强度 3 的混合正交表的构造

陈光周^{1,2}, 雷建国^{1*}

1. 河北师范大学数学与信息科学学院, 石家庄 050024;

2. 河南师范大学数学与信息科学学院和大数据统计分析与优化控制河南省工程实验室, 新乡 453007

E-mail: chenguangzhou0808@163.com, leijg1964@aliyun.com

收稿日期: 2015-9-23; 接受日期: 2016-2-22; 网络出版日期: 2016-08-31; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371121 和 11501181)、河南省高等学校重点科研项目计划 (批准号: 15A110029)、河南师范大学青年科学基金 (批准号: 2014QK05) 和博士启动基金 (批准号: qd14140) 资助项目

摘要 对称正交表和混合正交表不仅在试验设计中有着重要的应用价值, 而且它们也是构造其他组合构形的强有力工具. 本文首先讨论了强度为 3 的差阵, 得到了一些差阵的新结果, 并且利用差阵和 Hadamard 矩阵给出了强度 3 的混合正交表的新的构造方法. 作为应用, 本文得到了一批新的强度 3 的混合正交表, 并且有一部分是紧的.

关键词 混合正交表 非对称 差阵 Hadamard 矩阵 Kronecker 和

MSC (2010) 主题分类 05B15, 62K15

1 引言

对称正交表和混合 (或非对称) 正交表不仅在试验设计中有着重要的应用价值, 而且它们也是构造其他组合构形的强有力工具. 对称正交表已经被广泛研究, 有许多的构造方法和已知结果, 可参见专著 [1,2] 和组合设计手册 [3]. 由于因子水平选择的多样性, 在实际应用中具有不同水平的因子试验会经常遇到, 混合 (或非对称) 正交表正是满足这些性质而被用于该类因子试验设计中. 混合正交表首先由统计学家 Rao^[4] 引入, 近年来得到了许多学者的关注, 这类正交表在非对称因子的普遍最优分式设计起着重要作用 (参见文献 [5,6]). 此外, 混合正交表在工业、农业和制造业等试验中都有着广泛的应用 (参见文献 [7-9]).

强度 2 的混合正交表已经被广泛研究, 参见文献 [1,3,10-15] 及相关参考文献, 而强度大于 2 的混合正交表的构造方法和存在结果却较少, 对于已知的构造方法和结果, 读者可参见专著 [2] 和文献 [16-21].

一个混合 (或非对称) 正交表 (mixed (or asymmetric) orthogonal array, MOA), 简记为 $\text{MOA}(N, s_1 s_2 \cdots s_k, t)$, 是一个 $N \times k$ 矩阵, 其第 i 列的元素取自 s_i -元集 S_i , $1 \leq i \leq k$, 且满足对于它的任意 $N \times t$ 子阵, 每一个可能的 t -元组作为行都出现相同的次数. 在一个 $\text{MOA}(N, s_1 s_2 \cdots s_k, t)$ 中, 行被称为运行, 因此, N 是混合正交表 MOA 的运行次数, 也称为它的大小. 集合 S_i ($1 \leq i \leq k$) 称为一个因

英文引用格式: Chen G Z, Lei J G. Constructions of mixed orthogonal arrays of strength three (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 545-564, doi: 10.1360/012016-23

子, k 是因子数. 进一步, s_i 称为第 i 个因子的水平数, $s_1 s_2 \cdots s_k$ 称为 MOA 的型. 参数 t ($\leq k$) 称为强度.

显然, 一个 $\text{MOA}(N, s_1 s_2 \cdots s_k, t)$ 的大小 N 能被所有 $\prod_{i \in I} s_i$ 的最小公倍数整除, 其中 $I \subset \{1, 2, \dots, k\}$ 且 $|I| = t$. 一个 $\text{MOA}(N, s_1 s_2 \cdots s_k, t)$ 称为平凡的, 若每一个可能的 k -元组作为行出现相同的次数. 两个 MOA 称为同构的, 若一个 MOA 可以通过置换另一个 MOA 的行、列或者每列中的元素得到.

在一个 $\text{MOA}(N, s_1 s_2 \cdots s_k, t)$ 中, 水平数 $s_1, s_2, \dots, s_k$ 没必要互不相同. 通常把相同的 s_l 进行合并, 如把 $2^2 2^3 3^2$ 写成 $2^5 3^2$. 当 $s_1 = s_2 = \cdots = s_k = s$ 时, 一个 $\text{MOA}(N, s^k, t)$ 恰是一个对称正交表 (orthogonal array, OA), 通常记为 $\text{OA}(N, k, s, t)$. 对称正交表和混合 (或非对称) 正交表统称为正交表.

关于一个 MOA 的大小的下界, 有以下结论 (参见文献 [1, 2]).

定理 1.1 ^[1, 2] 假设一个 $\text{MOA}(N, s_1 s_2 \cdots s_k, t)$ 存在, 其中 $1 \leq t \leq k$.

(i) 若 t 是偶数, 则

$$N \geq 1 + \sum_{j=1}^{t/2} \sum_{|I|=j} \prod_{i \in I} (s_i - 1);$$

(ii) 若 t 是奇数, 则 N 的一个下界可以利用它的导出设计 $\text{MOA}(\frac{N}{s_k}, s_1 s_2 \cdots s_{k-1}, t-1)$ 得到, 其中 $s_k = \max\{s_i : 1 \leq i \leq k\}$.

本文主要研究强度 3 的混合正交表的构造. 由定理 1 知, 一个 $\text{MOA}(N, s_1 s_2 \cdots s_k, 3)$ 的大小满足

$$N \geq 1 + \sum_{i=1}^k (s_i - 1) + (s^* - 1) \left[\sum_{i=1}^k (s_i - 1) - (s^* - 1) \right],$$

其中 $s^* = \max\{s_i : 1 \leq i \leq k\}$. 若一个强度 3 的混合正交表的大小达到这个界值, 则称它是紧的 (或饱和的).

本文安排如下: 第 2 节引入了混合差阵的概念并且得到了一些差阵的新结果; 第 3 节利用差阵给出了强度 3 的正交表的构造方法, 通过应用这些构造得到了一些新的对称正交表和混合正交表; 第 4 节利用 Hadamard 矩阵给出了强度 3 的混合正交表的新构造方法, 通过应用这些构造得到了一些新的混合正交表, 并且这些正交表是紧的; 最后一节进行了总结.

2 差阵的存在性

本节引入了强度 t 的混合差阵的概念, 得到了一些强度 t 的差阵的新结果.

为了定义混合差阵首先需要引进一些符号. 设 $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$, 其中 G_i 是 s_i ($1 \leq i \leq k$) 阶 Abel 群, G_0 是 G 的一个子群,

$$G_0^{(i_1, i_2, \dots, i_t)} = G_0 |_{G_{i_1} \times G_{i_2} \times \cdots \times G_{i_t}},$$

即 G_0 在 $G_{i_1} \times G_{i_2} \times \cdots \times G_{i_t}$ 上的限制, 其中 $\{i_1, i_2, \dots, i_t\} \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$.

在 G 上关于 G_0 的一个混合差阵 (mixed difference matrix, MDM), 记为在 (G, G_0) 上的一个 $\text{MDM}_t(r, k, s_1 s_2 \cdots s_k)$, 是一个 $r \times k$ 矩阵, 其第 i 列的元素取自 G_i , $1 \leq i \leq k$, 满足对任意 t 列 $i_1, i_2, \dots, i_t, \{i_1, i_2, \dots, i_t\} \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$, $(G_{i_1} \times G_{i_2} \times \cdots \times G_{i_t})/G_0^{(i_1, i_2, \dots, i_t)}$ 的每一个陪集代表元作为行出现的次数相同.

为了说明混合差阵的定义, 我们给出一个例子如下.

例 2.1 令 $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$ 和 $G_0 = \langle (1, 1, 1, 1, 1) \rangle$. 令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

容易验证 A^T 是 (G, G_0) 上的一个 $\text{MDM}_3(8, 5, 2^2 4^1 6^1 8^1)$, 这里 A^T 表示 A 的转置.

引理 2.2 假设 $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$, 其中 G_i 是一个 s_i ($1 \leq i \leq k$) 阶 Abel 群, 并且 G_0 是 G 的一个 n 阶子群. 若在 (G, G_0) 上存在一个 $\text{MDM}_t(r, k, s_1 s_2 \cdots s_k)$, 则存在一个 $\text{MOA}(nr, s_1 s_2 \cdots s_k, t)$.

证明 设 A 是 (G, G_0) 上的一个 $\text{MDM}_t(r, k, s_1 s_2 \cdots s_k)$. 令 B 是由 G_0 去作用 A 的每一行得到的, 也就是说, A 的每一行 $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 由 n 行 $(x_1 + g_1, x_2 + g_2, \dots, x_k + g_k)$ 去代替, 其中 $(g_1, g_2, \dots, g_k) \in G_0$. 则根据 MOA 和 MDM 的定义可知 B 是一个 $\text{MOA}(nr, s_1 s_2 \cdots s_k, t)$. $\square$

例 2.3 由例 2.1 和引理 2.2 可知, 存在一个 $\text{MOA}(192, 2^2 4^1 6^1 8^1, 3)$.

当 $G_1 = G_2 = \cdots = G_k = S$, $s_1 = s_2 = \cdots = s_k = s$, 设 G_0 是 $G = S^k$ 的一个子群, 在 (G, G_0) 上的 $\text{MDM}_t(r, k, s_1 s_2 \cdots s_k)$ 简记为在 (G, G_0) 上的 $\text{D}_t(r, k, s)$.

对 $G = S^k$, 其中 S 是一个 s 阶 Abel 群. 令

$$E_2 = \{(\underbrace{g, g, \dots, g}_{k-2}, 0, 0) : g \in S\}, \quad E'_2 = \{(0, 0, \underbrace{g, \dots, g}_{k-2}) : g \in S\},$$

显然, E_2 和 E'_2 都是 G 的子群. 设 D 是 (G, E_2) 上的一个差阵 $\text{D}_t(r, k, s)$, 若交换 D 的前两列和最后两列得到矩阵 D' , 则 D' 也是 (G, E'_2) 上的一个差阵 $\text{D}_t(r, k, s)$. 在这里, 我们把 E_2 和 E'_2 看成 G 的同一个子群, 这是因为用 E_2 去作用 D 的每一行得到的正交表与用 E'_2 去作用 D' 的每一行得到的正交表同构.

