β -变换的常返率问题

危纯¹, 吴敏², 王帅灵^{2*}

1. 中南财经政法大学统计与数学学院, 武汉 430073;

2. 华南理工大学数学学院, 广州 510641

E-mail: hbxt1986v@163.com, wumin@scut.edu.cn, scslwang@scut.edu.cn

收稿日期: 2017-05-13; 接受日期: 2017-09-27; 网络出版日期: 2018-06-07; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11601161 和 11771153)、广东省自然科学基金 (批准号: 2017A030323164) 和广东省普通高校青年创新人才 (批准号: 2016KQNCX013) 资助项目

摘要 设 $([0, 1), T_\beta)$ 是 β -变换动力系统. 对 $x \in [0, 1)$, 记 $\tau_n^\beta(x)$ 为 x 首次返回到包含 x 的 n 阶柱集的时间. 本文研究集合

$$\left\{x \in [0, 1) : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n^\beta(x)}{\log n} = \alpha, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n^\beta(x)}{\log n} = \gamma\right\}$$

的 Hausdorff 维数, 其中 $0 \leq \alpha \leq \gamma \leq +\infty$, 并证明了当 $\alpha < 1$ 时, 这个集合的 Hausdorff 维数是 0; 当 $\alpha \geq 1$ 时, 这个集合的 Hausdorff 维数就是 1. 随后, 本文还考虑了首次返回到球的维数谱, 得到了类似的 0-1 律.

关键词 β -展式 常返率 Hausdorff 维数

MSC (2010) 主题分类 28A80

1 引言

设 (X, d) 是一个度量空间, $T: X \rightarrow X$ 是概率空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上的一个保测变换. 经典的 Poincaré 常返定理告诉我们

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(T^n x, x) = 0, \quad \mu\text{-几乎所有 } x \in X \text{ (以后简记为 a.e.)}.$$

也就是说, 几乎所有的点都是常返的. 随后, Boshernitzan^[1] 将结果改进为

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{1/\alpha} d(T^n x, x) < \infty, \quad \mu\text{-a.e.},$$

这里的 α 本质上是空间的维数.

英文引用格式: Wei C, Wu M, Wang S L. The recurrence rates of β -transformations (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 987–998, doi: 10.1360/SCM-2017-0300

在动力系统的相关研究中, 常返率是研究轨道行为的一个重要方面. 设

$$\tau_E(x) = \inf\{k \geq 1 : T^k x \in E\}$$

是点 $x \in X$ 首次返回到集合 E 的时间, Ornstein 和 Weiss^[2] 证明了对 X 的任一有限划分 ξ , μ 为 T -不变且遍历的概率测度, 那么,

$$\mu\left\{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_{\xi_n(x)}(x)}{n} = h_\mu(\xi)\right\} = 1, \quad (1.1)$$

这里的 $\xi_n(x)$ 是 $\xi, T^{-1}(\xi), \dots, T^{-n+1}(\xi)$ 的交所构成的划分中包含 x 的那个分块, $h_\mu(\xi)$ 是 T 对 ξ 的测度熵. 根据这个结论, 我们自然会想知道 (1.1) 中的例外集到底有多大. 在 2001 年, Feng 和 Wu^[3] 研究了符号空间的情形. 设 $\Sigma = \{0, 1, \dots, m-1\}^{\mathbb{N}}$ 是有限字符的符号空间, σ 是其上的左推移算子. 柱集 $\{[0], [1], \dots, [m-1]\}$ 构成该空间的一个划分, 记作 ξ . 设 $\tau_n(x)$ 是 $x \in \Sigma$ 首次返回到包含它的 n 阶柱集的时间. 他们证明了对任意 $0 \leq \alpha \leq \gamma \leq +\infty$, 都有

$$\dim_H \left\{x \in \Sigma : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n(x)}{n} = \alpha, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n(x)}{n} = \gamma\right\} = 1$$

(这个结论还可参见文献 [4, 5]). 文献 [3] 考虑的是以指数速度常返的问题; 文献 [6] 考虑了以多项式速度常返的问题. 最近, Kim 和 Li^[7] 研究了以任意速度常返的问题, 他们彻底解决了在符号空间中 (1.1) 的例外集的维数问题.

在本文的研究中, 我们考虑的是 (1.1) 中的例外集在 β -变换的情形. 设 $([0, 1), T_\beta)$ 是 β -变换动力系统. 记 μ_β 为 Parry 测度, 即唯一的与 Lebesgue 测度 $\mathcal{L}$ 等价的 T_β -不变测度^[8]. 对任意的 $n \geq 1$, $x \in [0, 1)$, 设 $I_n(x)$ 是包含 x 的 n 阶柱集. 所有的一阶柱集构成了 $[0, 1)$ 区间上的一个划分, 则 $h_{\mu_\beta}(\xi) = \log \beta$ (参见文献 [9]). 定义

$$\tau_n^\beta(x) = \inf\{k \geq 1 : T_\beta^k x \in I_n(x)\}.$$

由 (1.1) 可知,

$$\mu_\beta\left\{x \in [0, 1) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n^\beta(x)}{n} = \log \beta\right\} = 1.$$

设 $R_n^\beta(x) = \frac{\log \tau_n^\beta(x)}{n}$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 将 $A(R_n^\beta(x))$ 记为 $R_n^\beta(x)$ 的聚点集. Ban 和 Li^[10] 证明了, 对任意 $x \in [0, 1)$, $A(R_n^\beta(x))$ 都是一个闭区间. 设 J 是 $[0, +\infty]$ 上的任一个闭区间, 他们还证明了

$$\dim_H \{x \in [0, 1) : A(R_n^\beta(x)) = J\} = 1.$$

换句话说讲, 对任意 $0 \leq \alpha \leq \gamma \leq +\infty$, 都有

$$\dim_H \left\{x \in [0, 1) : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n^\beta(x)}{n} = \alpha, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n^\beta(x)}{n} = \gamma\right\} = 1.$$

上式考虑的是以指数速度常返的情形, 本文考虑的是以多项式速度常返的情形. 定义

$$E_{\alpha, \gamma}^\beta = \left\{x \in [0, 1) : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n^\beta(x)}{\log n} = \alpha, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n^\beta(x)}{\log n} = \gamma\right\}.$$

下面这个定理说明了 $E_{\alpha, \gamma}^\beta$ 的 Hausdorff 维数要么是 0 要么是 1.

定理 1.1 任给 $0 \leq \alpha \leq \gamma \leq +\infty$, 我们有

$$\dim_H E_{\alpha, \gamma}^\beta = \begin{cases} 1, & \text{如果 } \alpha \geq 1, \\ 0, & \text{如果 } \alpha < 1. \end{cases}$$

设 $P_n^\beta(x) = \frac{\log \tau_n^\beta(x)}{\log n}$ 且 $A(P_n^\beta(x))$ 是 $P_n^\beta(x)$ 的聚点集. 我们可以得到下面这个性质.

