论文

基于特征正交分解降阶模型的瞬态热传导分析

胡金秀^①, 郑保敬^{①②}, 高效伟^{①②*}^① 大连理工大学航空航天学院, 大连 116024;^② 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024

*联系人, E-mail: xwgao@dlut.edu.cn

收稿日期: 2013-08-16; 接受日期: 2014-06-30

国家自然科学基金资助项目(批准号: 11172055, 51206014)

摘要 提出了一种用常数边界条件建立的瞬态热传导问题的特征正交分解(POD)降阶模态, 对时变边界条件进行瞬态热传导降阶分析的方法, 可对未知时刻的温度场进行内插和外插预测分析. 首先, 对常数边界瞬态热传导问题, 在实验、经验或有限单元法等数值方法结果的基础上, 取一些时刻的解构成瞬像矩阵, 并对该矩阵进行特征正交分解以求得 POD 模态; 其次, 通过特征值误差分析, 确定降阶分析模态, 并用其对随时间变化的边界条件进行瞬态热传导计算分析. 本文的特点是, 当边界条件时变时, 不需要重新计算 POD 模态, 而且可以用很少的模态捕捉全阶模型高达 99% 的能量. 实例表明, 本文所述方法正确有效, 同样的 POD 模态能准确预测和拟合求解域不变但边界条件以各种不同方式光滑时变时的瞬态传热问题, 在气动热力学等需实时控制或快速计算的问题中具有很好的发展前景.

关键词 特征正交分解, 降阶模型, 瞬态热传导, POD 模态

PACS: 44.05.+e, 02.70.Dh, 02.10.Yn

doi: 10.1360/SSPMA2013-00041

在气动热力学等需实时控制或快速计算的领域中, 以及与工业应用有关的热工程中都需要对复杂热传导问题进行快速准确的预测^[1]. 目前, 一些常见的数值求解方法, 如有限单元法、有限体积法, 有限差分法, 边界单元法等, 在求解给定初边值的复杂偏微分方程组时, 因离散格式中自由度太大产生计算时间长^[2,3]及存储空间大的问题^[4], 不能满足实时控制和快速预测的要求. 基于特征正交分解(POD)方法的降维数值解法是实现这一目标的方法之一^[5-10].

POD 方法旨在从一组庞大的实验或仿真数据中获得一组低维最优基, 而这组低维最优基能够表示原复杂系统的降阶模型. 换言之, POD 是一种降维方法, 在最小二乘意义下对给定的数据进行最优的低维逼近, 从而用较小的自由度将原物理模型的特征表达出来^[6]. 近年来, POD 技术被广泛地应用于解决实际问题数值模拟过程中的降维问题中, 如流体力学^[5,7,11-13], 空气动力学^[9,10], 最优控制^[14-17], 结构动力学^[18-21], 热传导分析^[22-26]. POD 方法的降维原理分

引用格式: 胡金秀, 郑保敬, 高效伟. 基于特征正交分解降阶模型的瞬态热传导分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2015, 45: 014602

Hu J X, Zheng B J, Gao X W. Reduced order model analysis method via proper orthogonal decomposition for transient heat conduction (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2015, 45: 014602, doi: 10.1360/SSPMA2013-00041

为连续形式和离散形式^[6]. 在与传热相关的文献中, 文献[22,23]将 POD 方法的离散形式应用于线性和非线性瞬态热传导的降维模型中. 文献[24,25]利用现有的有限单元法程序数据库, 基于伽辽金弱形式和 POD 方法的连续形式, 得到瞬态热传导问题的降阶模型. 文献[26]得到瞬态热传导问题的基于 POD 方法和有限元系统的降阶模型, 并对降阶模型进行解耦求解. 尽管这些文献都给出了基于 POD 降阶模型的瞬态传热问题的求解方法. 但大多只局限于常数边界情况的降阶, 并没有发现同样的求解域问题, 常数边界的 POD 模态对时变边界的信息贡献. 本文在前人工作的基础上, 提出一种可以用常数边界瞬态热传导问题的 POD 模态精确地预测和拟合时变边界瞬态热传导问题的解的方法. 对于一般光滑时变边界条件, 只要问题求解域不变, 都能够用一次计算的常数边界情况的解的 POD 模态来准确预测和拟合新的时变边界情况问题的解, 这在实时控制和快速计算中具有很重要的意义和价值.

