完备 λ -超曲面的几何

献给胡和生教授 90 华诞

成庆明^{1*}, 魏国新²

1. Department of Applied Mathematics, Faculty of Sciences, Fukuoka University, Fukuoka 814-0180, Japan;

2. 华南师范大学数学科学学院, 广州 510631

E-mail: cheng@fukuoka-u.ac.jp, weiguoxin@tsinghua.org.cn

收稿日期: 2017-09-22; 接受日期: 2017-12-29; 网络出版日期: 2018-04-12; * 通信作者

日本 JSPS 科研基金 (批准号: 16H03937) 和国家自然科学基金 (批准号: 11371150 和 11771154) 资助项目

摘要 本文是一篇有关 λ -超曲面的综述性文章, 讨论了 λ -超曲面的构造、稳定性和 λ -超曲面的分类以及面积增长.

关键词 平均曲率流 λ -超曲面 面积增长

MSC (2010) 主题分类 53C44, 53C42

1 平均曲率型的流

1.1 平均曲率流

设 M^n 是 n 维流形, $X: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是 $n+1$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 n 维超曲面. 若光滑浸入 $X(t) = X(\cdot, t)$,

$$X(t): M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

满足

$$\frac{\partial X(p, t)}{\partial t} = H(p, t),$$

则称 $X(t) = X(\cdot, t)$ 为平均曲率流, 其中 $X(0) = X$, $H(p, t)$ 是超曲面 $M_t = X(M^n, t)$ 在点 $X(p, t)$ 处的平均曲率向量.

欧氏空间中超曲面平均曲率流是 Huisken^[1] 在 1984 年最早提出并进行研究的. 最简单的平均曲率流是中心在坐标原点、半径为 $\sqrt{-2n(t-T)}$ 的收缩球面 $M_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$, 其中 $t \leq T$. 这是一个光滑的流, 并且在时刻 $t = T$ 时, 流消逝.

英文引用格式: Cheng Q M, Wei G X. Geometry of complete λ -hypersurfaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 699–710, doi: 10.1360/N012017-00205

如果初始曲面 $M_0 = X(M^n)$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中 n 维紧致的凸超曲面, Huisken^[1] 证明了平均曲率流 $M_t = X(M^n, t)$ 一直保持光滑性和凸性直至收缩为一个点, 如果把这个点“放大”, 看到的就是圆球面.

如果初始曲面 $M_0 = X(M^n)$ 不是凸的, 平均曲率流就可能产生别的奇点. 例如, Grayson^[2] 构造了初始曲面是有足够长且细的手柄的旋转对称哑铃的例子. 这时就产生了别的奇点.

若 $X : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是超曲面且满足 $H + \langle X, N \rangle = 0$, 其中 H 是超曲面的平均曲率, N 是单位法向量场, 则

$$X(t) = \sqrt{-2t} X : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

是平均曲率流方程的解, 此解称为平均曲率流的自相似解.

如果超曲面 $X : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 满足

$$H + \langle X, N \rangle = 0,$$

则称其为自收缩子. 自收缩子在平均曲率流的研究中是重要的, 因为它描述了平均曲率流在给定奇点处可能的“爆破”. 关于欧氏空间中自收缩子的分类及刚性问题的研究结果有很多, 如文献 [3–7] 等.

另一方面, 考虑加权面积泛函

$$A(s) = \int_M e^{-\frac{|X(s)|^2}{2}} d\mu_s,$$

通过计算其第一变分公式得到, $X : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是加权面积泛函 $A(s)$ 的临界点当且仅当 $X : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是收缩子, 即 $H + \langle X, N \rangle = 0$.

此外还可以得到 $X : M^n \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, e^{-\frac{|X|^2}{n}} \delta_{ij})$ 是极小超曲面当且仅当 $X : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是收缩子.

1.2 平均曲率型流

对于浸入 $X(t) : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, 其中 $X(0) = X$, M 的体积定义为

$$\frac{1}{n+1} \int_M \langle X(t), N(t) \rangle d\mu_t.$$

Huisken^[8] 研究了如下平均曲率型流:

$$\frac{\partial X(t)}{\partial t} = (-h(t)N(t) + \mathbf{H}(t)),$$

其中

$$X(t) = X(\cdot, t), \quad h(t) = \frac{\int_M H(t) d\mu_t}{\int_M d\mu_t},$$

$N(t)$ 是 $X(t) : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 的单位法向量. 此流保持 M 的体积, 被称为保体积的平均曲率流. Huisken^[8] 还证明了, 如果初始超曲面是一致凸的, 那么上述保体积的平均曲率流就有光滑解, 并最终收敛于圆球面.