设 E 是 $G = S^k$ 的一个 s 阶子群, D 是 (G, E) 上的一个差阵 $\text{D}_t(r, k, s)$, 若存在子集 $\{i_1, i_2, \dots, i_t\} \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ 使得对任意 $i_j \in \{i_1, i_2, \dots, i_t\}$ 有 $E^{(i_j)} = E|_{G_{i_j}} = \{0\}$, 则 S^t 的每一个元素作为行在 D 的该 t 列 $i_1, i_2, \dots, i_t$ 中出现的次数相同, 称这样的差阵为平凡的. 因此, 对于非平凡的差阵, 根据使得 $E^{(i_j)} = \{0\}$ 的 i_j ($i_j \in \{1, 2, \dots, k\}$) 的个数, 这样的子群有 t 种情形, 并且 E 在 G 中的阶是 s 且 $E^{(i_1, i_2, \dots, i_t)}$ 在 S^t 中的阶也是 s , 其中 $\{i_1, i_2, \dots, i_t\} \subseteq \{1, 2, 3, \dots, k\}$. 不失一般性, 将它们写成以下形式:

$$\begin{aligned} E_0(k) &= \{(\underbrace{g, g, \dots, g}_k) : g \in S\}, & E_1(k) &= \{(\underbrace{g, g, \dots, g}_{k-1}, 0) : g \in S\}, \\ E_2(k) &= \{(\underbrace{g, g, \dots, g}_{k-2}, 0, 0) : g \in S\}, & \dots, & & E_{t-1}(k) &= \{(\underbrace{g, g, \dots, g}_{k-t+1}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{t-1}) : g \in S\}. \end{aligned}$$

由差阵的定义, 我们有下面的引理.

引理 2.4 若 $D = (d_{ij})$ ($1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq k$) 是 $(G, E_m(k))$ 上的一个差阵 $\text{D}_t(r, k, s)$, $0 \leq m \leq t-1$, 则有下列性质:

- (i) $\frac{r}{s^{t-1}}$ 一定是一个整数;
- (ii) 若 D 的行或前 $k-m$ 列或后 m 列作置换, 得到的结果仍是 $(G, E_m(k))$ 上的一个差阵 $D_t(r, k, s)$, $0 \leq m \leq t-1$;
- (iii) 对任意的 u , $1 \leq u \leq t$, D 也是 $(G, E_m(k))$ 上的一个差阵 $D_u(r, k, s)$, $0 \leq m \leq u-1$;
- (iv) 对一个固定的 l , $1 \leq l \leq k-m$, 令

$$d_{ij}^* = \begin{cases} d_{ij} - d_{il}, & 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq k-m, \\ d_{ij}, & 1 \leq i \leq r, \quad k-m+1 \leq j \leq k, \end{cases}$$

则 $D^* = (d_{ij}^*)$ 也是 $(G, E_m(k))$ 上的一个差阵 $D_t(r, k, s)$, $0 \leq m \leq t-1$.

由上面的性质 (iv), 总是可以假设一个差阵的第一列的元素全为 S 的零元素 0, 因此我们有下面的结论.

引理 2.5 在 $(G, E_m(k))$ 上的一个差阵 $D_t(r, k, s)$ ($0 \leq m \leq t-1$) 总是可以写成 $D = (\mathbf{0}, A)$, 其中 $\mathbf{0}$ 是一个 $r \times 1$ 全 0 列向量. A 既是 $(G', E_m(k-1))$ 上的一个差阵 $D_t(r, k-1, s)$, 也是 S 上的一个 $OA(r, k-1, s, t-1)$, 其中 $0 \leq m \leq t-1$, $G' = S^{k-1}$, $E_m(k-1) = E_m(k)^{(2,3,\dots,k)}$.

引理 2.6 设 $0 \leq n \leq m \leq t-1$. 若在 $(G, E_m(k))$ 上存在一个差阵 $D_t(r, k, s)$, 则在 $(S^{k-n}, E_{m-n}(k-n))$ 上存在一个差阵 $D_t(r, k-n, s)$.

证明 在 $(G, E_m(k))$ 上的差阵 $D_t(r, k, s)$ 中删掉最后 n 列就得到 $(S^{k-n}, E_{m-n}(k-n))$ 上的一个差阵 $D_t(r, k-n, s)$. $\square$

由引理 2.2, 我们可以得到下面的推论.

推论 2.7 若在 $(G, E_m(k))$ 上存在一个差阵 $D_t(r, k, s)$, $0 \leq m \leq t-1$, 则存在一个 $OA(sr, k, s, t)$. 对于对称正交表的最大因子数的上界, Bush^[22] 证明了下面结论.

引理 2.8 ^[1,3,22] 设 $t > 1$, 若一个 $OA(s^t, k, s, t)$ 存在, 则

$$\begin{cases} s+t-1, & s \equiv 0 \pmod{2}, \quad t < s, \\ s+t-2, & s \equiv 1 \pmod{2}, \quad 3 \leq t < s, \\ t+1, & t \geq s. \end{cases}$$

推论 2.9 设 $t > 1$ 和 $0 \leq m \leq t-1$, 若在 $(G, E_m(k))$ 上存在一个差阵 $D_t(s^{t-1}, k, s)$, 则

$$k \leq \begin{cases} s+t-1, & s \equiv 0 \pmod{2}, \quad t < s, \\ s+t-2, & s \equiv 1 \pmod{2}, \quad 3 \leq t < s, \\ t+1, & t \geq s. \end{cases}$$

证明 由假设, 在 $(G, E_m(k))$ 上存在一个差阵 $D_t(s^{t-1}, k, s)$, $0 \leq m \leq t-1$, 则由推论 2.7 知存在一个 $OA(s^t, k, s, t)$. 再由引理 2.8 得结论成立. $\square$

一般地, 若取 $E_0(k)$ 作为 $G = S^k$ 的子群, 则在 $(G, E_0(k))$ 上强度 t 的差阵的概念就是文献 [1,23] 所给出的, 在这里, 我们使用符号“在 S 上的差阵 $D_t(r, k, s)$ ”来表示. 对 $t=2$, 在 S 上的差阵 $D_2(r, k, s)$ 就是通常所说的差阵 (difference matrix, DM), 由 Bose 和 Bush^[24] 引入, 也记为在 S 上的 (s, k, λ) -DM, 其中 $\lambda = \frac{r}{s}$.

关于在 S (即 $(G, E_0(k))$) 上的差阵 $D_t(r, k, s)$ 的已知结果, 读者可以参见文献 [1,3,23,25-27]. 在这里, 我们仅列出本文中要用到的一些差阵的结论. 设 $\mathbb{F}_s$ 是有 s 个元的有限域, S 是 s 阶 Abel 群.

引理 2.10 ^[3] (i) 有限域 $\mathbb{F}_s$ 的乘法表是一个在 $\mathbb{F}_s$ 上的 $(s, s, 1)$ -DM;

(ii) 若在 S 上存在一个 $(s, k, 1)$ -DM, 则 $k \leq s$.

引理 2.11 ^[26] 当 $s \equiv 2 \pmod{4}$ 且 $k \geq 3$ 时, 则在 S 上不存在 $(s, k, 1)$ -DM.

引理 2.12 ^[23] (i) 若 $s \leq t$ 且 t 是奇数, 则在 S 上存在一个差阵 $D_t(s^{t-1}, t+1, s)$;

(ii) 若 $s \not\equiv 2 \pmod{4}$, 则在 S 上存在一个差阵 $D_t(s^{t-1}, t+1, s)$.

引理 2.13 ^[23] 假设存在一个 s 阶可交换环 R , 其单位元是 1, 若在 R 中存在元 $g_1, \dots, g_{t-1}$, 这些元没有必要互不相同, 满足如下性质:

(i) 所有 g_j 都有乘法逆;

(ii) $1 - \sum_{j=1}^{t-1} g_j$ 有一个乘法逆,

则在 R 上存在一个差阵 $D_t(s^{t-1}, t+1, s)$.

推论 2.14 对任意 $s \geq 2$, 在 $\mathbb{Z}_s$ 上存在一个差阵 $D_3(s^2, 4, s)$.

证明 对每一个 $s \geq 2$, 取 $R = \mathbb{Z}_s$ 和 $g_1 = g_2 = 1$, 则引理 2.13 中的条件满足, 从而结论得证. $\square$

引理 2.15 ^[23] (i) 若在 S 上存在一个差阵 $D_3(r_1, k_1, s)$ 和一个差阵 $D_3(r_2, k_2, s)$, 则在 S 上存在一个差阵 $D_3(r_1 r_2, k_1 k_2, s)$;

(ii) 设 S_1 和 S_2 分别是阶为 s_1 和 s_2 的 Abel 群. 若在 S_1 上存在一个差阵 $D_t(r_1, k, s_1)$ 和在 S_2 上存在一个差阵 $D_t(r_2, k, s_2)$, 则在 $S_1 \times S_2$ 上存在一个差阵 $D_t(r_1 r_2, k, s_1 s_2)$.

引理 2.16 对任意素数幂 s , 设

$$G = \mathbb{F}_s^{s+1}, \quad E_1(s+1) = \{(\underbrace{g, g, \dots, g}_s, 0) : g \in \mathbb{F}_s\},$$

则在 $(G, E_1(s+1))$ 上存在一个差阵 $D_t(s^{t-1}, s+1, s)$.