1 瞬态热传导方程的有限元离散格式和瞬像的生成

1.1 瞬态热传导方程的有限元离散格式

瞬态热传导问题的微分方程^[20]:

$$\rho c \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right) + Q(\mathbf{x}), \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1)$$

边界条件:

$$T(\mathbf{x}, t) = \bar{T}, \quad (\text{在 } \Gamma_1 \text{ 边界上})$$

$$k(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} n_i = q, \quad (\text{在 } \Gamma_2 \text{ 边界上}) \quad (2)$$

$$k(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} n_i = h(T_a - T), \quad (\text{在 } \Gamma_3 \text{ 边界上})$$

初始条件:

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0. \quad (3)$$

式中, ρ 是材料密度 (kg/m^3); c 是材料比热容 ($\text{J}/(\text{kg K})$); t 是时间 (s); $k(\mathbf{x})$ 是材料导热系数 ($\text{W}/(\text{m K})$); $Q(\mathbf{x})$ 是物体内部的热源强度 (W/m^3); n_i ($i=1, 2, 3$) 是边界外法线的方向余弦; Γ_1 为温度给定的边界, $\bar{T} = \bar{T}(\Gamma, t)$ 是

在 Γ_1 上给定的温度值; Γ_2 为热流给定的边界, $q = q(\Gamma, t)$ 是在 Γ_2 上给定的热流密度 (W/m^2); Γ_3 为对流换热边界, h 是对流换热系数 ($\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$), $T_a = T_a(\Gamma, t)$ 是在 Γ_3 上给定的环境温度或绝热壁温度. 当 $\bar{T}(\Gamma, t)$, $q(\Gamma, t)$ 不随时间变化时, 称为定常边界条件; 否则, 称为时变边界条件.

瞬态热传导问题的有限元离散格式为^[27]

$$C\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{F}. \quad (4)$$

其中, $\mathbf{C}$ 为热容矩阵, $\mathbf{K}$ 为热传导矩阵, $\mathbf{F}$ 为温度载荷列阵, $\mathbf{T}$ 为节点温度列阵, $\dot{\mathbf{T}}$ 为节点温度对时间的导数列阵. 矩阵 $\mathbf{K}$, $\mathbf{C}$, 和 $\mathbf{F}$ 的元素由单元的相应的矩阵元素集成, 即

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \sum_e K_{ij}^e + \sum_e H_{ij}^e, \\ C_{ij} &= \sum_e C_{ij}^e, \\ F_i &= \sum_e F_{Q_i}^e + \sum_e F_{q_i}^e + \sum_e F_{H_i}^e. \end{aligned} \quad (5)$$

其中,

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= \int_{\Omega^e} \left(k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + k_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega, \\ H_{ij}^e &= \int_{\Gamma_3^e} h N_i N_j d\Gamma, \\ C_{ij}^e &= \int_{\Omega^e} \rho c N_i N_j d\Omega, \\ F_{Q_i}^e &= \int_{\Omega^e} Q N_i d\Omega, \\ F_{q_i}^e &= \int_{\Gamma_2^e} q N_i d\Gamma, \\ F_{H_i}^e &= \int_{\Gamma_3^e} h T_a N_i d\Gamma. \end{aligned} \quad (6)$$

当方程(4)的维数很高时, 对其求解需要很大的存储资源和计算时间.

1.2 瞬像矩阵的生成

瞬像(Snapshots), 也称快照, 由 Sirovich 提出^[28], 是指物理场的数值解在不同时刻的空间分布值. 对于瞬态热传导问题式(4)中的温度场 $\mathbf{T}$, 取瞬像矩阵为

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{T}(t_1), \mathbf{T}(t_2), \dots, \mathbf{T}(t_L)\}. \quad (7)$$

式中, L 为瞬像时刻数或快照数. 假设式(4)中有限元离散后的自由度为 M , 则 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times L}$, $\mathbf{A}$ 的每一列表示

一个快照, $\mathbf{A}$ 的列数表示快照的数量. 瞬像矩阵一般由实验、经验、有限单元法等数值求解方法的结果获得, 通常 $M \gg L$.

2 降阶模型的构建与分析技术

2.1 POD 模态的获取

POD 模态, 又称 POD 基. POD 方法的目的是寻找一组最优的 POD 基 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ (其中 φ_i 为列向量), 使得结构模型任意节点上任意时刻的温度可以表示为 POD 基的线性组合^[6,9], 即

$$\mathbf{T}(t) = \alpha_1(t)\varphi_1 + \alpha_2(t)\varphi_2 + \dots + \alpha_r(t)\varphi_r. \quad (8)$$

其中, $\alpha_i(t), i=1, 2, \dots, r$ 表示 POD 基的系数. 为了寻求满足式(8)的最优 POD 基, 采用式(7)的瞬像矩阵 $\mathbf{A}$. 定义相关矩阵 $\mathbf{R}$ 如下

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}. \quad (9)$$

则 $\mathbf{R} \in \mathbf{R}^{L \times L}$, 求相关矩阵 $\mathbf{R}$ 的非零特征值及特征向量:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\phi_j &= \lambda_j \phi_j, \quad j=1, 2, \dots, l, \\ l \leq L, \quad \lambda_1 &\geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0. \end{aligned} \quad (10)$$

最优 POD 基可以表示如下^[6,9]

$$\varphi_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \mathbf{A}\phi_j, \quad j=1, 2, \dots, l, \quad l \leq L \quad (11)$$

可以证明 $\varphi_j, j=1, 2, \dots, l$, 是一组标准正交基, 即

$$\varphi_i \cdot \varphi_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

只选取前 r 阶模态进行分析, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$, 选取规则如下

$$r = \arg \min \left\{ I(r) : I(r) \geq \frac{\gamma}{100} \right\}. \quad (12)$$

其中

$$I(r) = \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i}{\sum_{i=1}^L \lambda_i}. \quad (13)$$

一般取 $\gamma=99.99$.