接下来一个自然并且重要的问题就是研究加权面积泛函在保加权体积变分下的临界点. 但是从加权面积泛函的角度来看, 现有的 M 体积的定义不够好, 我们需给出体积的新定义和新的曲率流. 2014 年, 文献 [9] 引进了 M 的加权体积的新定义和新的曲率流如下:

对于浸入 $X(t): M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, 其中 $X(0) = X$, M 的加权体积定义为

$$V(t) = \int_M \langle X(t), N \rangle e^{-\frac{|X|^2}{2}} d\mu.$$

新的曲率流定义为

$$\frac{\partial X(t)}{\partial t} = (-\alpha(t)N(t) + \mathbf{H}(t)),$$

其中

$$\alpha(t) = \frac{\int_M H(t) \langle N(t), N \rangle e^{-\frac{|X|^2}{2}} d\mu}{\int_M \langle N(t), N \rangle e^{-\frac{|X|^2}{2}} d\mu},$$

N 是 $X: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 的单位法向量.

我们可以证明曲率流

$$\frac{\partial X(t)}{\partial t} = (-\alpha(t)N(t) + \mathbf{H}(t))$$

保持加权体积 $V(t)$. 因此, 称此流为保加权体积的平均曲率流.

2 λ -超曲面、嵌入 λ -环面的构造

2.1 λ -超曲面

设 $X: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是 $n+1$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 n 维超曲面, X 的变分为 $X(t): M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $X(0) = X$.

定义加权面积泛函 $A: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$A(t) = \int_M e^{-\frac{|X(t)|^2}{2}} d\mu_t,$$

其中 $d\mu_t$ 是 $X(t)$ 诱导度量下的面积元. M 的加权体积泛函 $V: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$V(t) = \int_M \langle X(t), N \rangle e^{-\frac{|X|^2}{2}} d\mu.$$

若对所有的 t 和 $\frac{\partial X(t)}{\partial t}|_{t=0} = fN$ 来说, $V(t) = V(0)$, 则称 X 的变分 $X(t)$ 为保加权体积的法向变分.

命题 2.1 令 $X: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是浸入的, 则下列叙述是等价的:

(1) 对于保加权体积的变分来说, $A'(0) = 0$;

(2) $\langle X, N \rangle + H = \lambda$, 其中 λ 是常数.

定义 2.1 令 $X: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 n 维超曲面. 若

$$\langle X, N \rangle + H = \lambda,$$

则称 $X: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 为 λ -超曲面.

λ -超曲面是我们在文献 [9] 中提出来并开始进行研究的, 之后有很多有意思的结果, 参见文献 [10–15] 等. 当 $\lambda = 0$ 时, λ -超曲面就是平均曲率流的自收缩子. 对于 λ -超曲面, 我们在文献 [9] 中证明了如下结果.

定理 2.1 令 $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 n 维超曲面, 则下列叙述等价:

- (1) $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是 λ -超曲面;
- (2) $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是所有保加权体积变分的加权面积泛函 $A(t)$ 的临界点;
- (3) $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是 $(\mathbb{R}^{n+1}, e^{-\frac{|X|^2}{n}} \delta_{ij})$ 中的具有常加权平均曲率 $H_w = e^{-\frac{|X|^2}{2n}} H = \lambda$ 的超曲面.

2.2 λ -超曲面的例子

所有的自收缩子都是 λ -超曲面的标准例子. 例如, Angenent^[16] 构造的紧致嵌入的自收缩子的例子:

$$X : S^1 \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

Drugan^[17] 构造的拓扑球面的自收缩子的例子

$$X : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

和 Møller^[18] 构造的紧致具高亏格的自收缩子的例子等. 此外还有如下例子:

例 2.1 半径为 r 的 n 维标准球面

$$X : S^n(r) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad r > 0$$

是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的紧致 λ -超曲面, 其中 $\lambda = \frac{n}{r} - r$.

例 2.2 对于任意正整数 k 来说,

$$X : \mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{R}^{n-k}$$

是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 n 维完备非紧的 λ -超曲面, 其中

$$\lambda = \frac{k}{r} - r.$$

例 2.3 对于 $n = 1$ 和某些小于零的 λ , 在 $\mathbb{R}^2$ 中存在非圆周的紧致嵌入 λ -曲线 Γ_λ 的例子.

对于自收缩子来说, 在 $\mathbb{R}^2$ 中不存在非圆周的紧致嵌入自收缩子.

例 2.4 对于任意正整数 n , 在文献 [9] 中, 我们证明了在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中存在完备的嵌入 λ -超曲面 $\Gamma_\lambda \times \mathbb{R}^{n-1}$.