性质 1.1 对任意 $x \in [0, 1)$, $A(P_n^\beta(x))$ 都是一个闭区间.

由性质 1.1 可知, 定理 1.1 等价于对任意闭区间 $[\alpha, \gamma] \subset [0, +\infty]$, 都有

$$\dim_H \{x \in [0, 1) : A(P_n^\beta(x)) = [\alpha, \gamma]\} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } \alpha \geq 1, \\ 0, & \text{如果 } \alpha < 1. \end{cases}$$

Barreira 和 Saussol^[11] 将 (1.1) 中的 $\xi_n(x)$ 换成了球 $B(x, r)$, 并定义

$$\tau_r(x) = \inf\{k \geq 1 : T^k x \in B(x, r)\}.$$

设 $R_r(x) = \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r}$, 点 x 的下和上常返率分别定义为

$$\underline{R}(x) = \liminf_{r \rightarrow 0} R_r(x), \quad \overline{R}(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} R_r(x).$$

他们证明了对某些特殊的测度 μ , 有

$$\underline{R}(x) = \underline{d}_\mu(x), \quad \overline{R}(x) = \overline{d}_\mu(x), \quad \mu\text{-a.e.},$$

其中 $\underline{d}_\mu(x)$ 和 $\overline{d}_\mu(x)$ 分别表示点 $x \in X$ 的下和上点态维数.

我们用 $\tau_r^\beta(x)$ 、 $R_r^\beta(x)$ 、 $\underline{R}^\beta(x)$ 和 $\overline{R}^\beta(x)$ 表示上述概念对应到动力系统 $([0, 1), T_\beta)$ 的情形. 由于 μ_β 是指数混的 (参见文献 [12]) 且动力系统 $([0, 1), T_\beta)$ 满足文献 [13, 定理 3] 中的条件, 应用这个定理和 $\underline{d}_{\mu_\beta}(x) = \overline{d}_{\mu_\beta}(x) = 1$ $\mathcal{L}$ -a.e. $x \in [0, 1)$ 这个事实, 我们有

$$\mu_\beta \left\{ x \in [0, 1) : \lim_{r \rightarrow 0} R_r^\beta(x) = 1 \right\} = 1.$$

设 $A(R_r^\beta(x))$ 是 $R_r^\beta(x)$ 的聚点集. Ban 和 Li^[10] 证明了对任意 $x \in [0, 1)$, $A(R_r^\beta(x))$ 都是一个闭区间. 设 J 是 $[0, +\infty]$ 上任一个闭区间, 他们还证明了

$$\dim_H \{x \in [0, 1) : A(R_r^\beta(x)) = J\} = 1.$$

也就是说, 对任意 $0 \leq \alpha \leq \gamma \leq +\infty$, 都有

$$\dim_H \left\{ x \in [0, 1) : \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^\beta(x)}{-\log r} = \alpha, \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^\beta(x)}{-\log r} = \gamma \right\} = 1.$$

本文同样也考虑对球的首次返回时间. 定义

$$G_{\alpha, \gamma}^\beta = \left\{ x \in [0, 1) : \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^\beta(x)}{\log(-\log r)} = \alpha, \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^\beta(x)}{\log(-\log r)} = \gamma \right\}.$$

下面这个定理说的是集合 $G_{\alpha, \gamma}^\beta$ 的 Hausdorff 维数要么是 0 要么是 1.

定理 1.2 对任意 $0 \leq \alpha \leq \gamma \leq +\infty$, 都有

$$\dim_H(G_{\alpha,\gamma}^\beta) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } \alpha \geq 1, \\ 0, & \text{如果 } \alpha < 1. \end{cases}$$

设 $P_r^\beta(x) = \frac{\log \tau_r^\beta(x)}{\log(-\log r)}$ 且 $A(P_r^\beta(x))$ 表示 $P_r^\beta(x)$ 在 $r \rightarrow 0$ 时的聚点集.

性质 1.2 对任意 $x \in [0, 1)$, $A(P_r^\beta(x))$ 都是一个闭区间.

自然, 由性质 1.2 可知, 定理 1.2 等价于说对任意闭区间 $[\alpha, \gamma] \subset [0, +\infty]$, 都有

$$\dim_H\{x \in [0, 1) : A(P_r^\beta(x)) = [\alpha, \gamma]\} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } \alpha \geq 1, \\ 0, & \text{如果 } \alpha < 1. \end{cases}$$

2 预备知识

本节主要介绍 β -展式的一些基本性质和记号. 实数的 β -展式的概念由 Rényi^[8] 首次引入. 任给 $\beta > 1$, 设

$$T_\beta(x) = \beta x - [\beta x], \quad x \in [0, 1),$$

其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分. 对任意 $n \geq 1$, 令

$$\varepsilon_n(x, \beta) = [\beta T_\beta^{n-1}(x)] \in \mathbb{N},$$

那么, 每一个 $x \in [0, 1)$ 都可以表示为

$$x = \frac{\varepsilon_1(x, \beta)}{\beta} + \frac{\varepsilon_2(x, \beta)}{\beta^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_n(x, \beta)}{\beta^n} + \cdots,$$

这就是点 x 的 β -展式. 序列 $\{\varepsilon_n(x, \beta)\}_{n \geq 1}$ 称为 x 的符号序列, 记为 $\varepsilon(x, \beta)$, 也就是说,

$$\varepsilon(x, \beta) = \varepsilon_1(x, \beta)\varepsilon_2(x, \beta) \cdots \varepsilon_n(x, \beta) \cdots.$$

记 $I_n(x) = \{y \in [0, 1) : \varepsilon_i(y, \beta) = \varepsilon_i(x, \beta), 1 \leq i \leq n\}$ 为包含 x 的 n 阶柱集. 由 x 的 β -展式的定义知,

$$|I_n(x)| \leq \beta^{-n}. \quad (2.1)$$

我们知道, 当 β 是整数时, Lebesgue 测度是 T_β -不变的, 也是遍历的. 当 β 不是整数时, Rényi^[8] 证明了存在唯一与 Lebesgue 测度等价的 T_β -不变测度 μ_β , 并且 β 变换对 μ_β 是遍历的, 也是强混的.