2.2 降阶模型分析微分方程

瞬态热传导问题中, 任意节点上任意时刻的温度可以表示为 POD 基的线性组合, 如式(8)所示, 记 $\Phi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_r]$, 则 $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times r}$, $M \gg r$, 称 Φ 为 POD 模态矩阵. 记 $\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_r]^T$, 则式(8)又可表示如下

$$\mathbf{T} = \Phi \alpha. \quad (14)$$

将式(14)带入式(4), 得

$$\mathbf{C}\Phi\dot{\alpha} + \mathbf{K}\Phi\alpha = \mathbf{F}. \quad (15)$$

上式左右两边同乘以 Φ^T , 得

$$\Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\alpha} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \alpha = \Phi^T \mathbf{F}. \quad (16)$$

综上, 将自由度为 M 的全阶模型式(4)降阶为自由度为 r 的降阶模型式(16). 将式(14)带入式(3), 得降阶模型的初始条件:

$$\alpha(0) = \Phi^T T_0. \quad (17)$$

求解方程组式(16), 可得到各个所需时刻的系数 α 值, 然后将其带回到式(14)则可得温度场结果.

2.3 降阶模型误差评估

POD 模态表示捕获物理场的主要特征, 截断后的前 r 阶 POD 模态较全阶模态所捕获的能量用式(13)表示. 故定义相对截断误差如下

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=r+1}^l \lambda_i}{\sum_{i=1}^l \lambda_i}. \quad (18)$$

3 用常数边界问题的 POD 模态对时变边界问题的分析方法

用常数边界瞬态热传导问题的 POD 模态拟合时变边界瞬态热传导问题的解的过程如图 1 所示. 对于相同的求解域瞬态传热问题, 可以分为常数边界和时变边界两种情况, 在气动热力学等需实时控制或快速计算的领域中, 以时变边界情况为主. 为了满足实时控制和快速计算的要求, 先将时变边界条件简化为常数边界条件(一般取时变边界的均值), 按前节所述方法求出常数边界条件下问题的瞬像矩阵 $\mathbf{A}$ 及 POD 模态矩阵 Φ , 对于时变边界条件问题, 用 $\mathbf{T} = \Phi \alpha$ 进行降阶模型分析.

图 1 常数边界 POD 模态对时变边界问题的拟合过程

Figure 1 Prediction process of the reduced-order POD modes from constant boundary conditions to the results under time-varying boundary conditions.

分析步骤可总结如下:

(1) 求解常数边界条件下的瞬像矩阵 A , 如式(7)所示.

(2) 将 A 代入式(9)–(11), 计算 POD 模态向量 φ_j , $j=1, 2, \dots, l$.

(3) 按照式(12), (13)选取前 r 阶模态, 构成 POD 模态矩阵 Φ .

(4) 用 $T = \Phi\alpha$ 降阶分析各种时变边界条件 B_i 下的温度场模型. 具体步骤为:

1) 求 B_i 边界条件下问题的有限元离散格式, 如式(4)所示; 2) 将 $T = \Phi\alpha$ 代入式(4), 得降阶模型, 如式(16)所示; 3) 求解一阶常微分方程组(16), (17), 得 α ; 4) 将 α 代入 $T = \Phi\alpha$, 得该 B_i 边界条件下的温度场 T .

需要注意的是, 对于一般光滑时变边界条件, 该方法能够用一种常数边界条件下一次计算的 POD 模态来准确预测和拟合新的时变边界条件问题的解. 下节将通过二维和三维瞬态热传导实例来验证该方法的有效性和准确性.

4 算例分析

算例 1 含圆孔的长方形平板的瞬态传热问题

本分析算例的几何参数及常数边界条件如图 2 所示. 板的长度为 15 cm, 宽度为 5 cm, 其中间有一个半径为 1 cm 的圆孔. 板的密度 $\rho=5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 比热 $c=200 \text{ J/(kg} \cdot ^\circ\text{C)}$, 导热系数 $k_x=k_y=100 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$. 板的初始温度为 20°C , 将板的左端置于 500°C 的温度场中, 右端固定温度为 20°C , 板的上下边及圆孔边缘绝热.

图 2 板的几何尺寸及常数边界条件

Figure 2 Geometry and constant boundary conditions of the rectangular plate with a hole.

图 3 给出了板的有限元计算模型. 该模型包含 2175 个节点, 2063 个四边形单元. 用有限元法计算出该常数边界条件下, 时间 $t=5, 10, 15, \dots, 100 \text{ s}$ (总计 20 个)时刻板内各节点的温度, 作为 20 个快照向量, 构成瞬像矩阵 A , 代入式(9)–(11)中, 计算 POD 模态向量 φ_j , $j=1, 2, \dots, 20$.