2.3 嵌入 λ -环的构造

2015 年, 我们在文献 [19] 中证明了如下结论:

定理 2.2 对于 $n \geq 2$ 和 $\lambda \geq 0$, $\mathbb{R}^{n+1}$ 中存在嵌入旋转的 λ -超曲面 $X : S^1 \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

证明 令 $(x(s), r(s))$ ($s \in (a, b)$) 是 xr -平面上的一条曲线, 其中 $r > 0$, $S^{n-1}(1)$ 是标准的 $n-1$ 维单位球面. 考虑如下映射:

$$X : (a, b) \times S^{n-1}(1) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

其中

$$X(s, \alpha) = (x(s), r(s)\alpha), \quad s \in (a, b), \quad \alpha \in S^{n-1}(1).$$

也就是说, X 是由平面曲线 $(x(s), r(s))$ 绕 x 轴旋转得到的. □

引理 2.1 $X : (a, b) \times S^{n-1}(1) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是 λ -超曲面当且仅当 (x, r) 满足

$$\begin{cases} (x')^2 + (r')^2 = 1, \\ -\frac{x''}{r'} = xr' + \left(\frac{n-1}{r} - r\right)x' + \lambda. \end{cases}$$

令 (x_δ, r_δ) 是上述方程组在初始条件 $(x_\delta, r_\delta, x'_\delta(0)) = (0, \delta, 1)$ 下的最长弧长解, 其中 $\delta > 0$.

定义 2.2 令 $s_1 = s_1(\delta) > 0$ 是第一次出现下列情形时的弧长, 要么 $x_\delta = 0$, 要么切向量是 $(1, 0)$ 或者 $(-1, 0)$. 也就是说, 要么曲线 γ_δ 碰撞到 r -轴, 要么曲线 γ_δ 具有水平的切线. 如果以上的情形都没出现, 我们就令 $s_1(\delta) = S(\delta)$.

从上面的定义可以看出, 若 $s \in (0, s_1)$, 则 $r'(s) > 0$. 因此, 曲线在 $\delta < r < r_\delta(s_1)$ 的区间上可以写成图的形式 $x = f_\delta(r)$.

若 $f'_\delta(r) = \frac{dx}{dr} = 0$, 即生成曲线 γ_δ 有竖直的切线, 则由引理 2.1 可知,

$$\begin{aligned} f''_\delta(r) &= -\frac{1}{(r')^3} \left[xr' + \left(\frac{n-1}{r} - r\right)x' + \lambda \right] \\ &= -\frac{1}{(r')^3} (xr' + \lambda) \\ &< 0. \end{aligned}$$

这意味着 $f_\delta(r)$ 仅能有局部最大值. 这样, $f_\delta(r)$ 最多有一个临界点, 并且是最大值点.

下面将证明存在 $\delta > 0$, 使得 $\gamma_\delta([0, s_1(\delta)])$ 在第一象限内是一条起点和终点都在 r -轴, 并且在这两点处的切线都是水平方向的简单曲线. 把第一象限的 $\gamma_\delta([0, s_1(\delta)])$ 通过 r -轴反射到第二象限, 从而得到上半平面中的一条简单封闭曲线, 该简单封闭曲线就是生成曲线 γ .

引理 2.2 对于 $0 < s < s_1$, 只要 δ 足够小, 就有

$$x_\delta(s) \leq C_1 \delta, \quad r_\delta(s) \leq \sqrt{n-1} + \frac{\pi}{2\lambda}, \quad s_1(\delta) < \infty$$

成立, 其中常数 C_1 不依赖于 δ .

引理 2.3 对于足够小的 $\delta > 0$, 有 $x_\delta(s_1) = 0$.

定义 2.3 δ^* 定义为

$$\delta^* = \sup\{\delta > 0 : x_\delta(s_1) = 0, s_1 = s_1(\delta) < \infty\}.$$

引理 2.4 生成曲线的 r 坐标是有限的, 即

$$\sup_{\delta < \delta^*} r_\delta(s_1) < +\infty.$$

引理 2.5 生成曲线的 x 坐标满足下述关系:

$$\sup_{\delta < \delta^*} \sup_{0 < s < s_1} x_\delta(s) \leq \frac{\pi}{2\lambda}.$$

从上述引理可知, 当 $\delta \rightarrow \delta^*$ 时, 在第一象限的生成曲线 $\gamma_\delta(s) = (x_\delta, r_\delta)$ ($0 \leq s \leq s_1$) 与 x -轴不相交, 并且是有界的. 因此, 生成曲线的极限曲线 $\gamma^*(s) = \gamma_{\delta^*}(s)$ 在 $0 \leq s \leq s_1$ 上的起点和终点都在 r -轴上, 即曲线是从点 $(0, \delta^*)$ 到点 $(0, r^*)$, 其中 $r^* = r_{\delta^*}(s_1)$. 生成曲线在点 $(0, r^*)$ 有水平的切线, 即 $x'_{\delta^*}(s_1) = -1$. 因此可以得到生成曲线 γ 是通过 r -轴翻转第一象限的 $\gamma^*([0, s_1(\delta^*)])$ 得到的上半平面中的一条简单封闭曲线.