由 β 展式的定义可知, 当 β 为整数时, $\varepsilon(x, \beta)$ 的可能取值构成的集合为 $\mathcal{A}_\beta = \{0, 1, \dots, \beta-1\}$, 否则, $\mathcal{A}_\beta = \{0, 1, \dots, [\beta]\}$. 设 σ 是 $\mathcal{A}_\beta^\mathbb{N}$ 上的左推移算子, 则 $(\mathcal{A}_\beta^\mathbb{N}, \sigma)$ 构成符号动力系统. 对这个符号空间中的任意两个词 w 和 v , 记 wv 为词 w 和 v 的粘贴. 记 $w|_n$ 为序列 $w \in \mathcal{A}_\beta^\mathbb{N}$ 的前 n 项所构成的词. 有限词 u^n 和无限词 u^∞ 分别表示 $\underbrace{uu \cdots u}_n$ 和 $uu \cdots uu \cdots$. 我们用 Σ_β 表示 $\mathcal{A}_\beta^\mathbb{N}$ 中允许序列全体, 即

$$\Sigma_\beta = \{w \in \mathcal{A}_\beta^\mathbb{N} : \text{存在 } x \in [0, 1) \text{ 使得 } \varepsilon(x, \beta) = w\}.$$

设 Σ_β^n 是长度为 n 的允许词全体, 即

$$\Sigma_\beta^n = \{w \in \mathcal{A}_\beta^n : \text{存在 } x \in [0, 1) \text{ 使得 } \varepsilon(x, \beta)|_n = w\}.$$

当 β 是整数时, Σ_β 就是 $\mathcal{A}_\beta^\mathbb{N}$. 当 β 不是整数时, Parry^[14] 用数字 1 的 β -展式 $\varepsilon(1, \beta)$ 来刻画了 Σ_β . 如果序列 $\varepsilon(1, \beta)$ 中含有无穷多个非零元, 则称 $\varepsilon(1, \beta)$ 是无限的, 否则, 我们就说它是有限的. 对有限的情形, $\varepsilon(1, \beta) = \varepsilon_1(1, \beta) \cdots \varepsilon_n(1, \beta) 0^\infty$, 其中 $\varepsilon_n(1, \beta) \neq 0$, 我们用

$$\varepsilon^*(1, \beta) = \varepsilon_1(1, \beta) \cdots \varepsilon_{n-1}(1, \beta) (\varepsilon_n(1, \beta) - 1)^\infty$$

来表示此时 1 的无限符号序列. 对 1 的符号序列本来就是无限时, 我们也用 $\varepsilon^*(1, \beta)$ 表示 1 的无限符号序列.

对任意 $w \in \Sigma_\beta^n$, 称

$$I_n(w) = \{x \in [0, 1) : \varepsilon_1(x, \beta) = w_1, \varepsilon_2(x, \beta) = w_2, \dots, \varepsilon_n(x, \beta) = w_n\}$$

是一个 n 阶柱集, 这是一个左闭右开的区间. 如果 $|I_n(w)| = \beta^{-n}$, 我们就称 $I_n(w)$ 是满的.

我们用 $\prec$ 和 $\preceq$ 来表示 $\mathcal{A}_\beta^\mathbb{N}$ 上的字母序. 设 $w, w' \in \mathcal{A}_\beta^\mathbb{N}$, 那么, $w \prec w'$ 表示存在 $n \geq 1$ 使得对任意 $j < n$, 都有 $w_j < w'_j$, $w_j = w'_j$; $w \preceq w'$ 表示 $w \prec w'$ 或者 $w = w'$.

性质 2.1^[14] 设 $\beta > 1$ 是任意给定的实数, 那么 $w \in \Sigma_\beta$ 当且仅当

$$\sigma^k(w) \prec \varepsilon^*(1, \beta), \quad \forall k \geq 0.$$

设 S_β 是集合 Σ_β 的闭包. 显然, 当 β 是整数时, $S_\beta = \mathcal{A}_\beta^\mathbb{N}$, 否则 $(S_\beta, \sigma|_{S_\beta})$ 是 $(\mathcal{A}_\beta^\mathbb{N}, \sigma)$ 的子系统, 其中 $\sigma|_{S_\beta}$ 表示 σ 在 S_β 上的限制. 由性质 2.1 可知, 下面的推论成立.

推论 2.1^[14] 设 $\beta > 1$ 是任意给定的实数, 则

$$S_\beta = \{w \in \mathcal{A}_\beta^\mathbb{N} : \sigma^k(w) \preceq \varepsilon^*(1, \beta), \forall k \geq 0\}.$$

性质 2.2^[14] 函数 $\beta \mapsto \varepsilon^*(1, \beta)$ 关于 $\beta > 1$ 是单调递增的. 进一步, 如果 $1 < \beta_1 < \beta_2$, 那么,

$$\Sigma_{\beta_1} \subset \Sigma_{\beta_2}, \quad \Sigma_{\beta_1}^n \subset \Sigma_{\beta_2}^n \quad \text{且} \quad S_{\beta_1} \subset S_{\beta_2}.$$

在本文的研究中, 我们需要借助文献 [15] 中对 $\beta > 1$ 的分类. 记

$$A_0 = \left\{ \beta \in (1, +\infty) : \limsup_{n \rightarrow \infty} \ell_n(\beta) < \infty \right\},$$

其中 $\ell_n(\beta) = \sup\{k \geq 1 : \varepsilon_{n+j}^*(1, \beta) = 0, 1 \leq j \leq k\}$, $n \geq 0$. 我们知道 A_0 具有满的 Hausdorff 维数^[16] 而且在 $(1, \infty)$ 中稠密^[14]. 下面这个引理在我们的证明中起到了很重要的作用.

引理 2.1^[15] (i) 设 $\beta > 1$ 是一个实数, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$ 是一个允许词. 记 $M_n(\beta) = \max_{1 \leq k \leq n} \{\ell_k(\beta)\}$, 则对任意 $m > M_n(\beta)$, 任意允许序列 ξ , 都有 $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n 0^m \xi$ 也是一个允许序列.

(ii) $\beta \in A_0$ 当且仅当存在常数 C , 使得对任意 $x \in [0, 1)$, 任意 $n \geq 1$, 都有

$$C\beta^{-n} \leq |I_n(x)| \leq \beta^{-n}.$$

令 $\beta \in A_0$, $M_\beta = \max\{\ell_n(\beta) : n \geq 1\} + 2$, $N \geq 2M_\beta$. 记

$$W_N = \{0^{M_\beta} w 0^{M_\beta} : w \in \Sigma_\beta^{N-2M_\beta}\}.$$

用 $W_N^\mathbb{N}$ 表示形如 $u_1 u_2 \cdots u_n \cdots$ 的序列全体, 其中 $u_n \in W_N$, $n \geq 1$. 定义

$$F_{N,m}^\beta = \{x \in [0, 1) : \varepsilon(x, \beta) = 0^{M_\beta} w_1 0^{M_\beta} 0^{M_\beta} w_2 0^{M_\beta} \cdots 0^{M_\beta} w_n 0^{M_\beta} \cdots \in W_N^\mathbb{N}, 0^m \notin w_n, n \geq 1\}.$$

引理 2.2^[10] 设 $\beta \in A_0$. 对任意 $N > 2M_\beta$, $2M_\beta < m \leq N - 2M_\beta$, 有

$$\dim_H F_{N,m}^\beta \geq s_{N,m}^\beta := 1 - \frac{2M_\beta}{N} - \frac{N - 2M_\beta}{mN} \left(1 - \frac{\log(\beta - 1)}{\log \beta} \right).$$

对 $\beta \notin A_0$, 我们需要利用文献 [10] 中的逼近方法.