图 4 给出了板的各阶模态所对应的特征值比重. 第 i 个特征值对应的比重定义为

$$\frac{\lambda_i}{\sum_k \lambda_k}, i=1, 2, \dots, 20, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_{20} \geq 0.$$

由图 4 可以看出, 从第 6 阶模态开始, 其特征值所占比重就已经非常小, 大约为 9.9776×10^{-12} .

图 5 给出各阶模态所对应的相对截断误差, 由式(18)计算, 前 i 阶模态所对应的相对截断误差为

$$\varepsilon_i = \frac{\sum_{k=i+1}^{20} \lambda_k}{\sum_j \lambda_j}, i=1, 2, \dots, 19.$$

由图 5 可以看出, 前 5 阶模态捕捉了全阶模型高达 99.99999999% 的能量. 故由图 4 和 5 可知, 取前 5 阶模态的降阶模型足以准确表达全阶模型.

取 POD 模态矩阵 $\Phi = [\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_5]$. 用 $T = \Phi\alpha$ 分别降阶分析下列情况, 并计算相应温度场(取图 2 中的 A, B, C 点作为参考点, 左边界所施加温度边界条件见图 6).

图 3 (网络版彩图)板的有限元计算模型

Figure 3 (Color online) FEM model of the rectangular plate with a hole.

图 4 (网络版彩图)特征值比重与模态个数的关系图

Figure 4 (Color online) Proportion of each eigenvalue to the sum of all eigenvalues.

图 5 (网络版彩图)求解误差与模态个数的关系

Figure 5 (Color online) Relative truncation error versus the number of POD modes.

(1) $t=1, 2, 3, \dots, 100$ s 的温度值(内插值问题), 结果如图 7 所示;

(2) $t=1, 2, 3, \dots, 200$ s 的温度值(外插值问题), 结果如图 8 所示;

(3) 左边温度为周期变化 $T=500(1-\sin\omega t)^\circ\text{C}$, 其中 $\omega=\pi/24$ 时, $t=1, 2, 3, \dots, 100$ s 的温度值(时变内插值问题), 结果如图 9 所示;

(4) 左边温度为周期变化 $T=500(1-\sin\omega t)^\circ\text{C}$, 其中 $\omega=\pi/24$ 时, $t=1, 2, 3, \dots, 200$ s 的温度值(时变外插值问题), 结果如图 10 所示;

(5) 左边温度

$$T = \begin{cases} 10000y, & t \in [0, 30] \text{ s}, \\ -800000y^2 + 40000y, & t \in [30, 70] \text{ s}, \\ -10000y + 500, & t \in (70, 100] \text{ s}, \end{cases}$$

图 6 板的左边界所施加温度情况示意图

Figure 6 Temperature on the left side of the plate (case 5).

其中 $y \in [0, 0.05]$, 左边两个端点的纵坐标分别为 0 和 0.05), 即左边温度局部集中且集中位置随时间变化, 左边界所施加温度边界条件示意图如图 6 所示. 求 $t=1, 2, 3, \dots, 200$ s 的温度值(非均匀时变内插值问题), 结果如图 11 所示.

从图 7 可以看出, 由常数边界条件下, $t=5, 10, 15, \dots, 100$ s 时刻的温度场结果作为瞬态矩阵 A , 获得的前 5 阶 POD 模态矩阵, 降阶模型所得结果与 ANSYS 软件分析结果吻合得非常好. 从图 8 可以看出, 降阶模型也能很好地预测未来时间(100 s 以后)的结果. 从图 9 可以看出, 由常数边界 POD 模态降阶求解周期时变问题, 所得结果与 ANSYS 软件分析结果吻合得非常好. 从图 10 可以看出, 图 9 中所得降阶模型的结果, 也能很好地预测未来时间(100 秒以后)的温度场. 从图 11 可以看出, 由常数边界 POD 模态降阶求解边界温度局部集中且集中位置随时间变化的同一求解域问题时, 所得结果与 ANSYS 软件分析结果吻合得非常好.

算例 2 机翼瞬态传热问题

第二个分析算例是关于机翼的传热问题, 其几何参数、物性参数及常数边界条件如下: 机翼翼根弦长 $b_0=1000$ mm, 翼尖弦长 $b_1=800$ mm, 翼型的最大厚度为 120 mm, 翼展 $l=1600$ mm, 机翼材料的密度为 $\rho=2.8 \times 10^3$ kg/m³, 比热 $c=960$ J/(kg °C), 导热系数

$k_x=k_y=k_z=173 \text{ W/(m}^\circ\text{C)}$. 翼根和翼梢所在的面为绝热边界条件, 迎风面温度设为 500 K , 背风面温度为 230 K , 初始温度 $T(x, y, z, 0)=230 \text{ K}$. 图 12 给出了机翼传热分析的有限元模型, 该模型由 5400 个节点、4048 个六面体单元组成.

用有限元法计算出该常数边界条件下, 时间 $t=5, 10, 15, \dots, 100 \text{ s}$ (总计 20 个) 时刻的节点温度作为 20 个快照向量, 构成瞬态矩阵 $\mathbf{A}$, 代入式(9)–(11), 计算 POD 模态向量 $\varphi_j, j=1, 2, \dots, 20$.