3 $\mathcal{F}$ -泛函和 λ -超曲面的稳定性

3.1 $\mathcal{F}$ -泛函

我们在文献 [9] 中定义 $\mathcal{F}$ -泛函如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(s) &= \mathcal{F}_{X_s, t_s}(X(s)) \\ &= (4\pi t_s)^{-\frac{n}{2}} \int_M e^{-\frac{|X(s) - X_s|^2}{2t_s}} d\mu_s + \lambda(4\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{t_s}} \int_M \langle X(s) - X_s, N \rangle e^{-\frac{|X|^2}{2}} d\mu,\end{aligned}$$

其中 X_s 和 t_s 分别表示 $X_0 = O$ 和 $t_0 = 1$ 的变分, $\frac{\partial X(0)}{\partial s} = fN$.

如果对于所有的法向变分, 以及 $X_0 = O$ 和 $t_0 = 1$ 的所有变分 X_s 和 t_s 来说, $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 都是 $\mathcal{F}(s)$ 的临界点, 则称 $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是 $\mathcal{F}(s)$ 的临界点.

定理 3.1 令 $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是超曲面, 则下列叙述等价:

- (1) $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是 λ -超曲面;
- (2) $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是 $\mathcal{F}(s)$ 的临界点.

3.2 紧致 λ -超曲面的稳定性

定义 3.1 $\mathcal{F}$ -泛函 $\mathcal{F}(s)$ 的临界点 $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 称为 $\mathcal{F}$ -稳定的, 如果对 X 的每个法向变分 $X(s)$, 都存在 $X_0 = O$ 和 $t_0 = 1$ 的变分 X_s 和 t_s , 使得 $\mathcal{F}''(0) \geq 0$; $\mathcal{F}$ -泛函 $\mathcal{F}(s)$ 的临界点 $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 称为 $\mathcal{F}$ -不稳定的, 如果存在 X 的法向变分 $X(s)$, 使得对 $X_0 = O$ 和 $t_0 = 1$ 的所有变分 X_s 和 t_s , 都有 $\mathcal{F}''(0) < 0$ 成立.

- 定理 3.2** (1) 若 $r \leq \sqrt{n}$ 或者 $r > \sqrt{n+1}$, 则 n 维圆球面 $X : S^n(r) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是 $\mathcal{F}$ -稳定的;
- (2) 若 $\sqrt{n} < r \leq \sqrt{n+1}$, 则 n 维圆球面 $X : S^n(r) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是 $\mathcal{F}$ -不稳定的.

结合定理 3.2, 我们提出如下问题:

问题 3.1 能否证明半径满足 $r \leq \sqrt{n}$ 或者 $r > \sqrt{n+1}$ 的圆球面 $S^n(r)$ 是仅有的紧致的 $\mathcal{F}$ -稳定的 λ -超曲面?

注 3.1 Colding 和 Minicozzi^[20] 证明了圆球面 $S^n(\sqrt{n})$ 是唯一的 $\mathcal{F}$ -稳定的紧致自收缩子. 为了证明这个结论, 平均曲率 H 是 Jacobi 算子的特征函数起到了很重要的作用. 但对于 λ -超曲面而言, 平均曲率 H 一般不是 Jacobi 算子的特征函数.

4 完备的 λ -超曲面

对于完备的 λ -超曲面, 我们在文献 [9] 中证明了下面的定理:

定理 4.1 令 $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中完备的具有多项式面积增长的 n 维嵌入 λ -超曲面. 若

$$H - \lambda \geq 0 \quad \text{且} \quad \lambda(f_3(H - \lambda) - S) \geq 0,$$

则 $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是下列情形之一:

- (1) $S^n(r)$, 其中 $\lambda = \frac{n}{r} - r$;
- (2) $\mathbb{R}^n$;
- (3) $S^k(r) \times \mathbb{R}^{n-k}$, $0 < k < n$,

其中 $S = \sum_{i,j} h_{ij}^2$ 是第二基本形式长度的平方, $f_3 = \sum_{i,j,k} h_{ij} h_{jk} h_{ki}$.