首先, 定义一个从 S_β 到 $[0, 1]$ 的投影函数 π_β :

$$\pi_\beta(w) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{w_i}{\beta^i}, \quad w = w_1 w_2 \cdots \in S_\beta.$$

显然, π_β 除了可数个点外是一一对应的. 容易知道 π_β 是连续的并且 $\pi_\beta \circ \sigma = T_\beta \circ \pi_\beta$.

设 $1 < \beta' < \beta$. 由性质 2.2 可知, $\Sigma_{\beta'} \subset \Sigma_\beta$, 从而, $H_{\beta'}^{\beta'} = \pi_{\beta'}(\Sigma_{\beta'})$ 是 $\pi_\beta(\Sigma_\beta) = [0, 1)$ 上的 Cantor 集且 $x \in H_{\beta'}^{\beta'} \Leftrightarrow \varepsilon(x, \beta) \in \Sigma_{\beta'}$. 定义函数 $h: H_{\beta'}^{\beta'} \rightarrow [0, 1)$ 为 $h(x) = \pi_{\beta'}(\varepsilon(x, \beta))$. 对任意 $m \geq 1$, 定义

$$F_m^\beta = \{x \in [0, 1) : 0^m \notin \varepsilon(x, \beta)\},$$

其中 $0^m \notin \varepsilon(x, \beta)$ 表示 0^m 不出现在 $\varepsilon(x, \beta)$ 中.

引理 2.3^[10] (i) 对任意 $x \in H_{\beta'}^{\beta'}$, 有 $\varepsilon(h(x), \beta') = \varepsilon(x, \beta)$;

(ii) 函数 h 是双射且在 $H_{\beta'}^{\beta'}$ 上严格单调递增;

(iii) 函数 h 在 $H_{\beta'}^{\beta'}$ 上连续;

(iv) 如果 $\beta' \in A_0$, 记 $M = \max\{\ell_n(\beta') : n \geq 1\}$, 那么 h 在 $H_{\beta'}^{\beta'}$ 上 Hölder 连续, 并且对任意 $x, y \in H_{\beta'}^{\beta'}$, 都有

$$|h(x) - h(y)| \leq 2\beta'^{M+1}|x - y|^{\frac{\log \beta'}{\log \beta}};$$

(v) 如果 $\beta' \in A_0$, 记 $M = \max\{\ell_n(\beta') : n \geq 1\}$, $m > M$, 那么, 对任意 $x, y \in H_{\beta'}^{\beta'} \cap F_m^\beta$, 都有

$$|h(x) - h(y)| \geq \beta'^{-(m+1)}|x - y|^{\frac{\log \beta'}{\log \beta}}.$$

3 定理的证明

本节将会证明定理 1.1、性质 1.1 和定理 1.2. 性质 1.2 的证明与性质 1.1 的完全类似, 因此将这个过程的省略.

3.1 定理 1.1 零维部分的证明

引理 3.1^[17] 设 ϕ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个正函数, 则对任意 $\beta > 1$, 都有

$$\dim_H \{x \in [0, 1) : |T_\beta^n x - x| < \phi(n), \text{ i.o.}\} = \frac{1}{1+b}, \quad (3.1)$$

其中

$$b = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log_\beta \phi(n)}{n}.$$

引理 3.2 给定 $\alpha < 1$, 则

$$\dim_H \left\{ x \in [0, 1) : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n^\beta(x)}{\log n} \leq \alpha \right\} = 0. \quad (3.2)$$

证明 由条件 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n^\beta(x)}{\log n} \leq \alpha$ 可知, 对任意 $0 < \varepsilon < 1 - \alpha$, 存在无穷多个 n 使得 $\tau_n^\beta(x) < n^{\alpha+\varepsilon}$, 也就是说 $n > \tau_n^\beta(x)^{1/(\alpha+\varepsilon)}$. 由 $\tau_n^\beta(x)$ 的定义和 (2.1) 可知,

$$|T_{\beta}^{\tau_n^\beta(x)}(x) - x| \leq |I_n(x)| \leq \beta^{-n} < \beta^{-\tau_n^\beta(x)^{1/(\alpha+\varepsilon)}}.$$

因此, (3.2) 中的集合是 $\{x \in [0, 1) : |T_{\beta}^n(x) - x| < \beta^{-n^{1/(\alpha+\varepsilon)}}, \text{i.o.}\}$ 的子集. 由引理 3.1 知 (3.2) 成立. $\square$

给定 $\alpha < 1$. 由于 $E_{\alpha, \gamma}^\beta$ 是 (3.2) 的子集, 因此, $\dim_H E_{\alpha, \gamma}^\beta = 0$. 这样就完成了定理 1.1 零维部分的证明.

3.2 定理 1.1 在 $\beta \in A_0$ 时满维部分的证明

设 $\alpha \geq 1$. 记 $M_\beta = \max\{\ell_n(\beta) : n \geq 1\} + 2$. 在证明的过程中, 我们需要利用下面这个引理来构造 $E_{\alpha, \gamma}^\beta$ 的一个满 Hausdorff 维的子集.

引理 3.3 给定 $\beta \in A_0$. 设 $\{n_k\}_{k \geq 1}$ 和 $\{l_k\}_{k \geq 1}$ 是两个递增的自然数序列且满足

(i) $l_{k+1} \geq l_k + n_k + 2M_\beta + 1$;

(ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{kn_k}{l_k} = 0$.

记 $V(\beta, \{n_k\}, \{l_k\}) = \{x \in [0, 1) : l_{k-M_\beta} - (k+1) \leq \tau_n^\beta(x) \leq l_{k+1} \text{ 对充分大的 } n \text{ 成立且 } n_k < n \leq n_{k+1}\}$, 则 $\dim_H V(\beta, \{n_k\}, \{l_k\}) = 1$.

证明 对任意满足 $2M_\beta < m < N - 2M_\beta$ 的整数 m 和 N , 有 $\dim_H F_{N,m}^\beta \geq s_{N,m}^\beta$, 其中 $F_{N,m}^\beta$ 和 $s_{N,m}^\beta$ 的定义参见引理 2.2. 接下来要构造一个映射 $f : F_{N,m}^\beta \rightarrow V(\beta, \{n_k\}, \{l_k\}) \cap F_{3m}^\beta$, 并证明对任意 $0 < \varepsilon < 1$, f^{-1} 在 $f(F_{N,m}^\beta)$ 上都是 $(1-\varepsilon)$ -Hölder 连续的.