图 13 给出了机翼的各阶模态所对应的特征值比重. 第 i 个特征值对应的比重定义为

图 7 (网络版彩图) 常数边界条件 5 阶降阶模型与精确解比较(内插结果)

Figure 7 (Color online) Temperature versus time at different points from the first 5 order reduced model under constant boundary condition (interpolation results).

图 8 (网络版彩图) 常数边界条件 5 阶降阶模型与精确解比较(外插结果)

Figure 8 (Color online) Temperature versus time at different points from the first 5 order reduced model under constant boundary condition (extrapolation results).

图 9 (网络版彩图) 时变边界条件(左边温度均匀周期变化)5 阶降阶模型与精确解比较(内插结果)

Figure 9 (Color online) Temperature versus time at different points from the first 5 order reduced model under time-varying boundary condition 3 (interpolation results).

图 10 (网络版彩图) 时变边界条件(左边温度均匀周期变化)5 阶降阶模型与精确解比较(外插结果)

Figure 10 (Color online) Temperature versus time at different points from the first 5 order reduced model under time-varying boundary condition 4 (extrapolation results).

$$\frac{\lambda_i}{\sum_k \lambda_k}, i=1, 2, \dots, 20, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_{20} \geq 0.$$

由图 13 可以看出, 第 6 阶模态所占的特征值比重约为 5.677×10^{-9} , 第 9 阶模态所占的特征值比重约为 2.7267×10^{-13} , 已经足够小.

图 14 给出各阶模态所对应的相对截断误差, 如式(18)所示, 前 i 阶模态所对应的相对截断误差为

$$\varepsilon_i = \frac{\sum_{k=i+1}^{20} \lambda_k}{\sum_j \lambda_j}, i=1, 2, \dots, 19.$$

由图 14 可以看出, 前 5 阶模态捕捉了全阶模型高达

99.9999994% 的能量. 前 8 阶模态捕捉了全阶模型高达 99.9999999997% 的能量. 下面分别取前 5 阶模态 $\Phi_5 = [\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_5]$ 和前 8 阶模态 $\Phi_8 = [\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_8]$ 进行降阶分析, 取机翼中心点(坐标为(450, 0, 400) mm)作为参考点.

(1) $t=1, 2, 3, \cdots, 100$ s 的温度值(内插值问题), 结果如图 15 所示;

(2) 左边温度为周期变化

$$T = (500(1 - \cos \omega t) + 230) \text{ K}$$

(其中 $\omega = \pi/18$) 时, $t=1, 2, 3, \cdots, 100$ s 的温度值(一边界时变插值问题), 结果如图 16 所示;

(3) 左边温度为周期变化:

$$T = (500(1 - \cos \omega t) + 230) \text{ K},$$

其中 $\omega = \pi/18$, 右边温度为周期变化:

$$T = (100(1 - \cos \omega t) + 230) \text{ K},$$

$t=1, 2, 3, \cdots, 100$ s 的温度值(双边界时变插值问题), 结果如图 17 所示.

图 11 (网络版彩图)时变边界条件(左边温度局部集中且集中位置随时间变化)5 阶降阶模型与精确解比较(内插结果)

Figure 11 (Color online) Temperature versus time at different points from the first 5 order reduced model under time-varying boundary condition 5 (interpolation results).

图 12 (网络版彩图)机翼有限元计算模型

Figure 12 (Color online) FEM model of the wing.

从图 15 可以看出, 由常数边界条件下, $t=5, 10, 15, \cdots, 100$ s 时刻的温度场作为瞬像矩阵 $\mathbf{A}$, 获得的前 5 阶 POD 模态矩阵 Φ_5 , 降阶模型分析结果与 ANSYS 软件计算结果吻合得非常好. 从图 16 可以看出, 当机翼迎风面温度周期变化时, 由 Φ_8 降阶模型所得的结果, 比由 Φ_5 降阶模型所得的结果更逼近于用 ANSYS 软件计算的结果. 从图 17 可以看出, 当机翼迎风面温度和背风面温度都周期变化时, 由 Φ_8 降阶模型所得的结果, 比由 Φ_5 降阶模型所得的结果, 更明显地逼近于 ANSYS 结果.

图 18 给出了求解降阶模型(式(16), (17))及最后的温度结果(式(14))所花费计算时间与模态个数的关系. 计算是在主频为 3 GHz、内存为 4 Gb 的 PC 机上进行的, 运行文件采用 Matlab 程序编写. 从图 18 可以看出, 虽然局部上相邻模态个数所对应的降阶模

图 13 (网络版彩图)特征值比重与模态个数的关系

Figure 13 (Color online) Proportion of each eigenvalue to the sum of all eigenvalues.

图 14 (网络版彩图)求解误差与模态个数的关系

Figure 14 (Color online) Relative truncation error versus the number of POD modes.

型的求解时间会因各自矩阵特点出现波动,但总体趋势上,采用的模态个数越多,求解相应的降阶模型所消耗的时间也越多.这是由于采用的模态个数越多,待求解的微分方程组也越大,故相应地计算时间也越多.

