathbf{0}}(\lambda) = \frac{\xi}{\lambda + \xi} - \frac{\lambda}{\lambda + \xi} \cdot \frac{\xi\hat{\pi}_{j,\mathbf{0}}(\lambda + \xi)}{1 - \xi\hat{\pi}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(\lambda + \xi)}, \quad (3.17)$$

其中 $\hat{\pi}_{j,\mathbf{0}}(\lambda + \xi)$ ($j \in \mathbf{Z}_+^n$) 可由引理 2.4、注 2.1 和定理 2.1 给出.

注 3.1 由推论 3.1、(3.3) 和 (3.16) 可知, $\Delta_{j,\mathbf{0}}(\lambda) = -F_j(\lambda)$ ($j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$). 事实上, 这个结论还可以如下证明: 由于 $C_{j,\mathbf{0}} > t$ ($j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$) 意味着 t 之前 $\{N(t); t \geq 0\}$ 和 $\{M(t); t \geq 0\}$ 的运动轨迹是一样的, 故对 $j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, 有

$$\begin{aligned} p_{j,\mathbf{m}}(t) &= P(N_t = \mathbf{m} \mid N_0 = j) \\ &= P(N_t = \mathbf{m}, C_{j,\mathbf{0}} > t \mid N_0 = j) + P(N_t = \mathbf{m}, C_{j,\mathbf{0}} \leq t \mid N_0 = j) \\ &= P(M_t = \mathbf{m} \mid M_0 = j) + \int_0^t d_{j,\mathbf{0}}(s)p_{\mathbf{0},\mathbf{m}}(t-s)ds \\ &= f_{j,\mathbf{m}}(t) + \int_0^t d_{j,\mathbf{0}}(s)p_{\mathbf{0},\mathbf{m}}(t-s)ds. \end{aligned}$$

对上式取 Laplace 变换, 得

$$\pi_{j,\mathbf{m}}(\lambda) = \eta_{j,\mathbf{m}}(\lambda) + \Delta_{j,\mathbf{0}}(\lambda)\pi_{\mathbf{0},\mathbf{m}}(\lambda),$$

即

$$\eta_{j,\mathbf{m}}(\lambda) = \pi_{j,\mathbf{m}}(\lambda) - \Delta_{j,\mathbf{0}}(\lambda)\pi_{\mathbf{0},\mathbf{m}}(\lambda), \quad j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

与 (3.15) 比较即可得到 $\Delta_{j,\mathbf{0}}(\lambda) = -F_j(\lambda)$ ($j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$). 同理, 由 (3.13) 可知, $\Delta_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(\lambda) = 1 - C(\lambda)$, 其中 $C(\lambda)$ 由 (3.13) 给定.

接下来考虑有效灾难的首次发生时间 $C_{j,0}$ 的期望和方差.

定理 3.2 对任意的 $j \in \mathbf{Z}_+^n$, 有

$$E(C_{j,0}) = \frac{1}{\xi} + \frac{\hat{\pi}_{j,0}(\xi)}{1 - \xi \hat{\pi}_{0,0}(\xi)}, \quad (3.18)$$

$$\text{Var}(C_{j,0}) = \frac{1}{\xi^2} \left\{ 1 - \frac{\xi^2 \hat{\pi}_{j,0}^2(\xi)}{[1 - \xi \hat{\pi}_{0,0}(\xi)]^2} - \frac{2\xi^2}{1 - \xi \hat{\pi}_{0,0}(\xi)} \frac{d}{d\xi} \hat{\pi}_{j,0}(\xi) - \frac{2\xi^3 \hat{\pi}_{j,0}(\xi)}{[1 - \xi \hat{\pi}_{0,0}(\xi)]^2} \frac{d}{d\xi} \hat{\pi}_{0,0}(\xi) \right\}, \quad (3.19)$$

其中 $\hat{\pi}_{j,0}(\xi)$ ($j \in \mathbf{Z}_+^n$) 可由引理 2.4、注 2.1 和定理 2.1 得到.