证明 令 $\mathcal{A} = \{f(x) = a_{t-1}x^{t-1} + a_{t-2}x^{t-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x : a_i \in \mathbb{F}_s, 1 \leq i \leq t-1\}$, 则有 $|\mathcal{A}| = s^{t-1}$. 首先构造一个 $s^{t-1} \times s$ 阵列, 它的行标用 $\mathcal{A}$ 中的 s^{t-1} 个多项式来标号, 列标用 $\mathbb{F}_s = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s\}$ 来标号. 把这些多项式记为 $f_1, f_2, \dots, f_{s^{t-1}}$. 这个阵中行标为 f_i 列标为 α_j 的位置的元定义为 $f_i(\alpha_j)$, 也就是说行标为 f_i 列标为 α_j 的位置的元为 f_i 在点 α_j 的值. 记 $A = (a_{ij}), 1 \leq i \leq s^{t-1}, 1 \leq j \leq s$, 其中 $a_{ij} = f_i(\alpha_j)$. 令 c_i 是多项式 f_i 中 x^{t-1} 的系数且令 $B = (b_{uv}), 1 \leq u \leq s^{t-1}, 1 \leq v \leq s+1$, 其中

$$b_{uv} = \begin{cases} a_{uv}, & 1 \leq u \leq s^{t-1}, \quad 1 \leq v \leq s, \\ c_u, & 1 \leq u \leq s^{t-1}, \quad v = s+1. \end{cases}$$

接下来证明 B 是 $(G, E_1(s+1))$ 上的差阵 $D_t(s^{t-1}, s+1, s)$, 其中

$$G = \mathbb{F}_s^{s+1}, \quad E_1(s+1) = \{(\underbrace{g, g, \dots, g}_s, 0) : g \in \mathbb{F}_s\}.$$

用 $E_1(s+1)$ 去作用 B 的每一行得到阵列 C . 要证 B 是 $(G, E_1(s+1))$ 上的一个差阵 $D_t(s^{t-1}, s+1, s)$, 也就是要证 C 是一个 $OA(s^t, s+1, s, t)$. 而由文献 [22] 中 Bush 构造 (或专著 [1, 定理 3.1]) 知, C 是一个 $OA(s^t, s+1, s, t)$, 即结论得证. $\square$

引理 2.17 对任意偶素数幂 s , 令

$$G = \mathbb{F}_s^{s+2}, \quad E_2(s+2) = \{(\underbrace{g, g, \dots, g}_s, 0, 0) : g \in \mathbb{F}_s\},$$

则在 $(G, E_2(s+2))$ 上存在一个 $D_3(s^2, s+2, s)$.

证明 在上述引理的证明中令 $t=3$, $B=(b_{uv})$, $1 \leq u \leq s^2$, $1 \leq v \leq s+1$, 且令 d_u 是多项式 f_u 中 x 的系数. 构造矩阵 $D=(d_{mn})$, $1 \leq m \leq s^2$, $1 \leq n \leq s+2$, 其中

$$d_{mn} = \begin{cases} b_{mn}, & 1 \leq m \leq s^2, \quad 1 \leq n \leq s+1, \\ d_m, & 1 \leq m \leq s^2, \quad n = s+2. \end{cases}$$

类似引理 2.16 的验证过程, 可知 D 是 $(G, E_2(s+2))$ 上的一个差阵 $D_3(s^2, s+2, s)$, 其中

$$G = \mathbb{F}_s^{s+2}, \quad E_2(s+2) = \{(\underbrace{g, g, \dots, g}_s, 0, 0) : g \in \mathbb{F}_s\}. \quad \square$$

由引理 2.6、2.16 和 2.17, 我们有下面结论.

定理 2.18 对任意素数幂 s , 在 $\mathbb{F}_s$ (即 $(\mathbb{F}_s^s, E_0(s))$) 上存在一个差阵 $D_3(s^2, s, s)$, 在 $(\mathbb{F}_s^{s+1}, E_1(s+1))$ 上存在一个差阵 $D_3(s^2, s+1, s)$.

定理 2.19 设 S 是一个 s 阶 Abel 群, 若在 $(S^{k+m}, E_m(k+m))$ 上存在一个差阵 $D_3(s^2, k+m, s)$, $m=1, 2$, 则在 S 上存在一个 $(s, k, 1)$ -DM.

证明 由引理 2.6, 在 $(S^{k+2}, E_2(k+2))$ 上的差阵 $D_3(s^2, k+2, s)$ 中删掉最后一列就能得到 $(S^{k+1}, E_1(k+1))$ 上的一个差阵 $D_3(s^2, k+1, s)$. 因此要证明定理, 只需证明若在 $(S^{k+1}, E_1(k+1))$ 上存在一个差阵 $D_3(s^2, k+1, s)$, 则在 S 上存在一个 $(s, k, 1)$ -DM 即可.

假设 A 是 $(S^{k+1}, E_1(k+1))$ 上的一个差阵 $D_3(s^2, k+1, s)$ 且 A 的第一列都是 0. 用 $E_1(k+1)$ 作用 A 的每一行则得到一个 $OA(s^3, k+1, s, 3)$, 记为 C , 其中 A 的最后一列在 $E_1(k+1)$ 的作用下保持不动. 将 A 写成

$$A = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{s-1} \end{pmatrix},$$

其中

$$A_l = \begin{pmatrix} 0 & a_{0,1}^{(l)} & a_{0,2}^{(l)} & a_{0,3}^{(l)} & \cdots & a_{0,k-1}^{(l)} & l \\ 0 & a_{1,1}^{(l)} & a_{1,2}^{(l)} & a_{1,3}^{(l)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(l)} & l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{s-1,1}^{(l)} & a_{s-1,2}^{(l)} & a_{s-1,3}^{(l)} & \cdots & a_{s-1,k-1}^{(l)} & l \end{pmatrix}, \quad 0 \leq l \leq s-1.$$

因为 A 的最后 k 列构成一个 $OA(s^2, k, s, 2)$, 则有 $\{a_{i,j}^{(l)} : 0 \leq i \leq s-1\} = S$, $1 \leq j \leq k-1$. 接下来将证明

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_{0,1}^{(l)} & a_{0,2}^{(l)} & a_{0,3}^{(l)} & \cdots & a_{0,k-1}^{(l)} \\ 0 & a_{1,1}^{(l)} & a_{1,2}^{(l)} & a_{1,3}^{(l)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{s-1,1}^{(l)} & a_{s-1,2}^{(l)} & a_{s-1,3}^{(l)} & \cdots & a_{s-1,k-1}^{(l)} \end{pmatrix}$$

是 S 上的一个 $(s, k, 1)$ -DM. 只需要证明

$$\{a_{i,m}^{(l)} - a_{i,n}^{(l)} : 0 \leq i \leq s-1\} = S, \quad 1 \leq n < m \leq k-1.$$

若 $\{a_{i,m}^{(l)} - a_{i,n}^{(l)} : 0 \leq i \leq s-1\} \neq S$, 则存在一个元 $g' \in S$ 使得 $a_{i,m}^{(l)} - a_{i,n}^{(l)} = g'$ 至少有两个解 $(a_{i_1,m}^{(l)}, a_{i_1,n}^{(l)})$ 和 $(a_{i_2,m}^{(l)}, a_{i_2,n}^{(l)})$, $i_1 \neq i_2$. 因此, 来自 A 的第 $m+1$ 、 $n+1$ 列和最后一列的满足 $x-y = g'$ 的 3 元组 (x, y, l) 在 C 中至少出现两次, 这与 C 是一个 $\text{OA}(s^3, k+1, s, 3)$ 矛盾. 所以一定有 $\{a_{i,m}^{(l)} - a_{i,n}^{(l)} : 0 \leq i \leq s-1\} = S$, 故 B 是 S 上的一个 $(s, k, 1)$ -DM. $\square$

推论 2.20 对于任意正整数 s , 在 $(G, E_1(s+2))$ 上不存在差阵 $D_3(s^2, s+2, s)$.

证明 由定理 2.19, 若在 $(G, E_1(s+2))$ 上存在一个差阵 $D_3(s^2, s+2, s)$, 则在 S 上存在一个 $(s, s+1, 1)$ -DM, 这与引理 2.10(ii) 矛盾. 因此在 $(G, E_1(s+2))$ 上不存在差阵 $D_3(s^2, s+2, s)$. $\square$

在 2010 年, Ji 和 Yin [28] 证明了下面结论.

引理 2.21 [28] (i) 若 $s \not\equiv 2 \pmod{4}$ 且 $s > 3$, 则在 $(G, E_m(5))$ 上存在一个差阵 $D_3(s^2, 5, s)$, 其中 $m = 1, 2$;

(ii) 若一个正整数 s 满足 $\text{g.c.d.}\{s, 4\} \neq 2$ 且 $\text{g.c.d.}\{s, 18\} \neq 3$, 其中 g.c.d. 表示最大公因子 (greatest common divisor), 则在 $(G, E_2(6))$ 上存在一个差阵 $D_3(s^2, 6, s)$.

对于 $s \equiv 2 \pmod{4}$, 由定理 2.19 和引理 2.11, 我们有以下结论.

推论 2.22 若 $s \equiv 2 \pmod{4}$, 则在 $(G, E_m(5))$ 上不存在差阵 $D_3(s^2, 5, s)$, $m = 1, 2$.

3 差阵构造法

本节将通过使用差阵来给出强度 3 的正交表的新的构造方法以及应用这些构造得到的新正交表. 令 S 一个是 s 阶 Abel 群,

$$G = S^k, \quad E_0(k) = \{(\underbrace{g, g, \dots, g}_k) : g \in S\},$$

本节所用到的差阵都在 S 上 (也就是在 $(G, E_0(k))$ 上的差阵). 有许多学者利用 Kronecker 和与广义 Kronecker 和来构造强度 2 的混合正交表, 如文献 [14, 29, 30]. 在此我们也将利用 Kronecker 和与广义 Kronecker 和来构造强度 3 的混合正交表.