算例 3 钢板瞬态传热问题

第 3 个分析算例是关于钢板的传热问题,其几何参数、物性参数及常数边界条件如下:钢板长 50 cm,宽 50 cm. 板的密度 $\rho=7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 比热 $c=460 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$, 导热系数 $k_x=k_y=50 \text{ W/(m } ^\circ\text{C)}$. 内含热源项,空间分布为 $S=2x+y+40 \text{ W/m}^3$. 板的初始温度为 20°C ,

图 15 (网络版彩图)机翼常数边界条件 5 阶降阶模型与精确解比较

Figure 15 (Color online) Temperature versus time at different points from the first 5 order reduced model under constant boundary condition for the wing.

图 16 (网络版彩图)机翼迎风面温度周期变化时 5 阶、8 阶降阶模型与精确解比较

Figure 16 (Color online) Temperature versus time at different points from the first 5, 8 order reduced models under time-varying boundary condition 2 for the wing.

图 17 (网络版彩图)机翼迎风面与背风面温度都周期变化时 5 阶、8 阶降阶模型与精确解比较

Figure 17 (Color online) Temperature versus time at different points from the first 5, 8 order reduced models under time-varying boundary condition 3 for the wing.

图 18 (网络版彩图)计算时间与模态个数的关系

(a) 机翼迎风面温度周期变化时; (b) 机翼迎风面与背风面温度都周期变化时

Figure 18 (Color online) Computational time versus the number of POD modes. (a) under time-varying boundary condition 2 for the wing; (b) under time-varying boundary condition 3 for the wing.

将板的左边界置于 500°C 的温度场中, 右端置于温度为 1120°C 的加热炉, 其表面传热系数为 $h=125\text{ W}/(\text{m}^2\text{ }^{\circ}\text{C})$, 下端有 $q=30000\text{ W}/(\text{m}^2)$ 的热流密度流出, 上端绝热. 图 19 给出了钢板热分析的常数边界条件, 图 20 给出其有限元模型, 该模型由 441 个节点、400 个四边形单元组成.

用有限元法计算出该常数边界条件下, 时间 $t=500, 1000, 1500, \dots, 20000\text{ s}$ (总计 40 个) 时刻的节点温度作为 40 个快照向量, 构成瞬像矩阵 $\mathbf{A}$, 代入 (9)–(11) 式, 计算 POD 模态向量 $\varphi_j, j=1, 2, \dots, 40$.

图 21 给出了钢板的各阶模态所对应的特征值比重. 图 22 给出各阶模态所对应的相对截断误差. 由图 21 可以看出, 从第 7 阶模态开始, 其特征值所占比重就已经非常小, 大约为 9.1548×10^{-12} . 由图 22 可以看

图 19 钢板常数边界条件

Figure 19 Constant boundary conditions of the steel plate.

图 20 (网络版彩图) 钢板有限元计算模型

Figure 20 (Color online) FEM model of the steel plate.

出, 前 6 阶模态捕捉了全阶模型高达 99.99999997% 的能量. 故取前 6 阶模态的降阶模型足以准确表达全阶模型.

取 POD 模态矩阵 $\Phi=[\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_6]$. 用 $\mathbf{T}=\Phi\alpha$ 分别降阶分析下列情况, 并计算相应温度场(取图 20 中的 A, B, C, D, E 点作为参考点).

(1) $t=100, 200, 300, \dots, 20000\text{ s}$ 的温度值(内插值问题), 结果如图 23 所示;

(2) 左边温度为周期变化 $T=500(1-\cos\omega t)^{\circ}\text{C}$, 下边热流密度周期变化

$$q=-30000(1-\cos\omega t)\text{ W}/\text{m}^2,$$

其中 $\omega=\pi/4000$ 时, $t=100, 200, 300, \dots, 20000\text{ s}$ 的温度值(时变内插值问题), 结果如图 24 所示;

(3) 左边温度为周期变化

$$T=500(1-\cos\omega t)^{\circ}\text{C},$$

其中 $\omega=\pi/4000$, 下边热流密度局部集中, 且集中位置

图 21 (网络版彩图) 特征值比重与模态个数的关系

Figure 21 (Color online) Proportion of each eigenvalue to the sum of all eigenvalues.

图 22 (网络版彩图) 求解误差与模态个数的关系

Figure 22 (Color online) Relative truncation error versus the number of POD modes.

随时间变化, 如图 25 所示, 即将 0.5 m 长的下边界 5 等份, 当 $t \in [0, 4000]$ s 时, 仅在 $x \in [0, 0.1]$ 处有 $q=40000$ 的热流密度流出, 在 $x \notin [0, 0.1]$ 的其他位置绝热; 当 $t \in (4000, 8000]$ s 时, 仅在 $x \in [0.1, 0.2]$ 处有 $q=-12000000x^2+36000000x-240000$ 的热流密度流出, 在 $x \notin [0.1, 0.2]$ 的其他位置绝热; 依次类推. 求 $t=100, 200, 300, \dots, 20000$ s 的温度值(非均匀时变内插值问题), 结果如图 26 所示.