证明 由于 $E(C_{j,0}) = -\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \Delta'_{j,0}(\lambda)$ 且 $E(C_{j,0}^2) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \Delta''_{j,0}(\lambda)$, 由 (3.17) 经过简单的代数运算即可得到 (3.18) 和 (3.19). 证明完毕. $\square$

下面的定理给出了当 $\xi \downarrow 0$ 时有效灾难的首次发生时间 $C_{j,0}$ 的期望的渐近性质.

定理 3.3 (i) 若 $\{\hat{N}(t); t \geq 0\}$ 是正常返的, 则 $\lim_{\xi \downarrow 0} \xi E(C_{j,0}) = \frac{1}{1 - \hat{q}_0}$ ($j \in \mathbf{Z}_+^n$), 其中

$$\hat{q}_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{p}_{0,0}(t);$$

(ii) 若 $\{\hat{N}(t); t \geq 0\}$ 是非常返的, 则 $\lim_{\xi \downarrow 0} \{E(C_{j,0}) - \frac{1}{\xi}\} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{\pi}_{j,0}(\lambda)$ ($j \in \mathbf{Z}_+^n$).

证明 (i) 若 $\{\hat{N}(t); t \geq 0\}$ 是正常返的, 则过程有平稳分布 $\{\hat{q}_i; i \in \mathbf{Z}_+^n\}$, 利用 Tauberian 定理得

$$\lim_{\xi \downarrow 0} \xi E(C_{j,0}) = 1 + \frac{\xi \hat{\pi}_{j,0}(\xi)}{1 - \xi \hat{\pi}_{0,0}(\xi)} = 1 + \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{p}_{j,0}(t)}{1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{p}_{0,0}(t)} = \frac{1}{1 - \hat{q}_0}, \quad j \in \mathbf{Z}_+^n;$$

(ii) 若 $\{\hat{N}(t); t \geq 0\}$ 是非常返的, 利用 (3.18) 可得

$$\lim_{\xi \downarrow 0} \left\{ E(C_{j,0}) - \frac{1}{\xi} \right\} = \int_0^{+\infty} \hat{p}_{j,0}(t) dt = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{\pi}_{j,0}(\lambda), \quad j \in \mathbf{Z}_+^n.$$

证明完毕. $\square$

下面考虑当 $\xi \rightarrow +\infty$ 时有效灾难的首次发生时间 $C_{j,0}$ 的期望的渐近性质.

定理 3.4 对于由 (3.18) 确定的 $E(C_{j,0})$, 有

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} E(C_{0,0}) = \frac{1}{h}, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \xi E(C_{j,0}) = \begin{cases} 1 + \frac{b_0^{(l)}}{h}, & \text{若 } j = e_l \text{ 对某个 } l \in \{1, \dots, n\}, \\ 1, & |j| \geq 2. \end{cases}$$

证明 由于

$$(\xi + h) \hat{\pi}_{j,0}(\xi) = \delta_{j,0} + \sum_{l=1}^n b_0^{(l)} \hat{\pi}_{j, e_l}(\xi), \quad j \in \mathbf{Z}_+^n,$$

由 (3.18) 可得

$$E(C_{0,0}) = \frac{1}{\xi} + \frac{\hat{\pi}_{0,0}(\xi)}{h \hat{\pi}_{0,0}(\xi) - \sum_{l=1}^n b_0^{(l)} \hat{\pi}_{0, e_l}(\xi)},$$

$$E(C_{j,0}) = \frac{1}{\xi} \left[1 - \frac{h \hat{\pi}_{j,0}(\xi) - \sum_{l=1}^n b_0^{(l)} \hat{\pi}_{j, e_l}(\xi)}{h \hat{\pi}_{0,0}(\xi) - \sum_{l=1}^n b_0^{(l)} \hat{\pi}_{0, e_l}(\xi)} \right], \quad j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \{0\}.$$