对于 s 阶 Abel 群 S 上的矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 和 $B = (b_{ij})_{u \times v}$, 定义它们的 Kronecker 和为

$$A \oplus B = (B^{a_{ij}})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n},$$

其中 B^a 表示将 a 加到 B 的每一个元素上, 即

$$B^a = \begin{pmatrix} b_{11} + a & b_{12} + a & \cdots & b_{1v} + a \\ b_{21} + a & b_{22} + a & \cdots & b_{2v} + a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{u1} + a & b_{u2} + a & \cdots & b_{uv} + a \end{pmatrix}.$$

为了描述下面的构造, 需要广义 Kronecker 和的定义. 设

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n), \quad B = (B_1, B_2, \dots, B_n),$$

其中对于每一个 i , A_i 和 B_i 的元素都是来自 s_i 阶 Abel 群 S_i . 定义 A 和 B 的广义 Kronecker 和, 记为 $A \oplus B$,

$$A \oplus B = (A_1 \oplus B_1, A_2 \oplus B_2, \dots, A_n \oplus B_n).$$

引理 3.1 若 $D = (d_{ij})$ 是 S 上的一个差阵 $D_3(r, k, s)$, 则对于给定的 c_1 和 c_2 ($1 \leq c_1 \neq c_2 \leq k$), 以及任意的 $x \in S$, 存在 $\frac{r}{s}$ 个 i 值满足 $d_{ic_2} - d_{ic_1} = x$.

证明 设 $D = (d_{ij})$ 是 S 上的一个差阵 $D_3(r, k, s)$, 则由引理 2.3, $D = (d_{ij})$ 也是 S 上的一个差阵 $D_2(r, k, s)$ (即 S 上的 $(r, k, \lambda = \frac{r}{s})$ -DM). 从而由差阵的定义知结论成立. $\square$

由差阵的定义和推论 2.7 知下面的结论是显然的.

引理 3.2 设 D 是 S 上的一个差阵 $D_3(r, k, s)$. 若存在一个列向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T$ 满足对任意元素 $x \in S$ 在多重集 $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ 中出现 $\frac{N}{s}$ 次, 则 $\alpha \oplus D$ 是 S 上的一个 $OA(Nr, k, s, 3)$.

引理 3.3 设 D_1 是 S_1 上的一个差阵 $D_3(r, k_1, s_1)$, D_2 是 S_2 上的一个差阵 $D_3(r, k_2, s_2)$. 若存在一个 $N \times 2$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_N \end{pmatrix}^T, \quad a_i \in S_1, \quad b_i \in S_2, \quad 1 \leq i \leq N,$$

具有任意 $(x, y) \in S_1 \times S_2$ 作为行在 A 中出现 $\frac{N}{s_1 s_2}$ 次, 则 $A \oplus (D_1 \ D_2) = (\alpha_1 \oplus D_1 \ \alpha_2 \oplus D_2)$ 是一个 $MOA(Nr, s_1^{k_1} s_2^{k_2}, 3)$.

证明 设 $D = (\alpha_1 \oplus D_1 \ \alpha_2 \oplus D_2) = (d_{ij})$, $1 \leq i \leq Nr$, $1 \leq j \leq k_1 + k_2$, β_1 、 β_2 和 β_3 是 D 的 3 个不同的列. 因为任意 $(x, y) \in S_1 \times S_2$ 作为行在 A 中出现 $\frac{N}{s_1 s_2}$ 次, 则有任何元素 $x \in S_i$ 在 α_i 中出现 $\frac{N}{s_i}$ 次, $i = 1, 2$.

若 β_1 、 β_2 和 β_3 取自子阵 $\alpha_i \oplus D_i$, $i = 1, 2$, 则由引理 3.2 得任意 3 元组 $(x, y, z) \in S_i \times S_i \times S_i$ 作为行在 $(\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)$ 中出现的次数为 $\frac{Nr}{s_i^3}$.

若 β_1 和 β_2 取自子阵 $\alpha_1 \oplus D_1$, 且 β_3 取自子阵 $\alpha_2 \oplus D_2$, 则任意 3 元组 $(x, y, z) \in S_1 \times S_1 \times S_2$ 作为行在 $(\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)$ 中出现的次数等于满足方程组

$$\begin{cases} a_u + d_{vc_1} = x, \\ a_u + d_{vc_2} = y, \\ b_u + d_{vc_3} = z \end{cases} \quad (*)$$

的点对 (u, v) 的个数. 因为 D_1 是 S_1 上的一个差阵 $D_3(r, k_1, s_1)$, 由引理 3.1 可知, 存在 $\frac{r}{s_1}$ 个 v 满足

$$d_{vc_2} - d_{vc_1} = y - x.$$

对于每一个 v , 存在 $\frac{N}{s_1 s_2}$ 个点对 (a_u, b_u) 满足 (*) 是因为有 $\frac{N}{s_1 s_2}$ 个点对 (a_u, b_u) 作为行在 A 中出现. 因此共有 $\frac{Nr}{s_1^2 s_2}$ 个点对 (u, v) 满足 (*).

若 β_1 和 β_2 取自子阵 $\alpha_2 \oplus D_2$, β_3 取自子阵 $\alpha_1 \oplus D_1$. 验证过程同上. $\square$

引理 3.4 设 D_1 是 S_1 上的一个差阵 $D_3(r, k_1, s_1)$, D_2 是 S_2 上的一个差阵 $D_3(r, k_2, s_2)$ 且 D_3 是 S_3 上的一个差阵 $D_3(r, k_3, s_3)$. 若存在一个 $N \times 3$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_N \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_N \end{pmatrix}^T, \quad a_i \in S_1, \quad b_i \in S_2, \quad c_i \in S_3, \quad 1 \leq i \leq N,$$

满足任意 3 元组 $(x, y, z) \in S_1 \times S_2 \times S_3$ 作为行在 A 中都出现 $\frac{N}{s_1 s_2 s_3}$ 次, 则

$$A \oplus (D_1 \ D_2 \ D_3) = (\alpha_1 \oplus D_1 \ \alpha_2 \oplus D_2 \ \alpha_3 \oplus D_3)$$

是一个 $\text{MOA}(Nr, s_1^{k_1} s_2^{k_2} s_3^{k_3}, 3)$.

证明 令 $D = (\alpha_1 \oplus D_1 \ \alpha_2 \oplus D_2 \ \alpha_3 \oplus D_3) = (d_{ij})$, $1 \leq i \leq Nr$, $1 \leq j \leq k_1 + k_2 + k_3$, 且 β_1, β_2 和 β_3 是 D 的 3 个不同列. 因为任意 3 元组 $(x, y, z) \in S_1 \times S_2 \times S_3$ 作为行在 A 中出现 $\frac{N}{s_1 s_2 s_3}$ 次, 则一定有任意元素 $x \in S_i$ 在 α_i 中出现 $\frac{N}{s_i}$ 次, $i = 1, 2, 3$, 任意点对 $(x, y) \in S_i \times S_j$ 作为行在 $(\alpha_i \ \alpha_j)$ 中出现 $\frac{N}{s_i s_j}$ 次, $1 \leq i < j \leq 3$.

若 β_1, β_2 和 β_3 都取自子阵 $\alpha_i \oplus D_i$, $i = 1, 2, 3$, 则由引理 3.2 得任意 3 元组 $(x, y, z) \in S_i \times S_i \times S_i$ 作为行在 $(\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)$ 中出现的次数是 $\frac{Nr}{s_i^3}$.

若 β_1 和 β_2 取自子阵 $\alpha_i \oplus D_i$, β_3 取自子阵 $\alpha_j \oplus D_j$, $1 \leq i \neq j \leq 3$, 则由引理 3.3 得任意 3 元组 $(x, y, z) \in S_i \times S_i \times S_j$ 作为行在 $(\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)$ 中出现的次数是 $\frac{Nr}{s_i^2 s_j}$.

若 β_1 取自子阵 $\alpha_1 \oplus D_1$, β_2 取自子阵 $\alpha_2 \oplus D_2$, β_3 取自子阵 $\alpha_3 \oplus D_3$, 则任意 3 元组 $(x, y, z) \in S_1 \times S_2 \times S_3$ 作为行在 $(\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)$ 中出现的次数等于满足方程组

$$\begin{cases} a_u + d_{vc_1} = x, \\ b_u + d_{vc_2} = y, \\ c_u + d_{vc_3} = z \end{cases}$$

的点对 (u, v) 的个数. 因为在 A 中任意 3 元组 (a_u, b_u, c_u) 作为行出现的次数为 $\frac{N}{s_1 s_2 s_3}$, 故对每一个 v , 存在 $\frac{N}{s_1 s_2 s_3}$ 个 u 满足

$$\begin{cases} a_u = x - d_{vc_1}, \\ b_u = y - d_{vc_2}, \\ c_u = z - d_{vc_3}. \end{cases}$$

因此, 任意 3 元组 $(x, y, z) \in S_1 \times S_2 \times S_3$ 作为行在 $(\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)$ 中出现的次数为 $\frac{Nr}{s_1 s_2 s_3}$. $\square$

由引理 3.3 和 3.4, 我们有下列推论.

推论 3.5 设 D 是 S 上的一个差阵 $D_3(r, k, s)$. 若存在一个 $N \times 2$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_N \end{pmatrix}^T, \quad a_i, b_i \in S, \quad 1 \leq i \leq N,$$

满足任意点对 $(x, y) \in S \times S$ 作为行在 A 中出现 $\frac{N}{s^2}$ 次, 则 $A \oplus D$ 是一个 $\text{OA}(Nr, 2k, s, 3)$.

推论 3.6 设 D 是 S 上的一个差阵 $D_3(r, k, s)$. 若存在一个 $N \times 3$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_N \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_N \end{pmatrix}^T, \quad a_i, b_i, c_i \in S, \quad 1 \leq i \leq N,$$

满足任意 3 元组 $(x, y, z) \in S \times S \times S$ 作为行在 A 中出现 $\frac{N}{s^3}$ 次, 则 $A \oplus D$ 是一个 $\text{OA}(Nr, 3k, s, 3)$.

推论 3.7 设 D_1 是 S_1 上的一个差阵 $D_3(r, k_1, s_1)$, D_2 是 S_2 上的一个差阵 $D_3(r, k_2, s_2)$. 若存在一个 $N \times 3$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_N \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_N \end{pmatrix}^T, \quad a_i, b_i \in S_1, \quad c_i \in S_2, \quad 1 \leq i \leq N,$$

满足任意 3 元组 $(x, y, z) \in S_1 \times S_1 \times S_2$ 作为行在 A 中出现 $\frac{N}{s_1^2 s_2}$ 次, 则

$$A \oplus (D_1 \ D_1 \ D_2) = (\alpha_1 \oplus D_1 \ \alpha_2 \oplus D_1 \ \alpha_3 \oplus D_2)$$

是一个 $\text{MOA}(Nr, s_1^{2k_1} s_2^{k_2}, 3)$.