从图 23 可以看出, 由常数边界条件下, $t=500, 1000, 1500, \dots, 20000$ s 时刻的温度场作为瞬态矩阵 A, 获得的前 6 阶降阶模型分析结果与 ANSYS 软件计算结果吻合得非常好. 从图 24 可以看出, 当钢板

图 23 (网络版彩图)钢板常数边界条件 6 阶降阶模型与精确解比较

Figure 23 (Color online) Temperature versus time at different points from the first 6 order reduced model under constant boundary condition for the steel plate.

图 24 (网络版彩图)钢板时变边界(温度和热流密度都均匀周期变化时)6 阶降阶模型与精确解比较

Figure 24 (Color online) Temperature versus time at different points from the first 6 order reduced model under time-varying boundary condition 2 for the steel plate.

左边温度和下边热流密度都均匀周期变化时, 由常数边界前 6 阶模态矩阵降阶分析均匀周期时变问题, 所得结果与 ANSYS 软件分析结果吻合得很好. 从图 26 可以看出, 当钢板左边温度均匀周期变化, 下边热流密度局部集中且集中位置随时间变化时, 由常数边界前 6 阶模态矩阵降阶分析该问题, 所得内部节点(如节点 B)及光滑热流边界处(如节点 A)的结果

图 25 (网络版彩图)钢板下边界所施加热流密度示意图

Figure 25 (Color online) Heat flux at the bottom of the steel plate (case 3).

图 26 (网络版彩图)钢板时变边界(温度均匀周期变化、热流密度局部集中且集中位置随时间变化时)6 阶降阶模型与精确解比较

Figure 26 (Color online) Temperature versus time at different points from the first 6 order reduced model under time-varying boundary condition 3 for the steel plate.

与 ANSYS 软件分析结果吻合得很好, 然而, 对于热流出现集中且集中位置随时间变化的边界点(如节点 C, E)及对流边界(如节点 D), 结果误差较大. 需要重新选取解构成瞬像矩阵的基态时间点.

5 结论

本文提出了一种用常数边界条件建立的瞬态热传导问题的特征正交分解(POD)降阶模态, 对时变边界条件瞬态热传导问题进行降阶分析的方法. 相同求解域常数边界条件下建立的 POD 模态矩阵, 通过降阶处理, 不仅可对同一边界条件下的未知时刻的温度场进行预测分析, 也可对光滑时变边界条件下

的温度场进行模拟分析. 采用的模态个数越多, 求解精度越高. 该方法一方面可将数千个自由度的问题降阶为几个自由度的问题进行分析, 另一方面, 用于降阶 POD 模态矩阵只计算一次, 可节省大量的计算时间和存储空间, 这在气动热力学等需实时控制和快速计算的领域中具有很重要发展前景.

本文方法仅适用于一般光滑时变边界条件情况, 对于某一时段在某处有热流量集中, 在另一时段另一处出现热流量集中的时变边界情况, 常数边界条件下建立的基本模态矩阵可以比较精确地预测和拟合内部节点, 但对于边界节点, 求解误差较大, 需要重新选取解构成瞬像矩阵的基态时间点, 如何选取有待于进一步研究.

参考文献

- Gao X W, Peng H F, Liu J. A boundary-domain integral equation method for solving convective heat transfer problems. *Int J Heat Mass Transfer*, 2013, 63: 183–190
- Hu J X, Gao X W. Development of complex-variable differentiation method and its application in isogeometric analysis. *Austr J Mech Eng*, 2013, 11(1): 37–43
- Gao X W, Hu J X, Cui M. A mdbem based on row elimination-back-substitution method (in Chinese). *Chin J Theor Appl Mech*, 2012, 44(2): 361–368 [高效伟, 胡金秀, 崔苗. 基于行消元回代法的多域边界元分析方法. *力学学报*, 2012, 44(2): 361–368]
- Gao X W, Chen P C, Tang L. Deforming mesh for computational aeroelasticity using a nonlinear elastic boundary element method. *AIAA J*, 2002, 40(8): 1512–1517
- Holmes P, Lumley J L, Berkooz G. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems, and Symmetry*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996
- Chatterjee A. An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Curr Sci*, 2000, 78(7): 808–817
- Kunisch K, Volkwein S. Galerkin proper orthogonal decomposition methods for a general equation in fluid dynamics. *Siam J Numer Anal*, 2002, 40(2): 492–515
- Mignolet M P, Radu A G, Gao X W. Validation of reduced order modeling for the prediction of the response and fatigue life of panels subjected to thermo-acoustic effects. In: *The Proceedings of VIII International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics*. Southampton: University of Southampton, 2003
- Tang L, Gao X W. POD/RSM-Based S/Hypersonic aerodynamic module for TPS/RLV structural design and optimization: X-34 Case Study. In: *The Proceedings of the 43rd aerospace sciences meeting and exhibit*. AIAA Paper, 2005, AIAA-2005-0839
- Chen P C, Liu D D, Tang L, et al. Aerothermodynamic optimization of hypersonic vehicle TPS design by POD-RSM-Based approach. AIAA Paper, 2006, AIAA-2006-0777
- Ma X, Karniadakis G E, Park H, et al. DPIV-driven flow simulation: A new computational paradigm. *Proc R Soc London Ser A-Math Phys Eng Sci*, 2003, 459(2031): 547–565
- Utturkar Y, Zhang B N, Shyy W. Reduced-order description of fluid flow with moving boundaries by proper orthogonal decomposition. *Int J Heat Fluid Flow*, 2005, 26(2): 276–288
- Smith T R, Moehlis J, Holmes P. Low-dimensional modelling of turbulence using the proper orthogonal decomposition: A tutorial. *Nonlinear Dyn*, 2005, 41(1-3): 275–307
- Ravindran S S. A reduced-order approach for optimal control of fluids using proper orthogonal decomposition. *Int J Numer Methods Fluids*, 2000, 34(5): 425–448
- Atwell J A, King B B. Proper orthogonal decomposition for reduced basis feedback controllers for parabolic equations. *Math Comput Modell*, 2001, 33(1-3): 1–19
- Leibfritz F, Volkwein S. Reduced order output feedback control design for PDE systems using proper orthogonal decomposition and nonlinear semidefinite programming. *Linear Algebra Appl*, 2006, 415(2-3): 542–575
- Ly H V, Tran H T. Modeling and control of physical processes using proper orthogonal decomposition. *Math Comput Modell*, 2001, 33(1-3):