利用 Tauberian 定理可得

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} E(C_{0,0}) = \frac{\lim_{t \rightarrow 0} \hat{p}_{0,0}(t)}{h \lim_{t \rightarrow 0} \hat{p}_{0,0}(t) - \sum_{l=1}^n b_0^{(l)} \lim_{t \rightarrow 0} \hat{p}_{0, e_l}(t)} = \frac{1}{h},$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \xi E(C_{j,0}) = 1 - \frac{h \lim_{t \rightarrow 0} \hat{p}_{j,0}(t) - \sum_{l=1}^n b_0^{(l)} \lim_{t \rightarrow 0} \hat{p}_{j,e_l}(t)}{h \lim_{t \rightarrow 0} \hat{p}_{0,0}(t) - \sum_{l=1}^n b_0^{(l)} \lim_{t \rightarrow 0} \hat{p}_{0,e_l}(t)}$$

$$= \begin{cases} 1 + \frac{b_0^{(l)}}{h}, & \text{若 } j = e_l \text{ 对某个 } l \in \{1, \dots, n\}, \\ 1, & |j| \geq 2. \end{cases}$$

证明完毕. □

致谢 作者非常感谢评审专家给本文提出的宝贵意见和建议.

参考文献

- 1 Asmussen S, Hering H. Branching Processes. Boston: Birkhäuser, 1983
- 2 Athreya K B, Ney P E. Branching Processes. Berlin: Springer, 1972
- 3 Harris T E. The Theory of Branching Processes. Berlin-New York: Springer, 1963
- 4 Pakes A G. Killing and resurrection of Markov processes. Comm Statist Stoch Models, 1997, 13: 255–269
- 5 Reuter G E H. Denumerable Markov processes and the associated contraction semigroups on l . Acta Math, 1957, 97: 1–46
- 6 Van Doorn E A, Zeifman A I. Birth-death processes with killing. Statist Probab Lett, 2005, 72: 33–42
- 7 Van Doorn E A, Zeifman A I. Extinction probability in a birth-death process with killing. J Appl Probab, 2005, 42: 185–198
- 8 Li J P. Decay parameter and related properties of 2-type branching processes. Sci China Ser A, 2009, 52: 875–894
- 9 Li J P, Wang J. Decay parameter and related properties of n -type branching processes. Sci China Math, 2012, 55: 2535–2556
- 10 Kaplan N, Sudbury A, Nilsen T S. A banching process with disasters. J Appl Probab, 1975, 12: 47–59
- 11 Chen A Y, Ng K W, Zhang H J. Uniqueness and dacay properties of Markov branching processes with disasters. J Appl Probab, 2014, 51: 613–624
- 12 Karlin S, Tavaré S. Linear birth and death processes with killing. J Appl Probab, 1972, 19: 477–487
- 13 Di Crescenzo A, Giorno V, Nobile A G, et al. A note on birth-death processes with catastrophes. Statist Probab Lett, 2008, 78: 2248–2257
- 14 Anderson W. Continuous-Time Markov Chains: An Applications-Oriented Approach. New York: Springer-Verlag, 1991
- 15 王娟. 几类广义分枝模型的研究. 博士学位论文. 长沙: 中南大学, 2013
- 16 Chen A Y, Renshaw E. Markov branching processes with instantaneous immigration. Probab Theory Related Fields, 1990, 87: 209–240

n -Type branching processes with salvation and disasters

MENG WeiWei & LI JunPing

Abstract This paper considers the first effective disaster occurrence time for n -type Markov branching processes with salvation and disasters. Some properties of the generating functions for n -type Markov branching processes with salvation and disasters are firstly investigated in detail. By using the generating functions of the corresponding Q matrix, explicit formulae for Laplace transform of its probability density function, expectation and variance are obtained. Some asymptotic properties of its expectation are also studied.

Keywords n -type Markov branching processes, salvation, effective disaster, expectation, variance

MSC(2010) 60J27, 60J80

doi: 10.1360/N012015-00389