注意到存在自然数序列 $\{c_k\}$ 使得

$$l_k \leq N + N \sum_{i=1}^k c_i + \sum_{i=1}^k (i + M_\beta + 1) < l_k + N.$$

记

$$d_k = N + N \sum_{i=1}^k c_i + \sum_{i=1}^{k-1} (i + M_\beta + 1),$$

则

$$l_k - (k + M_\beta + 1) \leq d_k \leq l_k, \quad k > N. \quad (3.3)$$

对 $x \in F_{N,m}^\beta$, 它的 β -展式对应的符号序列为 $\varepsilon(x, \beta) = 0^{M_\beta} w_1 0^{M_\beta} \dots 0^{M_\beta} w_n 0^{M_\beta} \dots$ 且 $0^m \notin w_n$, 现在构造序列 $\{\xi^{(k)}\}$. 令

$$\xi^{(0)} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_N 0^{M_\beta} w_1 0^{M_\beta} 0^{M_\beta} w_2 0^{M_\beta} \dots 0^{M_\beta} w_n 0^{M_\beta} \dots,$$

其中 $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_N$ 是 $\varepsilon^*(1, \beta)$ 长为 N 的前缀且 $\varepsilon_1 = |\beta| \geq 1$. 由引理 2.1(i) 可知, $\xi^{(0)} \in \Sigma_\beta$. 设 k_0 是使得 $l_{k_0} > 2N$ 和 $\xi^{(k_0-1)} = \dots = \xi^{(1)} = \xi^{(0)}$ 都成立的最小整数. 将 $(\xi_i^{(k-1)})_{i \geq 1}$ 简记为 $\xi^{(k-1)}$. 假设 $\xi^{(k-1)}$ 已经定义好了 ($k \geq k_0$), 我们通过将字符串 $u_k := \xi_1^{(k-1)} \dots \xi_{n_k}^{(k-1)} 0^{M_\beta} \eta_{n_k}^{(k-1)}$ 插入到 $\xi^{(k-1)}$ 的第 d_k 和 $d_k + 1$ 个字符之间得到 $\xi^{(k)}$, 其中 $\eta_{n_k}^{(k-1)} \neq \xi_{n_k + M_\beta + 1}^{(k-1)}$, 即

$$\xi^{(k)} = (\xi_i^{(k)}) = \xi_1^{(k-1)} \dots \xi_{d_k}^{(k-1)} u_k \xi_{d_k+1}^{(k-1)} \xi_{d_k+2}^{(k-1)} \dots$$

这样就得到了一个满足 $\xi_1^{(k)} \cdots \xi_{d_k}^{(k)} = \xi_1^{(k-1)} \cdots \xi_{d_k}^{(k-1)}$ 的序列 $\{\xi^{(k)}\}_{k \geq 1}$. 将 $\{\xi^{(k)}\}_{k \geq 1}$ 的极限点记为 $\xi^* = (\xi_i^*)_{i \geq 1}$. 由引理 2.1(i) 可知, $\xi^{(k)} \in \Sigma_\beta$ 且 $\xi^* \in S_\beta$. 令

$$x^* = \pi_\beta(\xi^*) = \frac{\xi_1^*}{\beta} + \frac{\xi_2^*}{\beta^2} + \cdots + \frac{\xi_n^*}{\beta^n} + \cdots,$$

这意味着 $\varepsilon(x^*, \beta) = \xi^*$.

现在开始证明 $x^* \in V(\beta, \{n_k\}, \{l_k\}) \cap F_{3m}^\beta$. 由 (3.3) 知, 我们只需证对充分大的 n , 有

$$d_{k-M_\beta} \leq \tau_n^\beta(x^*) \leq d_{k+1}, \quad n_k < n \leq n_{k+1}.$$

首先, 对任意 $n_k < n \leq n_{k+1}$, 其中 $n_k > N$, $k \geq 1$, 由 $\xi^* = \varepsilon(x^*, \beta)$ 的定义和

$$\sigma^{d_{k+1}}(\xi^*) = \xi_1^{(k)} \cdots \xi_{n_{k+1}}^{(k)} 0^{M_\beta} \eta_{n_{k+1}}^{(k)} \cdots$$

可知 $\tau_n^\beta(x^*) \leq d_{k+1}$. 此时还需证明 $\tau_n^\beta(x^*) < d_{k-M_\beta}$ 不会发生. 事实上, 根据 ξ^* 的构造, 我们知道 $\xi_1^* \cdots \xi_n^*$ 以 $\varepsilon^*(1, \beta)$ 的前 N 个字符为前缀, 并且 $\xi_1^* \cdots \xi_n^*$ 中由 0 所构成的词的最大长度不超过 M_β , 从而可以知道 $\xi_1^* \cdots \xi_n^*$ 不会出现在任一个形如 $0^{M_\beta} w_i 0^{M_\beta}$ 的词中. 因此, $\xi_1^* \cdots \xi_n^*$ 唯一可能出现的位置只能在某个 u_i 中. 但是, 由于对任意 $n_i + M_\beta + 1 \leq n$, 都有 $\eta_{n_i}^{(i-1)} \neq \xi_{n_i + M_\beta + 1}^{(i-1)}$, 从而可知 $\xi_1^* \cdots \xi_n^*$ 不会出现在任一个满足 $1 \leq i \leq k - M_\beta$ 的 u_i 中. 因此, $\tau_n^\beta(x^*) \geq d_{k-M_\beta}$.

定义函数 $f(x) = x^*$, $x \in F_{N,m}^\beta$. 显然, f 是一个双射且

$$f(F_{N,m}^\beta) \subset V(\beta, \{n_k\}, \{l_k\}) \cap F_{3m}^\beta.$$

考虑 $f(F_{N,m}^\beta)$ 上函数 $f^{-1} : f^{-1}(x^*) = x$, 也就是说, 将词 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_N$ 和 $\{u_k\}$ 从 ξ^* 中移除. 我们说 f^{-1} 对任意 $\varepsilon > 0$ 都是 $(1 - \varepsilon)$ -Hölder 连续的. 这是因为, 对任意 $x^*, y^* \in I_n(x^*)$, 其中 n 是使 $y^* \in I_n(x^*)$ 成立的任一充分大的整数, 我们有 $x, y \in I_{n'}(x)$, 其中 n' 是使 $y \in I_{n'}(x)$ 成立的充分大的整数. 由条件 (ii) 可知, 对任意 $0 < \varepsilon < 1$, 当 n 充分大时, 我们有 $n' \geq (1 - \varepsilon)n$. 不失一般性, 假设 $\varepsilon_{n+1}(x^*, \beta) > \varepsilon_{n+1}(y^*, \beta)$. 由于 $0^{3m} \notin \varepsilon_1(x^*, \beta) \cdots \varepsilon_{n+1}(x^*, \beta)$ 且 $|x - y| \leq \beta^{-n'}$, 因此有