构造 3.8 若在 S 上存在一个 $\text{OA}(N, k, s, 3)$ 和一个差阵 $D_3(r, c, s)$, 则存在一个 $\text{OA}(Nr, kc, s, 3)$.

证明 设 S 是一个 s 阶 Abel 群, $A = (a_{ij})$ 是 S 上的一个 $\text{OA}(N, k, s, 3)$ 且 $B = (b_{uv})$ 是 S 上的一个差阵 $D_3(r, c, s)$.

令

$$C = A \oplus B = \begin{pmatrix} B^{a_{11}} & B^{a_{12}} & \cdots & B^{a_{1k}} \\ B^{a_{21}} & B^{a_{22}} & \cdots & B^{a_{2k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B^{a_{N1}} & B^{a_{N2}} & \cdots & B^{a_{Nk}} \end{pmatrix}.$$

接下来证明 C 是一个 $\text{OA}(Nr, kc, s, 3)$. 只需证明任意 3 元组 $(x, y, z) \in S \times S \times S$ 作为行在 C 的任意 3 个不同列 $(\alpha \ \beta \ \gamma)$ 中出现的次数为 $\frac{Nr}{s^3}$. 分以下 3 种情形验证.

情形 1 若 α, β 和 γ 都取自子阵 $(B^{a_{1l}}, B^{a_{2l}}, \dots, B^{a_{Nl}})^T$, 其中 $1 \leq l \leq k$, 则由引理 3.2 可得任意 3 元组 $(x, y, z) \in S \times S \times S$ 作为行在 $(\alpha \ \beta \ \gamma)$ 中出现的次数为 $\frac{Nr}{s^3}$.

情形 2 若 α 和 β 取自子阵 $(B^{a_{1l}}, B^{a_{2l}}, \dots, B^{a_{Nl}})^T$, γ 取自子阵 $(B^{a_{1m}}, B^{a_{2m}}, \dots, B^{a_{Nm}})^T$, 其中 $1 \leq l \neq m \leq k$, 则由推论 3.5 可得任意 3 元组 $(x, y, z) \in S \times S \times S$ 作为行在 $(\alpha \ \beta \ \gamma)$ 中出现的次数为 $\frac{Nr}{s^3}$.

情形 3 若 α 取自子阵 $(B^{a_{1l}}, B^{a_{2l}}, \dots, B^{a_{Nl}})^T$, β 取自子阵 $(B^{a_{1m}}, B^{a_{2m}}, \dots, B^{a_{Nm}})^T$, γ 取自子阵 $(B^{a_{1n}}, B^{a_{2n}}, \dots, B^{a_{Nn}})^T$, 其中 $1 \leq l, m, n \leq k$ 和 $l \neq m \neq n \neq l$, 则由推论 3.6 得任意 3 元组 $(x, y, z) \in S \times S \times S$ 作为行在 $(\alpha \ \beta \ \gamma)$ 中出现的次数为 $\frac{Nr}{s^3}$. $\square$

当 $t \geq 3$ 时, 有关正交表 $\text{OA}(s^t, k, s, t)$ 的经典结果如下.

引理 3.9 ^[1,3] (i) 对于任意整数 $s \geq 2$, 存在一个 $\text{OA}(s^t, t+1, s, t)$;

(ii) 对于任意素数幂 $s > t$, 存在一个 $\text{OA}(s^t, s+1, s, t)$, 更进一步, 若 $s = 2^k$, $k \geq 2$, 则存在一个 $\text{OA}(s^3, s+2, s, 3)$.

我们有下面的定理.

定理 3.10 (i) 对任意素数幂 $s \geq 5$, 存在一个 $\text{OA}(s^5, s(s+1), s, 3)$;

(ii) 对任意偶素数幂 s , 存在一个 $\text{OA}(s^5, s(s+2), s, 3)$;

(iii) 对任意整数 $s \geq 2$, 存在一个 $\text{OA}(s^5, 16, s, 3)$.

证明 (i) 对任意素数幂 $s \geq 5$, 由引理 3.9 可知, 存在一个 $\text{OA}(s^3, s+1, s, 3)$, 由定理 2.18 可知, 在 S 上存在一个差阵 $D_3(s^2, s, s)$. 应用构造 3.8 得到一个 $\text{OA}(s^5, s(s+1), s, 3)$.

(ii) 对任意偶素数幂 s , 由引理 3.9 可知, 存在一个 $\text{OA}(s^3, s+2, s, 3)$, 由定理 2.18 可知, 在 S 上存在一个差阵 $D_3(s^2, s, s)$. 应用构造 3.8 得到一个 $\text{OA}(s^5, s(s+2), s, 3)$.

(iii) 对任意 $s \geq 2$, 由引理 3.9 可知, 存在一个 $\text{OA}(s^3, 4, s, 3)$, 由推论 2.14 可知, 在 S 上存在一个差阵 $D_3(s^2, 4, s)$. 应用构造 3.8 得到一个 $\text{OA}(s^5, 16, s, 3)$. $\square$

构造 3.11 设 S_i 是一个 s_i 阶 Abel 群, $1 \leq i \leq n$. 若存在一个 $\text{MOA}(N, s_1^{k_1} s_2^{k_2} \cdots s_n^{k_n}, 3)$, 并且对于每一个 $1 \leq i \leq n$, 在 S_i 上存在一个差阵 $D_3(r, c_i, s_i)$, 则存在一个 $\text{MOA}(Nr, s_1^{k_1 c_1} s_2^{k_2 c_2} \cdots s_n^{k_n c_n}, 3)$.

证明 设 $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ 是一个 $\text{MOA}(N, s_1^{k_1} s_2^{k_2} \cdots s_n^{k_n}, 3)$, 其中 $A_i = (a_{ul}^{(i)})$ ($1 \leq i \leq n$) 是一个 $N \times k_i$ 矩阵, 其元素取自 s_i 阶 Abel 群 S_i . 设 $B = (B_1, B_2, \dots, B_n)$, 其中 $B_i = (b_{vm}^{(i)})$ ($1 \leq i \leq n$) 是 S_i (即在 $(G, E_0(c_i))$) 上的一个差阵 $D_3(r, c_i, s_i)$.

令

$$C = A \oplus B = (A_1 \oplus B_1, A_2 \oplus B_2, \dots, A_n \oplus B_n) = (C_1, C_2, \dots, C_n),$$

其中

$$C_i = (A_i \oplus B_i) = \begin{pmatrix} B_i^{a_{11}^{(i)}} & B_i^{a_{12}^{(i)}} & \cdots & B_i^{a_{1k_i}^{(i)}} \\ B_i^{a_{21}^{(i)}} & B_i^{a_{22}^{(i)}} & \cdots & B_i^{a_{2k_i}^{(i)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_i^{a_{N1}^{(i)}} & B_i^{a_{N2}^{(i)}} & \cdots & B_i^{a_{Nk_i}^{(i)}} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

接下来将证明 C 是一个 $\text{MOA}(Nr, s_1^{k_1 c_1} s_2^{k_2 c_2} \cdots s_n^{k_n c_n}, 3)$. 只需证明每一个 3 元组 (x, y, z) 作为行在 C 的任意 $Nr \times 3$ 子阵中出现的次数相同. 设 α, β 和 γ 是 C 的 3 个不同列向量. 分以下 3 种情形验证.

情形 1 若 α, β 和 γ 都取自子阵 C_i ($1 \leq i \leq n$), 则由构造 3.8 知, C_i 是一个 $\text{MOA}(Nr, k_i c_i, s_i, 3)$, 从而任意 3 元组 $(x, y, z) \in S_i \times S_i \times S_i$ 作为行在 $(\alpha \ \beta \ \gamma)$ 中出现的次数为 $\frac{Nr}{s_i^3}$.

情形 2 若 α 和 β 取自 C_i 的子阵 $(B_i^{a_{1l}^{(i)}}, B_i^{a_{2l}^{(i)}}, \dots, B_i^{a_{Nl}^{(i)}})^T$, $1 \leq l \leq k_i$, γ 取自 C_j 的子阵 $(B_j^{a_{1p}^{(j)}}, B_j^{a_{2p}^{(j)}}, \dots, B_j^{a_{Np}^{(j)}})^T$, 其中 $1 \leq p \leq k_j$, $1 \leq i \neq j \leq n$. 因为 (A_i, A_j) 是一个 $\text{MOA}(N, s_i^{k_i} s_j^{k_j}, 3)$, 则任意点对 $(x, y) \in S_i \times S_j$ 作为行在

$$\begin{pmatrix} a_{1l}^{(i)} & a_{2l}^{(i)} & \cdots & a_{Nl}^{(i)} \\ a_{1p}^{(j)} & a_{2p}^{(j)} & \cdots & a_{Np}^{(j)} \end{pmatrix}^T, \quad a_{ul}^{(i)} \in S_i, \quad a_{up}^{(j)} \in S_j, \quad 1 \leq u \leq N$$

中出现的次数为 $\frac{N}{s_i s_j}$. 由引理 3.3 可知,

$$\begin{pmatrix} B_i^{a_{1l}^{(i)}} & B_i^{a_{2l}^{(i)}} & \cdots & B_i^{a_{Nl}^{(i)}} \\ B_j^{a_{1p}^{(j)}} & B_j^{a_{2p}^{(j)}} & \cdots & B_j^{a_{Np}^{(j)}} \end{pmatrix}^T$$

是一个 $\text{MOA}(Nr, s_i^{c_i} s_j^{c_j}, 3)$. 因此, 任意 3 元组 $(x, y, z) \in S_i \times S_i \times S_j$ 作为行在 $(\alpha \ \beta \ \gamma)$ 中出现的次数为 $\frac{Nr}{s_i^2 s_j}$.