注 4.1 对于 $\lambda = 0$, Huisken^[21] 及 Colding 和 Minicozzi^[20] 证明了这个结果. 在这种情形下, 由 $H \geq 0$, 通过极大值原理, 可以得到 $H \equiv 0$ 或者 $H > 0$, 因为

$$\mathcal{L}H = \Delta H - \langle X, \nabla H \rangle = H - SH.$$

所以, 条件 $H \geq 0$ 是必要的. 但是对于 $\lambda \neq 0$ 的情形, 由 $H - \lambda \geq 0$, 仅通过极大值原理, 是得不到 $H - \lambda > 0$ 的. 我们还需要 $\lambda(f_3(H - \lambda) - S) \geq 0$ 这个条件. 而且这个条件 $\lambda(f_3(H - \lambda) - S) \geq 0$ 是必要的. 否则有反例, 例如, 对于任意正整数 n , $\mathbb{R}^{n+1}$ 中完备的嵌入 λ -超曲面 $\Gamma_\lambda \times \mathbb{R}^{n-1}$ 不满足这个条件, 其中 Γ_λ 是 $\mathbb{R}^2$ 中紧致的嵌入 λ -曲线.

定理 4.1 的证明思路 因为

$$\mathcal{L}H = H + S(\lambda - H),$$

$$H - \lambda \geq 0$$

和

$$\lambda(f_3(H - \lambda) - S) \geq 0,$$

可以证明 $H - \lambda \equiv 0$ 或者 $H - \lambda > 0$. 接着考虑函数 $\log(H - \lambda)$, 得到

$$\mathcal{L} \log(H - \lambda) = 1 - S + \frac{\lambda}{H - \lambda} - |\nabla \log(H - \lambda)|^2$$

和

$$\mathcal{L}\sqrt{S} \geq \sqrt{S} - \sqrt{S}S + \frac{\lambda f_3}{\sqrt{S}}.$$

为了能对函数 S 、 $\log(H - \lambda)$ 和 $\sqrt{S}$ 应用 Stokes 公式, 我们需要证明下面的公式:

$$(1) \int_M S(1 + |X|^2)e^{-\frac{|X|^2}{2}} d\mu < +\infty;$$

$$(2) \int_M S^2 e^{-\frac{|X|^2}{2}} d\mu < +\infty;$$

$$(3) \int_M |\nabla \sqrt{S}|^2 e^{-\frac{|X|^2}{2}} d\mu < +\infty;$$

$$(4) \int_M \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 e^{-\frac{|X|^2}{2}} d\mu < +\infty;$$

$$(5) \int_M S|\nabla \log(H - \lambda)|^2 e^{-\frac{|X|^2}{2}} d\mu < +\infty.$$

这里仅给出式子 (1) $\int_M S(1 + |X|^2)e^{-\frac{|X|^2}{2}} d\mu < +\infty$ 的证明.

设 η 是具有紧致支集的函数, 则有

$$\begin{aligned} \int_M \langle \nabla \eta^2, \nabla \log(H - \lambda) \rangle e^{-\frac{|X|^2}{2}} d\mu &= - \int_M \eta^2 (\mathcal{L} \log(H - \lambda)) e^{-\frac{|X|^2}{2}} d\mu \\ &= \int_M \eta^2 \left(S - 1 - \frac{\lambda}{H - \lambda} + |\nabla \log(H - \lambda)|^2 \right) e^{-\frac{|X|^2}{2}} d\mu. \end{aligned}$$

结合上述等式和下面的不等式:

$$\langle \nabla \eta^2, \nabla \log(H - \lambda) \rangle \leq \varepsilon |\nabla \eta|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \eta^2 |\nabla \log(H - \lambda)|^2,$$

我们有

$$\int_M \left(\eta^2 S + \eta^2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) |\nabla \log(H - \lambda)|^2 \right) e^{-\frac{|X|^2}{2}} d\mu$$

$$\leq \int_M \left(\varepsilon |\nabla \eta|^2 + \eta^2 + \frac{\lambda}{H - \lambda} \eta^2 \right) e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu,$$

其中 $\varepsilon > 0$.

因为

$$\frac{\lambda}{H - \lambda} \leq \frac{\lambda f_3}{S} \leq |\lambda| \sqrt{S} \leq |\lambda| \left(\frac{S}{2\delta} + \frac{\delta}{2} \right),$$

其中 $\delta > 0$, 我们得到

$$\begin{aligned} & \int_M \left\{ \left(1 - \frac{|\lambda|}{2\delta} \right) \eta^2 S + \eta^2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) |\nabla \log(H - \lambda)|^2 \right\} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu \\ & \leq \int_M \left(\varepsilon |\nabla \eta|^2 + \left(1 + \frac{|\lambda|}{2} \delta \right) \eta^2 \right) e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu. \end{aligned}$$

通过选择 ε 、 δ 和常数 $c(n, \lambda)$, 我们得到

$$\int_M \eta^2 (S + |\nabla \log(H - \lambda)|^2) e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu \leq c(n, \lambda) \int_M (|\nabla \eta|^2 + \eta^2) e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu.$$