$$\begin{aligned} |x^* - y^*| &= \frac{\varepsilon_{n+1}(x^*, \beta) - \varepsilon_{n+1}(y^*, \beta)}{\beta^{n+1}} + \frac{1}{\beta^{n+1}} \left(\frac{\varepsilon_{n+2}(x^*, \beta)}{\beta} + \cdots \right) - \frac{1}{\beta^{n+1}} \left(\frac{\varepsilon_{n+2}(y^*, \beta)}{\beta} + \cdots \right) \\ &\geq \frac{1}{\beta^{n+1}} + \frac{1}{\beta^{n+1+3m}} - \frac{1}{\beta^{n+1}} = \frac{1}{\beta^{n+1+3m}} \geq \frac{1}{\beta^{1+3m}} \beta^{-\frac{1}{1-\varepsilon} n'} \geq \frac{1}{\beta^{1+3m}} |x - y|^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \end{aligned}$$

这说明了,

$$|f^{-1}(x^*) - f^{-1}(y^*)| \leq (\beta^{1+3m})^{1-\varepsilon} |x^* - y^*|^{1-\varepsilon}.$$

也就是说, f^{-1} 在 $f(F_{N,m}^\beta)$ 上是 $(1 - \varepsilon)$ -Hölder 连续的. 从而,

$$\dim_H V(\beta, \{n_k\}, \{l_k\}) \geq \dim_H f(F_{N,m}^\beta) \geq (1 - \varepsilon) \dim_H F_{N,m}^\beta \geq (1 - \varepsilon) s_{N,m}^\beta.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, 我们就得到了 $\dim_H V(\beta, \{n_k\}, \{l_k\}) = 1$. □

任给 $\beta \in A_0$. 对任意 $x \in V(\beta, \{n_k\}, \{l_k\})$, 由于 $n_k < n \leq n_{k+1}$ 时, $l_{k-M_\beta} - (k+1) \leq \tau_n^\beta(x) \leq l_{k+1}$, 此时

$$\frac{\log(l_{k-M_\beta} - (k+1))}{\log n_{k+1}} \leq \frac{\log \tau_n^\beta(x)}{\log n} \leq \frac{\log l_{k+1}}{\log n_k}. \quad (3.4)$$

如果能找到序列 $\{n_k\}$ 和 $\{l_k\}$ 满足引理 3.3 和

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{\log n_{k+1}} = 1, \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log l_k}{\log n_k} = \alpha, \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log l_k}{\log n_k} = \gamma, \quad (3.5)$$

那么就可以由 (3.4) 和引理 3.3(ii) 得到

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n^\beta(x)}{\log n} = \alpha, \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n^\beta(x)}{\log n} = \gamma,$$

从而有 $V(\beta, \{n_k\}, \{l_k\}) \subset E_{\alpha, \gamma}^\beta$. 这样就可以完成定理 1.1 在 $\beta \in A_0$ 时满维部分的证明了. 当然, 这样的序列 $\{n_k\}$ 和 $\{l_k\}$ 是存在的, 它们的存在性可以由下面这个引理保证.

引理 3.4 对任意 $1 \leq \alpha \leq \gamma \leq \infty$, 存在序列 $\{n_k\}$ 和 $\{l_k\}$ 满足引理 3.3 和 (3.5).

3.3 定理 1.1 对一般的 β 满维部分的证明

设 $\alpha \geq 1, \beta \in (1, +\infty)$. 任给 $\beta' \in A_0$ 且 $\beta' \leq \beta$, 由前面的证明可知,

$$\dim_H E_{\alpha, \gamma}^{\beta'} = 1. \quad (3.6)$$

由 A_0 在 $(1, +\infty)$ 中的稠密性^[14] 可知, β' 可以任意接近 β . 记

$$E_{\alpha, \gamma}^{\beta, \beta'} = \left\{ x \in H_{\beta'}^{\beta'} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n^\beta(x)}{\log n} = \alpha, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n^\beta(x)}{\log n} = \gamma \right\}.$$

引理 3.5 $h(E_{\alpha, \gamma}^{\beta, \beta'}) = E_{\alpha, \gamma}^{\beta'}$.

证明 对任意 $x \in H_{\beta'}^{\beta'}$, 由引理 2.3(i) 可知, $\log \tau_n^{\beta'}(h(x)) = \log \tau_n^\beta(x)$. 从而, $h(E_{\alpha, \gamma}^{\beta, \beta'}) \subset E_{\alpha, \gamma}^{\beta'}$. 另一方面, 对任意 $y \in E_{\alpha, \gamma}^{\beta'}$, 令 $z = h^{-1}(y) \in H_{\beta'}^{\beta'}$. 由引理 2.3(i) 可知, $\varepsilon(z, \beta) = \varepsilon(h(z), \beta') = \varepsilon(y, \beta')$, 从而, $z \in E_{\alpha, \gamma}^{\beta, \beta'}$, 这说明了 $E_{\alpha, \gamma}^{\beta'} \subset h(E_{\alpha, \gamma}^{\beta, \beta'})$. $\square$

注意到 $E_{\alpha, \gamma}^{\beta, \beta'} \subset E_{\alpha, \gamma}^\beta$. 由 (3.6)、引理 3.5 和 2.3(iv) 可知,

$$1 = \dim_H E_{\alpha, \gamma}^{\beta'} = \dim_H h(E_{\alpha, \gamma}^{\beta, \beta'}) \leq \frac{\log \beta}{\log \beta'} \dim_H E_{\alpha, \gamma}^{\beta, \beta'} \leq \frac{\log \beta}{\log \beta'} \dim_H E_{\alpha, \gamma}^\beta.$$

从而, $\dim_H E_{\alpha, \gamma}^\beta \geq \frac{\log \beta'}{\log \beta}$. 由于 A_0 在 $(1, \infty)$ 中是稠密的, 令 $\beta' \rightarrow \beta$, 则有 $\dim_H E_{\alpha, \gamma}^\beta = 1$. 自此完成了定理 1.1 的所有证明.