若 α 取自 C_i 的子阵 $(B_i^{a_{1l_1}^{(i)}}, B_i^{a_{2l_1}^{(i)}}, \dots, B_i^{a_{Nl_1}^{(i)}})^T$, β 取自 C_i 的子阵 $(B_i^{a_{1l_2}^{(i)}}, B_i^{a_{2l_2}^{(i)}}, \dots, B_i^{a_{Nl_2}^{(i)}})^T$, $1 \leq l_1 \neq l_2 \leq k_i$, γ 取自 C_j 的子阵 $(B_j^{a_{1p}^{(j)}}, B_j^{a_{2p}^{(j)}}, \dots, B_j^{a_{Np}^{(j)}})^T$, 其中 $1 \leq p \leq k_j$ 和 $1 \leq i \neq j \leq n$. 因为 (A_i, A_j)

是一个 $\text{MOA}(N, s_i^{k_i} s_j^{k_j}, 3)$, 所以, 任意 3 元组 $(x, y, z) \in S_i \times S_i \times S_j$ 作为行在

$$\begin{pmatrix} a_{1l_1}^{(i)} & a_{2l_1}^{(i)} & \cdots & a_{Nl_1}^{(i)} \\ a_{1l_2}^{(i)} & a_{2l_2}^{(i)} & \cdots & a_{Nl_2}^{(i)} \\ a_{1p}^{(j)} & a_{2p}^{(j)} & \cdots & a_{Np}^{(j)} \end{pmatrix}^T, \quad a_{ul_1}^{(i)}, a_{ul_2}^{(i)} \in S_i, \quad a_{up}^{(j)} \in S_j, \quad 1 \leq u \leq N,$$

中出现的次数为 $\frac{N}{s_i^2 s_j}$. 由推论 3.7 可知,

$$\begin{pmatrix} B_i^{a_{1l_1}^{(i)}} & B_i^{a_{2l_1}^{(i)}} & \cdots & B_i^{a_{Nl_1}^{(i)}} \\ B_i^{a_{1l_2}^{(i)}} & B_i^{a_{2l_2}^{(i)}} & \cdots & B_i^{a_{Nl_2}^{(i)}} \\ B_j^{a_{1p}^{(j)}} & B_j^{a_{2p}^{(j)}} & \cdots & B_j^{a_{Np}^{(j)}} \end{pmatrix}^T$$

是一个 $\text{MOA}(Nr, s_i^{2c_i} s_j^{c_j}, 3)$. 故任意 3 元组 $(x, y, z) \in S_i \times S_i \times S_j$ 作为行在 $(\alpha \ \beta \ \gamma)$ 中出现的次数为 $\frac{Nr}{s_i^2 s_j}$.

情形 3 若 α 取自 C_i 的子阵 $(B_i^{a_{1l}^{(i)}}, B_i^{a_{2l}^{(i)}}, \dots, B_i^{a_{Nl}^{(i)}})^T$, β 取自 C_j 的子阵 $(B_j^{a_{1p}^{(j)}}, B_j^{a_{2p}^{(j)}}, \dots, B_j^{a_{Np}^{(j)}})^T$, γ 取自 C_w 的子阵 $(B_w^{a_{1q}^{(w)}}, B_w^{a_{2q}^{(w)}}, \dots, B_w^{a_{Nq}^{(w)}})^T$, 其中 $1 \leq l \leq k_i, 1 \leq p \leq k_j, 1 \leq q \leq k_w, 1 \leq i, j, w \leq n$ 且 $i \neq j \neq w \neq i$. 因为 (A_i, A_j, A_w) 是一个 $\text{MOA}(N, s_i^{k_i} s_j^{k_j} s_w^{k_w}, 3)$, 因此任意 3 元组 $(x, y, z) \in S_i \times S_j \times S_w$ 作为行在

$$\begin{pmatrix} a_{1l}^{(i)} & a_{2l}^{(i)} & \cdots & a_{Nl}^{(i)} \\ a_{1p}^{(j)} & a_{2p}^{(j)} & \cdots & a_{Np}^{(j)} \\ a_{1q}^{(w)} & a_{2q}^{(w)} & \cdots & a_{Nq}^{(w)} \end{pmatrix}^T, \quad a_{ul}^{(i)} \in S_i, \quad a_{up}^{(j)} \in S_j, \quad a_{uq}^{(w)} \in S_w, \quad 1 \leq u \leq N$$

中出现的次数等于 $\frac{N}{s_i s_j s_w}$. 由引理 3.4 可知,

$$\begin{pmatrix} B_i^{a_{1l}^{(i)}} & B_i^{a_{2l}^{(i)}} & \cdots & B_i^{a_{Nl}^{(i)}} \\ B_j^{a_{1p}^{(j)}} & B_j^{a_{2p}^{(j)}} & \cdots & B_j^{a_{Np}^{(j)}} \\ B_i^{a_{1q}^{(w)}} & B_i^{a_{2q}^{(w)}} & \cdots & B_i^{a_{Nq}^{(w)}} \end{pmatrix}^T$$

是一个 $\text{MOA}(Nr, s_i^{c_i} s_j^{c_j} s_w^{c_w}, 3)$. 从而, 任意 3 元组 $(x, y, z) \in S_i \times S_j \times S_w$ 作为行在 $(\alpha \ \beta \ \gamma)$ 中出现的次数为 $\frac{Nr}{s_i s_j s_w}$. $\square$

作为构造 3.11 的一个应用, 我们可以得到一些新的强度 $t = 3$ 的混合正交表, 见表 1. 表 1 中第一列的已知 MOAs 来自文献 [17, 19, 21], 第二列中的差阵来自推论 2.14、定理 2.18、例 5.1、5.2、引理 4.1 和 4.2, 应用构造 3.11 则得到最后一列的新的 MOAs.

引理 3.12 (i) 对任意正整数 m 和任意素数幂 s , 在 S 上存在一个差阵 $D_3(ms^3, s+1, s)$;

(ii) 对任意正整数 m 和任意偶素数幂 s , 在 S 上存在一个差阵 $D_3(ms^3, s+2, s)$.

证明 (i) 由引理 3.9 知, 在 S 上存在一个 $\text{OA}(s^3, s+1, s, 3)$, 将其重复 m 次就可以得到 S 上的一个 $\text{OA}(ms^3, s+1, s, 3)$, 它显然也是 S 上的一个差阵 $D_3(ms^3, s+1, s)$.

(ii) 由引理 3.9 知, 在 S 上存在一个 $\text{OA}(s^3, s+2, s, 3)$, 则在 S 上存在一个 $\text{OA}(ms^3, s+2, s, 3)$, 它也是 S 上的一个差阵 $D_3(ms^3, s+2, s)$. $\square$