因为 $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 有多项式面积增长, 我们可以证明, 对于任意的 $m > 0$, 有

$$\int_M (1 + |X|^m) e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu < \infty.$$

用 $|X|\eta$ 代换 η , 可得

$$\int_M \eta^2 S (1 + |X|^2) e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu \leq c(n, \lambda) \int_M (1 + |X|^2) e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu.$$

从而有

$$\int_M S (1 + |X|^2) e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu < \infty.$$

因此, 可以对我们的函数应用 Stokes 公式, 得到

$$\int_M \langle \nabla S, \nabla \log(H - \lambda) \rangle e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu = - \int_M S \mathcal{L} \log(H - \lambda) e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu$$

和

$$\int_M |\nabla \sqrt{S}|^2 e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu = - \int_M \sqrt{S} \mathcal{L} \sqrt{S} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu.$$

把

$$\mathcal{L} \log(H - \lambda) = 1 - S + \frac{\lambda}{H - \lambda} - |\nabla \log(H - \lambda)|^2$$

和

$$\mathcal{L} \sqrt{S} \geq \sqrt{S} - \sqrt{S} S + \frac{\lambda f_3}{\sqrt{S}}$$

代入到上面的两个公式中, 得到

$$0 \geq \int_M |\nabla \sqrt{S} - \sqrt{S} \nabla \log(H - \lambda)|^2 e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu + \int_M \lambda \left(f_3 - \frac{S}{H - \lambda} \right) e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu.$$

又因为 $\lambda(f_3(H - \lambda) - S) \geq 0$, 所以,

$$\lambda \left(f_3 - \frac{S}{H - \lambda} \right) = 0,$$

$\frac{S}{(H - \lambda)^2}$ 为常数, $h_{ijk}(H - \lambda) = h_{ij}H_{,k}$ 对于任意的 i, j 和 k 都成立. 经过进一步的分析可知, $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 或者 $S^k(r) \times \mathbb{R}^{n-k}$, 其中 $\lambda = \frac{k}{r} - r$. $\square$

5 完备 λ -超曲面的面积

5.1 完备 λ -超曲面面积增长的上界

在 Riemann 几何的研究中, Bishop 和 Gromov 的如下体积 (按我们文中的说法是面积) 比较定理是强有力的工具.

定理 5.1 对于 n 维完备非紧致的具有非负 Ricci 曲率的 Riemann 流形来说, 其测地球最多具有多项式面积增长, 即

$$\text{Area}(B_r(x_0)) \leq Cr^n.$$

Cao 和 Zhou^[22] 研究了 n 维完备非紧致的梯度收缩 Ricci 孤立子的测地球面积增长的上界, 他们得到如下结论:

定理 5.2 对于 n 维完备非紧致的梯度收缩 Ricci 孤立子来说, 其测地球最多具有多项式面积增长, 即

$$\text{Area}(B_r(x_0)) \leq Cr^n.$$

很自然地要问下面的问题:

问题 5.1 能否给出完备非紧致的 λ -超曲面的面积增长的上界?

事实上, 我们在文献 [9] 中得到了如下结论:

定理 5.3 令 $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的完备非紧致的拟紧 λ -超曲面, 则存在正的常数 C 满足对于 $r \geq 1$, 有

$$\text{Area}(B_r(0) \cap X(M)) \leq Cr^{n+\frac{\lambda^2}{2}-2\beta-\frac{\inf H^2}{2}},$$

其中 $\beta = \frac{1}{4} \inf(\lambda - H)^2$.

注 5.1 我们定理中的估计是最优的, 因为当柱面为 $S^k(r_0) \times \mathbb{R}^{n-k}$ 时, 上述不等式变为了等式; 当 $\lambda = 0$ 时, 也就是对于自收缩子来说, 此结果已由 Ding 和 Xin^[23] 及 Cheng 和 Zhou^[24] 得到.

此外, 我们在文献 [9] 中还证明了如下结果:

定理 5.4 欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的完备非紧致的 λ -超曲面 $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 具有多项式的面积增长当且仅当 $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是拟紧的.

我们在文献 [9] 中将给上述面积增长定理一个统一的证明.

定理 5.5 令 (M, g) 是一个完备的 Riemann 流形, 具有度量 g , f 是 M 上的一个非负的 C^∞ -拟紧的函数. 令

$$D_r = \left\{ x \in M; f(x) < \frac{r^2}{2} \right\}.$$

若 $|\nabla f|^2 \leq f$ 在 M 上, 且 $\Delta f - |\nabla f|^2 + f \leq k$, 其中 $k > 0$ 是一个常数, 则 $\text{Area}(D_r) \leq cr^{2k}$.