3.4 性质 1.1 的证明

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^\beta(x)$ 存在, 那么 $A(P_n^\beta(x))$ 只包含一个点, 结论显然成立. 如果这个极限不存在, 令 $a := \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n^\beta(x) < \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n^\beta(x) =: b$. 对任意 $c \in (a, b)$, 由于 $a < b$, 自然存在递增的序列 $\{n_k\}$ 使得

$$\frac{\log \tau_{n_k+1}^\beta(x)}{\log(n_k+1)} \leq c \leq \frac{\log \tau_{n_k}^\beta(x)}{\log n_k}.$$

由 $\tau_n^\beta(x)$ 的定义可知, $\tau_{n_k}^\beta(x) \leq \tau_{n_k+1}^\beta(x)$, 从而,

$$\frac{\log \tau_{n_k}^\beta(x)}{\log n_k} \leq \frac{\log \tau_{n_k+1}^\beta(x)}{\log(n_k+1)} \frac{\log(n_k+1)}{\log n_k}.$$

也就是说 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_{n_k}^\beta(x)}{\log n_k} = c$. 这样就证明了性质 1.1.

3.5 定理 1.2 零维部分的证明

引理 3.6 设 $\alpha < 1$, 则

$$\dim_H \left\{ x \in [0, 1] : \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^\beta(x)}{\log(-\log r)} \leq \alpha \right\} = 0. \quad (3.7)$$

证明 对 (3.7) 中任一点 x , 我们知道对任意的 $0 < \varepsilon < 1 - \alpha$, 存在无穷多个 r_n , 使得 $\tau_{r_n}(x) < (-\log r_n)^{\alpha+\varepsilon}$ 成立, 即 $r_n < e^{-\tau_{r_n}(x)^{1/(\alpha+\varepsilon)}}$. 又由 $\tau_r(x)$ 的定义可知,

$$|T_\beta^{\tau_{r_n}(x)}(x) - x| \leq r_n \leq e^{-\tau_{r_n}(x)^{1/(\alpha+\varepsilon)}}.$$

故 (3.7) 中的集合是 (3.1) 中的集合在 $\phi(n) = e^{-n^{1/(\alpha+\varepsilon)}}$ 时的子集. 从而 (3.7) 由引理 3.1 即可得证. $\square$

当 $\alpha < 1$ 时, $G_{\alpha,\gamma}^\beta$ 是 (3.7) 的子集, 因此, $\dim_H G_{\alpha,\gamma}^\beta = 0$. 这样就完成了定理 1.2 零维部分的证明.

3.6 定理 1.2 在 $\beta \in A_0$ 时满维部分的证明

设 $\alpha \geq 1$. 任给 $\beta \in A_0$. 我们可以用与引理 3.3 的证明类似的方法得到 $\dim_H G_{\alpha,\gamma}^\beta = 1$. 事实上, 我们可以找到两个序列 $\{n_k\}$ 和 $\{l_k\}$ 满足引理 3.3 和 (3.5). 从而, 对 f (定义见引理 3.3) 和 $2M_\beta < m < N - 2M_\beta$, 对任意 $x \in F_{N,m}^\beta$ 和 $x^* \in f(F_{N,m}^\beta)$, 有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n^\beta(x^*)}{\log n} = \alpha, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n^\beta(x^*)}{\log n} = \gamma. \quad (3.8)$$

对任意 $r > 0$, 存在 n 使得 $|I_{n+1}(x^*)| < r \leq |I_n(x^*)|$. 此时,

$$I_{n+1}(x^*) \subset B(x^*, r) \subset I_{n-3N}(x^*). \quad (3.9)$$

这是因为, 一方面, 由 $|I_{n+1}(x^*)| < r$ 可知, $I_{n+1}(x^*) \subset B(x^*, r)$. 另一方面, 由 x^* 的 β -展式可知, $0^{3m} \notin \varepsilon_{n-3N+1}(x^*, \beta) \cdots \varepsilon_n(x^*, \beta)$, 从而, 满的柱集 $I_n(\varepsilon_1(x^*, \beta), \dots, \varepsilon_{n-3N}(x^*, \beta), 0^{3N})$ 在 $I_n(x^*)$ 的左边, 由引理 2.1(ii) 可知它的长度为 $\beta^{-n} (\geq |I_n(x^*)|)$. 由于 $0^{M_\beta} 0^{M_\beta}$ 在 $\varepsilon_{n-3N+1}(x^*, \beta) \cdots \varepsilon_n(x^*, \beta)$ 中出现, 类似地, 我们也可以在 $I_{n-3N}(x^*)$ 中找到一个位于 $I_n(x^*)$ 右边的 n 阶满的柱集, 这样就说明了 $B(x^*, r) \subset I_{n-3N}(x^*)$. 因此, (3.9) 成立. 也就是说,

$$\tau_{n-3N}^\beta(x^*) \leq \tau_r^\beta(x^*) \leq \tau_{n+1}^\beta(x^*).$$

故由引理 2.1(ii) 可知, 存在常数 C 使得

$$\frac{\log \tau_{n-3N}^\beta(x^*)}{\log(-\log C\beta^{-n})} \leq \frac{\log \tau_r^\beta(x^*)}{\log(-\log r)} \leq \frac{\log \tau_{n+1}^\beta(x^*)}{\log(-\log \beta^{-n})}.$$

从而, 由 (3.8), 有

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^\beta(x^*)}{\log(-\log r)} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n^\beta(x^*)}{\log n} = \alpha, \quad \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^\beta(x^*)}{\log(-\log r)} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n^\beta(x^*)}{\log n} = \gamma.$$

这说明了 $f(F_{N,m}^\beta) \subset G_{\alpha,\gamma}^\beta \cap F_{3m}^\beta$. 从而, 对任意 $0 < \varepsilon < 1$, 有

$$\dim_H G_{\alpha,\gamma}^\beta \geq \dim_H G_{\alpha,\gamma}^\beta \cap F_{3m}^\beta \geq \dim_H f(F_{N,m}^\beta) \geq (1 - \varepsilon)s_{N,m}^\beta, \quad (3.10)$$

其中最后一个不等式是由引理 2.2 和 f^{-1} 的 $(1 - \varepsilon)$ -Hölder 连续性得到的. 令 $\varepsilon \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, 得到 $\dim_H G_{\alpha,\gamma}^\beta = 1$. 这样就完成了定理 1.2 在 $\beta \in A_0$ 时满维部分的证明.