表 1 利用构造 3.11 得到的新的混合正交表

已知的 MOAs	差阵	新的 MOAs
MOA(16, 2 ³ 4 ¹ , 3)	D ₃ (16, 16, 2) 和 D ₃ (16, 6, 4)	MOA(16 × 16, 2 ⁴⁸ 4 ⁶ , 3) 紧的
MOA(24, 2 ⁴ 3 ¹ , 3)	D ₃ (36, 36, 2) 和 D ₃ (36, 4, 3)	MOA(24 × 36, 2 ¹⁴⁴ 3 ⁴ , 3)
MOA(24, 2 ³ 6 ¹ , 3)	D ₃ (36, 36, 2) 和 D ₃ (36, 4, 6)	MOA(24 × 36, 2 ¹⁰⁸ 6 ⁴ , 3)
MOA(32, 2 ³ 8 ¹ , 3)	D ₃ (64, 64, 2) 和 D ₃ (64, 8, 8)	MOA(32 × 64, 2 ¹⁹² 8 ⁸ , 3)
MOA(32, 2 ⁴ 4 ² , 3)	D ₃ (16, 16, 2) 和 D ₃ (16, 6, 4)	MOA(32 × 16, 2 ⁶⁴ 4 ¹² , 3)
MOA(32, 2 ⁴ 4 ² , 3)	D ₃ (64, 64, 2) 和 D ₃ (64, 6, 4)	MOA(32 × 64, 2 ²⁵⁶ 4 ¹² , 3)
MOA(32, 2 ⁷ 4 ¹ , 3)	D ₃ (16, 16, 2) 和 D ₃ (16, 6, 4)	MOA(32 × 16, 2 ¹¹² 4 ⁶ , 3) 紧的
MOA(32, 2 ⁷ 4 ¹ , 3)	D ₃ (64, 64, 2) 和 D ₃ (64, 6, 4)	MOA(32 × 64, 2 ⁴⁴⁸ 4 ⁶ , 3)
MOA(36, 2 ² 3 ² , 3)	D ₃ (36, 36, 2) 和 D ₃ (36, 4, 3)	MOA(36 × 36, 2 ⁷² 3 ⁸ , 3)
MOA(40, 2 ³ 10 ¹ , 3)	D ₃ (100, 100, 2) 和 D ₃ (100, 4, 10)	MOA(40 × 100, 2 ³⁰⁰ 10 ⁴ , 3)
MOA(40, 2 ⁶ 5 ¹ , 3)	D ₃ (100, 100, 2) 和 D ₃ (100, 6, 5)	MOA(40 × 100, 2 ⁶⁰⁰ 5 ⁶ , 3)
MOA(48, 2 ³ 12 ¹ , 3)	D ₃ (144, 144, 2) 和 D ₃ (144, 4, 12)	MOA(48 × 144, 2 ⁴³² 12 ⁴ , 3)
MOA(48, 2 ² 4 ¹ 6 ¹ , 3)	D ₃ (144, 144, 2), D ₃ (144, 6, 4) 和 D ₃ (144, 4, 6)	MOA(48 × 144, 2 ²⁸⁸ 4 ⁶ 6 ⁴ , 3)
MOA(48, 2 ⁷ 6 ¹ , 3)	D ₃ (36, 36, 2) 和 D ₃ (36, 4, 6)	MOA(48 × 36, 2 ²⁵² 6 ⁴ , 3)
MOA(48, 2 ⁴ 3 ¹ 4 ¹ , 3)	D ₃ (144, 144, 2), D ₃ (144, 4, 3) 和 D ₃ (144, 6, 4)	MOA(48 × 144, 2 ⁵⁷⁶ 3 ⁴ 4 ⁶ , 3)
MOA(48, 2 ¹¹ 4 ¹ , 3)	D ₃ (16, 16, 2) 和 D ₃ (16, 6, 4)	MOA(48 × 16, 2 ¹⁷⁶ 4 ⁶ , 3) 紧的
MOA(48, 2 ¹¹ 4 ¹ , 3)	D ₃ (64, 64, 2) 和 D ₃ (64, 6, 4)	MOA(48 × 64, 2 ⁷⁰⁴ 4 ⁶ , 3)
MOA(48, 2 ⁹ 3 ¹ , 3)	D ₃ (36, 36, 2) 和 D ₃ (36, 4, 3)	MOA(48 × 36, 2 ³²⁴ 3 ⁴ , 3)
MOA(54, 3 ³ 6 ¹ , 3)	D ₃ (36, 4, 3) 和 D ₃ (36, 4, 6)	MOA(54 × 36, 3 ¹² 6 ⁴ , 3)
MOA(54, 2 ¹ 3 ⁵ , 3)	D ₃ (36, 36, 2) 和 D ₃ (36, 4, 3)	MOA(54 × 36, 2 ³⁶ 3 ²⁰ , 3)
MOA(56, 2 ³ 14 ¹ , 3)	D ₃ (196, 196, 2) 和 D ₃ (196, 4, 14)	MOA(56 × 196, 2 ⁵⁸⁸ 14 ⁴ , 3)
MOA(56, 2 ⁶ 7 ¹ , 3)	D ₃ (196, 196, 2) 和 D ₃ (196, 7, 7)	MOA(56 × 196, 2 ¹¹⁷⁶ 7 ⁷ , 3)
MOA(64, 2 ⁴ 4 ¹ 8 ¹ , 3)	D ₃ (64, 64, 2), D ₃ (64, 6, 4) 和 D ₃ (64, 8, 8)	MOA(64 × 64, 2 ²⁵⁶ 4 ⁶ 8 ⁸ , 3)
MOA(64, 2 ⁷ 8 ¹ , 3)	D ₃ (64, 64, 2) 和 D ₃ (64, 8, 8)	MOA(64 × 64, 2 ⁴⁴⁸ 8 ⁸ , 3)
MOA(64, 2 ² 4 ⁵ , 3)	D ₃ (16, 16, 2) 和 D ₃ (16, 6, 4)	MOA(64 × 16, 2 ³² 4 ³⁰ , 3)
MOA(64, 2 ² 4 ⁵ , 3)	D ₃ (64, 64, 2) 和 D ₃ (64, 6, 4)	MOA(64 × 64, 2 ¹²⁸ 4 ³⁰ , 3)
MOA(64, 2 ³ (16) ¹ , 3)	D ₃ (256, 256, 2) 和 D ₃ (256, 16, 16)	MOA(64 × 256, 2 ⁷⁶⁸ (16) ¹⁶ , 3)
MOA(64, 2 ⁶ 4 ⁴ , 3)	D ₃ (16, 16, 2) 和 D ₃ (16, 6, 4)	MOA(64 × 16, 2 ⁹⁶ 4 ²⁴ , 3)
MOA(64, 2 ⁶ 4 ⁴ , 3)	D ₃ (64, 64, 2) 和 D ₃ (64, 6, 4)	MOA(64 × 64, 2 ³⁸⁴ 4 ²⁴ , 3)
MOA(64, 2 ⁸ 4 ³ , 3)	D ₃ (16, 16, 2) 和 D ₃ (16, 6, 4)	MOA(64 × 16, 2 ¹²⁸ 4 ¹⁸ , 3)
MOA(64, 2 ⁸ 4 ³ , 3)	D ₃ (64, 64, 2) 和 D ₃ (64, 6, 4)	MOA(64 × 64, 2 ⁵¹² 4 ¹⁸ , 3)
MOA(64, 2 ¹² 4 ² , 3)	D ₃ (16, 16, 2) 和 D ₃ (16, 6, 4)	MOA(64 × 16, 2 ¹⁹² 4 ¹² , 3)
MOA(64, 2 ¹² 4 ² , 3)	D ₃ (64, 64, 2) 和 D ₃ (64, 6, 4)	MOA(64 × 64, 2 ⁷⁶⁸ 4 ¹² , 3)
MOA(64, 2 ¹⁵ 4 ¹ , 3)	D ₃ (16, 16, 2) 和 D ₃ (16, 6, 4)	MOA(64 × 16, 2 ²⁴⁰ 4 ⁶ , 3) 紧的
MOA(64, 2 ¹⁵ 4 ¹ , 3)	D ₃ (64, 64, 2) 和 D ₃ (64, 6, 4)	MOA(64 × 64, 2 ⁹⁶⁰ 4 ⁶ , 3)
MOA(96, 2 ⁵ 4 ² 6 ¹ , 3)	D ₃ (144, 144, 2), D ₃ (144, 6, 4) 和 D ₃ (144, 4, 6)	MOA(96 × 144, 2 ⁷²⁰ 4 ¹² 6 ⁴ , 3)
MOA(96, 2 ⁶ 3 ¹ 4 ² , 3)	D ₃ (144, 144, 2), D ₃ (144, 4, 3) 和 D ₃ (144, 6, 4)	MOA(96 × 144, 2 ⁸⁶⁴ 3 ⁴ 4 ¹² , 3)
MOA(96, 2 ²⁰ 4 ² , 3)	D ₃ (16, 16, 2) 和 D ₃ (16, 6, 4)	MOA(96 × 16, 2 ³²⁰ 4 ¹² , 3)
MOA(96, 2 ²⁰ 4 ² , 3)	D ₃ (64, 64, 2) 和 D ₃ (64, 6, 4)	MOA(96 × 64, 2 ¹²⁸⁰ 4 ¹² , 3)

引理 3.13 ^[20] (i) 对任意素数幂 s , 存在一个紧的 $\text{MOA}(s^4, (s^2)^1(s)^{s+1}, 3)$;

(ii) 若 s 是一个奇素数幂, 则存在 $\text{MOA}(s^5, (s^2)^1(s)^{s^2+2}, 3)$ 和 $\text{MOA}(s^{2k+1}, (s^k)^2(s)^{(\frac{s+1}{2})^k}, 3)$, 其中 k 是任意正整数;

(iii) 若 s 是 2 的幂次, 则存在紧的 $\text{MOA}(s^5, (s^2)^1(s)^{s^2+s+1}, 3)$ 、紧的 $\text{MOA}(s^{2k+1}, (s^k)^2(s)^{s^k}, 3)$ (其中 k 是任意正整数) 和紧的 $\text{MOA}(2s^3, (2s)^1(s)^t(2)^{(s+1-t)(s-1)}, 3)$, 其中 $0 \leq t \leq s+1$.

定理 3.14 (i) 对任意素数幂 s , 存在一个 $\text{MOA}(s^8, (s^2)^{s^2}(s)^{(s+1)^2}, 3)$;

(ii) 若 s 是一个奇素数幂, 则存在一个 $\text{MOA}(s^9, (s^2)^{s^2}(s)^{(s^2+2)(s+1)}, 3)$ 和一个

$$\text{MOA}(s^{4k+1}, (s^k)^{2s^k}(s)^{(\frac{s+1}{2})^k(s+1)}, 3),$$

其中整数 $k > 1$;

(iii) 若 s 是 2 的幂次, 则存在 $\text{MOA}(s^9, (s^2)^{s^2}(s)^{(s^2+s+1)(s+2)}, 3)$ 、 $\text{MOA}(s^{4k+1}, (s^k)^{2s^k}(s)^{s^k(s+2)}, 3)$ 和 $\text{MOA}(8s^5, (2s)^{2s}(s)^{st}(2)^{4(s+1-t)(s-1)}, 3)$, 其中整数 $k > 1$ 和 $0 \leq t \leq s+1$.

证明 (i) 对任意素数幂 s , 由引理 3.13 可知, 存在一个 $\text{MOA}(s^4, (s^2)^1(s)^{(s+1)}, 3)$; 由定理 2.18 可知, 在 S 上存在一个差阵 $D_3(s^4, s^2, s^2)$; 由引理 3.12 可知, 在 S 上存在一个差阵 $D_3(s^4, s+1, s)$. 应用构造 3.11 得到一个 $\text{MOA}(s^8, (s^2)^{s^2}(s)^{(s+1)^2}, 3)$.

(ii) 对任意奇素数幂 s 和整数 $k > 1$, 由引理 3.13 可知, 存在一个 $\text{MOA}(s^5, (s^2)^1(s)^{s^2+2}, 3)$; 由定理 2.18 可知, 在 S 上存在一个差阵 $D_3(s^4, s^2, s^2)$; 由引理 3.12 可知, 在 S 上存在一个 $D_3(s^4, s+1, s)$. 应用构造 3.11 得到一个 $\text{MOA}(s^9, (s^2)^{s^2}(s)^{(s^2+2)(s+1)}, 3)$. 类似地, 由引理 3.13 可知, 存在一个 $\text{MOA}(s^{2k+1}, (s^k)^2(s)^{(\frac{s+1}{2})^k}, 3)$; 由定理 2.18 可知, 在 S 上存在一个 $D_3(s^{2k}, s^k, s^k)$; 由引理 3.12 可知, 对 $k > 1$, 在 S 上存在一个差阵 $D_3(s^{2k}, s+1, s)$. 应用构造 3.11 得到一个

$$\text{MOA}(s^{4k+1}, (s^k)^{2s^k}(s)^{(\frac{s+1}{2})^k(s+1)}, 3).$$

(iii) 若 s 是 2 的幂次, 对于整数 $k > 1$, 由引理 3.13 可知, 存在一个 $\text{MOA}(s^5, (s^2)^1(s)^{s^2+s+1}, 3)$ 、一个 $\text{MOA}(s^{2k+1}, (s^k)^2(s)^{s^k}, 3)$ 和一个 $\text{MOA}(2s^3, (2s)^1(s)^t(2)^{(s+1-t)(s-1)}, 3)$, 其中 $0 \leq t \leq s+1$. 由定理 2.18 可知, 在 S 上存在一个 $D_3(s^4, s^2, s^2)$ 、一个 $D_3(s^{2k}, s^k, s^k)$ 、一个 $D_3(4s^2, s, s)$ 和一个 $D_3(4s^2, 2s, 2s)$. 由引理 3.12 可知, 在 S 上存在一个 $D_3(s^4, s+2, s)$ 、一个 $D_3(s^{2k}, s+2, s)$ 和一个 $D_3(4s^2, 4, 2)$. 应用构造 3.11 得结论成立. $\square$

类似上述定理证明, 结合定理 2.18、3.10、引理 3.12、3.13 和构造 3.11, 我们下面结论.