对于 Bishop 和 Gromov 的体积比较定理来说, 我们取 $f = \frac{r^2}{4}$, 其中 $r = r(x)$ 是从固定点到 x 的距离. 因为 Ricci 曲率是非负的, 所以,

$$\Delta r \leq \frac{n-1}{r}.$$

因此, 在 M 上,

$$|\nabla f|^2 = f, \quad \Delta f - |\nabla f|^2 + f \leq \frac{n}{2}.$$

从定理 5.5, 我们得到了 Bishop 和 Gromov 的体积比较定理.

对于曹怀东和周德堂的定理来说, 因为 M 是梯度收缩 Ricci 孤立子, 所以, $R_{ij} + f_{ij} = \frac{1}{2}g_{ij}$,

$$|\nabla f|^2 \leq f, \quad \Delta f - |\nabla f|^2 + f \leq \frac{n}{2}.$$

由定理 5.5, 我们得到了曹怀东和周德堂的定理.

对于我们的定理来说, 我们取 $f = \frac{|X|^2}{4} - \beta$, 得到 $|\nabla f|^2 \leq f$,

$$\Delta f - |\nabla f|^2 + f \leq \left(\frac{n}{2} + \frac{\lambda^2}{4} - \beta - \frac{\inf H^2}{4} \right).$$

由定理 5.5, 我们得到 Cheng-Wei 的定理.

定理 5.5 的证明 定义

$$I(t) = \frac{1}{t^k} \int_{D_r} e^{-\frac{f}{t}} dv, \quad t > 0,$$

可知

$$I'(t) = \frac{1}{t^{k+1}} \int_{D_r} \left(-k + \frac{f}{t} \right) e^{-\frac{f}{t}} dv.$$

对于 $t \geq 1$, 我们可以证明 $I'(t) \leq 0$. 事实上,

$$\begin{aligned} -t^{k+1} I'(t) &= \int_{D_r} \left(k - \frac{f}{t} \right) e^{-\frac{f}{t}} dv \\ &\geq \int_{D_r} \left(\Delta f - |\nabla f|^2 + \frac{t-1}{t} f \right) e^{-\frac{f}{t}} dv \\ &\geq \int_{D_r} \left(\Delta f - \frac{|\nabla f|^2}{t} \right) e^{-\frac{f}{t}} dv \\ &= \int_{D_r} \operatorname{div} \left(e^{-\frac{f}{t}} \nabla f \right) dv \\ &= \int_{\partial D_r} e^{-\frac{f}{t}} \left\langle \nabla f, \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right\rangle dv \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

因此, 对于 $r \geq 1$, 有

$$I(r^2) \leq I(1).$$

在 D_r 中, $f < \frac{r^2}{2}$, 有

$$W(r) = \int_{D_r} e^{-f} dv \geq r^{-2k} \int_{D_r} e^{-\frac{f}{r^2}} dv \geq e^{-\frac{1}{2}} r^{-2k} \int_{D_r} dv.$$

对于很大的 r 来说, 有

$$W(r) - W(r-1) = \int_{D_r \setminus D_{r-1}} e^{-f} dv \leq e^{-\frac{(r-1)^2}{2}} \int_{D_r} dv \leq e^{-r} W(r),$$

$$W(r) \leq \frac{1}{1 - e^{-r}} W(r-1).$$

对于任意整数 N , 有

$$W(r+N) \leq \prod_{j=0}^N \frac{1}{1 - e^{-(r+j)}} W(r) \leq cW(r).$$

这样, 我们得到 $W(\infty)$ 是有限的. 因此,

$$\text{Area}(D_r) \leq cr^{2k}.$$

证毕. □

5.2 完备 λ -超曲面面积增长的下界

Calabi 和丘成桐研究了 n 维完备非紧致的具有非负 Ricci 曲率的 Riemann 流形面积增长的下界, 证明了如下结论:

定理 5.6 n 维完备非紧致的具有非负 Ricci 曲率的 Riemann 流形上的测地球至少具有线性的面积增长:

$$\text{Area}(B_r(x_0)) \geq Cr.$$

Cao 和 Zhou^[22] 证明了 n 维完备非紧致的梯度收缩 Ricci 孤立子的面积不是有限的. 接着, Munteanu 和 Wang^[25] 证明了 n 维完备非紧致的梯度收缩 Ricci 孤立子至少具有线性的面积增长:

$$\text{Area}(B_r(x_0)) \geq Cr.$$

对于完备非紧致的 λ -超曲面, 我们在文献 [9] 中证明了如下结论:

定理 5.7 令 $X: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是 n 维完备拟紧的 λ -超曲面, 则对于任意点 $p \in M$, 都存在常数 $C > 0$ 使得对于所有的 $r > 1$, 有

$$\text{Area}(B_r(X(p)) \cap X(M)) \geq Cr.$$

注 5.2 我们定理中的估计是最优的, 因为当柱面为 $S^{n-1}(r_0) \times \mathbb{R}$ 时, 上述不等式变成了等式; 当 $\lambda = 0$ 时, 也就是对于自收缩子来说, 文献 [26] 证明了此结论.