223–236

- 18 Amabili M, Sarkar A, Paidoussis M P. Chaotic vibrations of circular cylindrical shells: Galerkin versus reduced-order models via the proper orthogonal decomposition method. *J Sound Vib*, 2006, 290(3-5): 736–762
- 19 Han S, Feeny B. Application of proper orthogonal decomposition to structural vibration analysis. *Mech Syst Signal Process*, 2003, 17(5): 989–1001
- 20 Krysl P, Lall S, Marsden J E. Dimensional model reduction in nonlinear finite element dynamics of solids and structures. *Int J Numer Methods Eng*, 2001, 51(4): 479–504
- 21 Liang Y C, Lee H P, Lim S P, et al. Proper orthogonal decomposition and its applications-Part I: Theory. *J Sound Vib*, 2002, 252(3): 527–544
- 22 Fic A, Bialecki R A, Kassab A J. Solving transient nonlinear heat conduction problems by proper orthogonal decomposition and the finite-element method. *Numer Heat Transfer, Part B: Fundam*, 2005, 48(2): 103–124
- 23 Bialecki R A, Kassab A J, Fic A. Proper orthogonal decomposition and modal analysis for acceleration of transient FEM thermal analysis. *Int J Numer Methods Eng*, 2005, 62(6): 774–797
- 24 Aquino W. An object-oriented framework for reduced-order models using proper orthogonal decomposition (POD). *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2007, 196: 4375–4390
- 25 Binion D, Chen X L. A Krylov enhanced proper orthogonal decomposition method for efficient nonlinear model reduction. *Finite Elements Anal Design*, 2011, 47: 728–738
- 26 刘浩, 徐敏, 蔡天星, 等. 一种求解瞬态传热问题的新方法. 见: 第十二届全国空气弹性学术交流会会议论文集. 北京: 中国科学院力学研究所, 2011. 2011–2174
- 27 王勖成. 有限单元法. 北京: 清华大学出版社, 2003
- 28 Sirovich L. Turbulence and the dynamics of coherent structures: Part I-III. *Q Appl Math*, 1987, 45(3): 561–590

Reduced order model analysis method via proper orthogonal decomposition for transient heat conduction

HU JinXiu¹, ZHENG BaoJing^{1,2} & GAO XiaoWei^{1,2*}

¹ School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

² State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China

This paper presents a reduced order analysis method for transient heat conduction problems with time-varying boundary conditions by using the proper orthogonal decomposition (POD) modes obtained from the results of using constant boundary conditions. This method can perform interpolation and extrapolation analysis for temperature field at unknown times. First, POD modes are developed by calculating eigenvectors of an autocorrelation matrix composed of snapshots which are clustered by the given results obtained from experiments, finite element method (FEM) or other numerical methods for transient heat transfer problem with constant boundary conditions. Then, the reduced order modeling (ROM) for problems with time-varying boundary condition is obtained by projecting the finite element discrete format on reduced POD modes determined by eigen-value error analysis of the original POD modes. One feature is that the POD modes need not to be reformed when the boundary conditions are time-varying, and one can use a few modes to capture as much as 99% of energy of the whole order model. Examples show that the method developed in this paper is correct and effective. The same POD modes can accurately analyze transient heat conduction problems with the same geometric domain but variety of smooth and time-varying boundary conditions. The method has a good prospect in aero-thermodynamics analysis that needs real-time control or fast calculation.

proper orthogonal decomposition, reduced order model, transient heat conduction, POD modes

PACS: 44.05.+e, 02.70.Dh, 02.10.Yn

doi: 10.1360/SSPMA2013-00041