3.7 定理 1.2 对一般的 β 满维部分的证明

设 $\alpha \geq 1$, $\beta \in (1, +\infty)$. 任选 $\beta' \in A_0$ 且 $\beta' \leq \beta$. 我们知道

$$\dim_H G_{\alpha, \gamma}^{\beta'} = 1. \quad (3.11)$$

记

$$G_{\alpha, \gamma}^{\beta, \beta'} = \left\{ x \in H_{\beta}^{\beta'} \cap F_m^{\beta} : \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^{\beta}(x)}{\log(-\log r)} = \alpha, \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^{\beta}(x)}{\log(-\log r)} = \gamma \right\}.$$

引理 3.7 设 $\beta' \in A_0$, $M = \max\{\ell_n(\beta') : n \geq 1\}$, $m > M$, 则

$$h(G_{\alpha, \gamma}^{\beta, \beta'}) = G_{\alpha, \gamma}^{\beta'} \cap F_m^{\beta'}.$$

证明 对任意 $x \in H_{\beta}^{\beta'}$, 自然有 $h(T_{\beta}^k x) = T_{\beta}^k h(x)$ 且 $T_{\beta}^k x \in H_{\beta}^{\beta'} \cap F_m^{\beta}$. 由引理 2.3(iv) 和 2.3(v) 可知,

$$\beta^{-(m+1)} |x - T_{\beta}^k x|^{\frac{\log \beta'}{\log \beta}} \leq |h(x) - T_{\beta'}^k h(x)| \leq 2\beta'^{M+1} |x - T_{\beta}^k x|^{\frac{\log \beta'}{\log \beta}}.$$

从而,

$$\tau_{r_1}^{\beta'}(h(x)) \leq \tau_r^{\beta}(x) \quad \text{且} \quad \tau_{r_2}^{\beta}(x) \leq \tau_r^{\beta'}(h(x)),$$

其中 $r_1 = 2\beta'^{M+1} r^{\frac{\log \beta'}{\log \beta}}$, $r_2 = \beta'^{(m+1)} r^{\frac{\log \beta}{\log \beta'}}$. 因此,

$$\underline{R}^{\beta'}(h(x)) = \underline{R}^{\beta}(x), \quad \overline{R}^{\beta'}(h(x)) = \overline{R}^{\beta}(x), \quad (3.12)$$

其中

$$\underline{R}^{\beta}(x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^{\beta}(x)}{\log(-\log r)}, \quad \overline{R}^{\beta}(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^{\beta}(x)}{\log(-\log r)}.$$

又由 h 的定义可知, $h(F_m^{\beta}) = F_m^{\beta'}$, 结合 (3.12), 我们有 $h(G_{\alpha, \gamma}^{\beta, \beta'}) = G_{\alpha, \gamma}^{\beta'} \cap F_m^{\beta'}$ 成立. $\square$

由于 $G_{\alpha, \gamma}^{\beta, \beta'} \subset G_{\alpha, \gamma}^{\beta}$, 由引理 3.7 和 2.3(iv) 可知,

$$\dim_H G_{\alpha, \gamma}^{\beta'} \cap F_m^{\beta'} = \dim_H h(G_{\alpha, \gamma}^{\beta, \beta'}) \leq \frac{\log \beta}{\log \beta'} \dim_H G_{\alpha, \gamma}^{\beta, \beta'} \leq \frac{\log \beta}{\log \beta'} \dim_H G_{\alpha, \gamma}^{\beta}.$$

由 (3.10) 可知, 对任意 $0 < \varepsilon < 1$, 都有 $\dim_H G_{\alpha, \gamma}^{\beta'} \cap F_{3m}^{\beta'} \geq (1 - \varepsilon)s_{N, m}^{\beta'}$. 从而,

$$\dim_H G_{\alpha, \gamma}^{\beta} \geq \frac{\log \beta'}{\log \beta} (1 - \varepsilon)s_{N, m}^{\beta'}.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, 则有 $\dim_H G_{\alpha, \gamma}^{\beta} \geq \frac{\log \beta'}{\log \beta}$. 再由 A_0 在 $(1, \infty)$ 中的稠密性, 令 $\beta' \rightarrow \beta$ 即可得到 $\dim_H G_{\alpha, \gamma}^{\beta} = 1$. 这样就完成了定理 1.2 的证明.

致谢 感谢审稿人的意见和建议.

参考文献

- 1 Boshernitzan M D. Quantitative recurrence results. *Invent Math*, 1993, 113: 617–631
- 2 Ornstein D S, Weiss B. Entropy and data compression schemes. *IEEE Trans Inform Theory*, 1993, 39: 78–83
- 3 Feng D J, Wu J. The Hausdorff dimension of recurrent sets in symbolic spaces. *Nonlinearity*, 2001, 14: 81–85
- 4 Peng L, Tan B, Wang B W. Quantitative Poincaré recurrence in continued fraction dynamical system. *Sci China Math*, 2012, 55: 131–140

- 5 Saussol B, Wu J. Recurrence spectrum in smooth dynamical systems. *Nonlinearity*, 2003, 16: 1991–2001
- 6 Peng L. Dimension of sets of sequences defined in terms of recurrence of their prefixes. *C R Math Acad Sci Paris*, 2006, 343: 129–133
- 7 Kim D H, Li B. Zero-one law of Hausdorff dimensions of the recurrent sets. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2016, 36: 5477–5492
- 8 Rényi A. Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math Acad Sci Hungar*, 1957, 8: 477–493
- 9 Dajani K, Kraaikamp C. *Ergodic Theory of Numbers*. Carus Mathematical Monographs, vol. 29. Washington: Mathematical Association of America, 2002
- 10 Ban J C, Li B. The multifractal spectra for the recurrence rates of beta-transformations. *J Math Anal Appl*, 2014, 420: 1662–1679
- 11 Barreira L, Saussol B. Hausdorff dimension of measures via Poincaré recurrence. *Comm Math Phys*, 2001, 219: 443–463
- 12 Philipp W. Some metrical theorems in number theory. *Pacific J Math*, 1967, 20: 109–127
- 13 Saussol B. Recurrence rate in rapidly mixing dynamical systems. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2006, 15: 259–267
- 14 Parry W. On the β -expansions of real numbers. *Acta Math Acad Sci Hungar*, 1960, 11: 401–416
- 15 Li B, Wu J. Beta-expansion and continued fraction expansion. *J Math Anal Appl*, 2008, 339: 1322–1331
- 16 Schmeling J R. Symbolic dynamics for β -shifts and self-normal numbers. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1997, 17: 675–694
- 17 Tan B, Wang B W. Quantitative recurrence properties for beta-dynamical system. *Adv Math*, 2011, 228: 2071–2097

The recurrence rates of β -transformations

Chun Wei, Min Wu & Shuailing Wang

Abstract Let $([0, 1), T_\beta)$ be the β -transformation dynamical system. We consider the first recurrence time with the polynomial rate. Let $\tau_n^\beta(x)$ be the first return time of $x \in [0, 1)$ to the cylinder of order n containing x . We prove that the Hausdorff dimension of the set

$$\left\{ x \in [0, 1) : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n^\beta(x)}{\log n} = \alpha, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_n^\beta(x)}{\log n} = \gamma \right\}$$

is zero when $\alpha < 1$ and one when $\alpha \geq 1$, where $0 \leq \alpha \leq \gamma \leq +\infty$. We also consider the first return time to the ball, and obtain the similar zero-one law as above.

Keywords β -expansion, recurrence rates, Hausdorff dimension

MSC(2010) 28A80

doi: 10.1360/SCM-2017-0300