致谢 作者对审稿人提出的意见和建议表示感谢.

参考文献

- 1 Huisken G. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. J Differential Geom, 1984, 20: 237–266
- 2 Grayson M A. A short note on the evolution of a surface by its mean curvature. Duke Math J, 1989, 58: 555–558
- 3 Cao H D, Li H. A gap theorem for self-shrinkers of the mean curvature flow in arbitrary codimension. Calc Var Partial Differential Equations, 2013, 46: 879–889
- 4 Cheng Q M, Peng Y. Complete self-shrinkers of the mean curvature flow. Calc Var Partial Differential Equations, 2015, 52: 497–506
- 5 Cheng Q M, Wei G. A gap theorem of self-shrinkers. Trans Amer Math Soc, 2015, 367: 4895–4915
- 6 Ding Q, Xin Y L. The rigidity theorems of self-shrinkers. Trans Amer Math Soc, 2014, 366: 5067–5085

- 7 Li H, Wei Y. Classification and rigidity of self-shrinkers in the mean curvature flow. *J Math Soc Japan*, 2014, 66: 709–734
- 8 Huisken G. The volume preserving mean curvature flow. *J Reine Angew Math*, 1987, 382: 35–48
- 9 Cheng Q M, Wei G. Complete λ -hypersurfaces of weighted volume-preserving mean curvature flow. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2018, 57: 32
- 10 Cheng Q M, Wei G. The Gauss image of λ -hypersurfaces and a Bernstein type problem. *ArXiv:1410.5302*, 2014
- 11 Cheng Q M, Ogata S, Wei G. Rigidity theorems of λ -hypersurfaces. *Comm Anal Geom*, 2016, 24: 45–58
- 12 Guang Q. Gap and rigidity theorems of λ -hypersurfaces. *ArXiv:1405.4871*, 2015
- 13 Lei L, Xu H W, Xu Z. A new pinching theorem for complete self-shrinkers and its generalization. *ArXiv:1712.01899*, 2017
- 14 Li X, Chang X. A rigidity theorem of ξ -submanifolds in $\mathbb{C}^2$. *Geom Dedicata*, 2016, 185: 155–169
- 15 Wang H, Xu H, Zhao E. Gap theorems for complete λ -hypersurfaces. *Pacific J Math*, 2017, 288: 453–474
- 16 Angenent S. Shrinking doughnuts. In: *Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States*, vol. 7. Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser, 1992, 21–38
- 17 Drugan G. An immersed S^2 self-shrinker. *Trans Amer Math Soc*, 2015, 367: 3139–3159
- 18 Møller N M. Closed self-shrinking surfaces in $\mathbb{R}^3$ via the torus. *ArXiv:1111.7318*, 2014
- 19 Cheng Q M, Wei G. Compact embedded λ -torus in Euclidean spaces. *ArXiv:1512.04752*, 2015
- 20 Colding T H, Minicozzi II W P. Generic mean curvature flow I: Generic singularities. *Ann of Math (2)*, 2012, 175: 755–833
- 21 Huisken G. Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow. *J Differential Geom*, 1990, 31: 285–299
- 22 Cao H D, Zhou D. On complete gradient shrinking Ricci solitons. *J Differential Geom*, 2010, 85: 175–186
- 23 Ding Q, Xin Y L. Volume growth, eigenvalue and compactness for self-shrinkers. *Asian J Math*, 2013, 17: 443–456
- 24 Cheng X, Zhou D. Volume estimate about shrinkers. *Proc Amer Math Soc*, 2013, 141: 687–696
- 25 Munteanu O, Wang J. Analysis of weighted Laplacian and applications to Ricci solitons. *Comm Anal Geom*, 2012, 20: 55–94
- 26 Li H, Wei Y. Lower volume growth estimates for self-shrinkers of mean curvature flow. *Proc Amer Math Soc*, 2014, 142: 3237–3248

Geometry of complete λ -hypersurfaces

Qingming Cheng & Guoxin Wei

Abstract In this paper, we give a survey on complete λ -hypersurfaces and consider the construction of λ -hypersurfaces, stability of λ -hypersurfaces, classification and area growth of complete λ -hypersurfaces.

Keywords mean curvature flow, λ -hypersurfaces, area growth

MSC(2010) 53C44, 53C42

doi: 10.1360/N012017-00205