定理 3.15 (i) 对任意素数幂 s , 存在一个 $\text{MOA}(s^9, (s^2)^{s^2}(s)^{s(s+1)^2}, 3)$;

(ii) 若 s 是一个奇素数幂, 则存在一个 $\text{MOA}(s^{10}, (s^2)^{s^2}(s)^{s(s+1)(s^2+2)}, 3)$;

(iii) 若 s 是 2 的幂次, 则存在一个 $\text{MOA}(s^{10}, (s^2)^{s^2}(s)^{s(s+2)(s^2+s+1)}, 3)$.

4 Hadamard 矩阵构造法

本节提供了使用 Hadamard 矩阵来构造混合正交表的方法, 并且利用这些构造方法得到了许多新的紧的强度 3 的混合正交表.

一个 n 阶 Hadamard 矩阵是一个 $n \times n$ 矩阵 H_n , 其元素是 ± 1 且满足任意两行正交, 即 $H_n H_n^T = nI_n$, 其中 H_n^T 是 H_n 的转置, I_n 是一个 n 阶单位阵.

若用 -1 乘以一个 Hadamard 矩阵的某一行或某一列, 则其结果仍为一个 Hadamard 矩阵. 通过一系列这样的过程, 可以将任何一个 Hadamard 矩阵变成一个第一行第一列元素都是 1 的 Hadamard 矩阵, 这样的 Hadamard 矩阵称为标准的.

显然, 一个 n 阶 Hadamard 矩阵的存在性等价于一个在 $S = \{0, 1\}$ 上的差阵 $D_2(n, n, 2)$ 的存在性.

关于已知 Hadamard 矩阵的存在结果如下.

引理 4.1 ^[1,3,8] (i) 对所有 $4 \mid n$ 且 $n \leq 200$, 存在一个 n 阶 Hadamard 矩阵和一个 2^a 阶 Hadamard 矩阵, 其中 a 是正整数;

(ii) 若 $n \equiv 0 \pmod{4}$ 且 $n-1$ 是素数幂, 则存在一个 n 阶 Hadamard 矩阵;

(iii) 若 $n = 2(s+1)$, 其中 s 是一个奇素数幂, 则存在一个 n 阶 Hadamard 矩阵.

引理 4.2 ^[1,17] 若 H_k 是一个 k 阶 Hadamard 矩阵, 则

$$A = \begin{pmatrix} H_k \\ -H_k \end{pmatrix}$$

是 $\{1, -1\}$ 上的一个 $OA(2k, k, 2, 3)$. 进一步, 若将 H_k 和 $-H_k$ 中的元素 -1 用元素 0 替换分别得到 H'_k 和 $-H'_k$, 则 $B = \begin{pmatrix} H'_k \\ -H'_k \end{pmatrix}$ 是 $S = \{0, 1\}$ 上的一个 $OA(2k, k, 2, 3)$, 并且 H'_k 也是 S 上的差阵 $D_3(k, k, 2)$.

构造 4.3 设 m 是一个正整数. 若存在一个 n 阶 Hadamard 矩阵, 则存在

(i) 一个紧的 $MOA(2mn; (2)^{n-1}(2m)^1, 3)$;

(ii) 一个紧的 $MOA(64n; (2)^{16(n-1)}(4)^6, 3)$.

证明 (i) 设 H_n 是一个 n 阶 Hadamard 矩阵, 由 Hadamard 矩阵的性质, 可以得到一个标准 n 阶 Hadamard 矩阵, 记为 H'_n , 即 H'_n 的第一列的元素都是 1. 令 A 是由 H'_n 删掉第一列得到的一个 $n \times (n-1)$ 矩阵. 构造一个 $2mn \times n$ 的矩阵 B 如下:

$$B = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ -A & \mathbf{1} \\ A & \mathbf{2} \\ -A & \mathbf{3} \\ \vdots & \vdots \\ A & \mathbf{2m-2} \\ -A & \mathbf{2m-1} \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{i}$ 是一个元素全为 i 的 $n \times 1$ 列向量, $0 \leq i \leq 2m-1$. 接下来将证明 B 是一个

$$MOA(2mn, (2)^{n-1}(2m)^1, 3),$$

即在 B 的任意 $2mn \times 3$ 子阵中, 每一个可能的 3 元组作为行出现的次数相同.

若这个子阵中包含 B 的最后一列, 由 A 和 $-A$ 都是 $OA(n, n-1, 2, 2)$, 则结论成立. 若这 3 列都是来自 B 的前 $n-1$ 列, 由引理 4.2 知, $\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$ 是 $\{1, -1\}$ 上的一个 $OA(2n, n-1, 2, 3)$, 则结论成立. 又因为

$$N = 1 + \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (2-1) + (2m-1) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + (2m-1) \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (2-1) + (2m-1) - (2m-1) \right\} \\
 & = 1 + (n-1) + (2m-1) + (2m-1)(n-1) \\
 & = n + 2m - 1 + 2mn - 2m - n + 1 \\
 & = 2mn.
 \end{aligned}$$

所以, B 是一个紧的 $\text{MOA}(2mn, (2)^{n-1}(2m)^1, 3)$.

(ii) 在上面的构造中用 0 替代 -1 , 用 x 替代 2, 用 $x+1$ 替代 3, 并且取 $m=2$, 则在点集 $\mathbb{Z}_2^{n-1} \times \mathbb{F}_4$ 上存在一个紧的 $\text{MOA}(4n, (2)^{n-1}(4)^1, 3)$, 其中

$$\mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}_2[x]_{x^2+x+1} = \{0, 1, x, x+1\}.$$

由引理 4.2 可知, 在 $S = \{0, 1\}$ 上存在一个差阵 $D_3(16, 16, 2)$, 由例 5.2 (见第 5 节) 可知, 在 $S = \mathbb{F}_4^6$ 上存在一个差阵 $D_3(16, 6, 4)$. 应用构造 3.11 则得到一个 $\text{MOA}(64n, (2)^{16(n-1)}(4)^6, 3)$. 又因为

$$\begin{aligned}
 N & = 1 + \left\{ \sum_{i=1}^{16(n-1)} (2-1) + \sum_{i=16(n-1)+1}^{16(n-1)+6} (4-1) \right\} \\
 & \quad + (4-1) \left\{ \left[\sum_{i=1}^{16(n-1)} (2-1) + \sum_{i=16(n-1)+1}^{16(n-1)+6} (4-1) \right] - (4-1) \right\} \\
 & = 1 + 16(n-1) + 18 + 3 \times [16(n-1) + 18 - 3] \\
 & = 1 + 16n - 16 + 18 + 3 \times (16n - 16 + 18 - 3) \\
 & = 16n + 3 + 48n - 3 \\
 & = 64n,
 \end{aligned}$$

故所得的 $\text{MOA}(64n, (2)^{16(n-1)}(4)^6, 3)$ 是紧的. $\square$

构造 4.4 若存在一个 m 阶 Hadamard 矩阵和一个 n 阶 Hadamard 矩阵, 则存在一个紧的 $\text{MOA}(2m^2n; (2)^{m(n-2)}(2m)^2, 3)$.

证明 设 H_n 是一个 n 阶 Hadamard 矩阵, 把 H_n 写成 $H_n = (\beta_1, \beta_2, B)$, 其中 B 是 $n \times (n-2)$ 矩阵. 设 A_1 是一个 m 阶 Hadamard 矩阵, A_2 是通过对 A_1 作行置换 $\sigma = (1 \ 2 \ 3 \ \cdots \ m)$ 得到, 依次类推, A_{l+1} 是通过对 A_l 作行置换 $\sigma = (1 \ 2 \ 3 \ \cdots \ m)$ 得到, $2 \leq l \leq m-1$.

令 $\mathcal{X} = \{1, -1\}$ 和 $\mathcal{Y} = \{-m, -(m-1), \dots, -1, 1, 2, \dots, m\} = \{1, -1\} * \{1, 2, \dots, m\}$, 其中 “ $*$ ” 表示一般的乘法. 令 $A_j = (a_{uv}^{(j)}), 1 \leq u, v, j \leq m$,

$$D_j = A_j \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}^{(j)} * B & a_{12}^{(j)} * B & \cdots & a_{1m}^{(j)} * B \\ a_{21}^{(j)} * B & a_{22}^{(j)} * B & \cdots & a_{2m}^{(j)} * B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{(j)} * B & a_{m2}^{(j)} * B & \cdots & a_{mm}^{(j)} * B \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq m,$$

其中 $a_{uv}^{(j)} * B$ 表示用 $a_{uv}^{(j)}$ 去乘矩阵 B 中的每一个元素.

在 $\mathcal{X}^{m(n-2)} \times \mathcal{Y}^2$ 上构造一个 $m^2n \times (m(n-2)+2)$ 矩阵 C 如下:

$$C = \begin{pmatrix} D_1 & B_1 & B_2^{(1)} \\ D_2 & B_1 & B_2^{(2)} \\ D_3 & B_1 & B_2^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_m & B_1 & B_2^{(m)} \end{pmatrix},$$

其中

$$B_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 2 * \beta_1 \\ 3 * \beta_1 \\ \vdots \\ m * \beta_1 \end{pmatrix}, \quad B_2^{(i)} = i * \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_2 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

令

$$E = \begin{pmatrix} C \\ -C \end{pmatrix}.$$

接下来将证明 E 是一个 $\text{MOA}(2m^2n, (2)^{m(n-2)}(2m)^2, 3)$, 也就是要证明对于 E 的任意的 $2m^2n \times 3$ 子阵, 每一个可能的 3 元组 (x, y, z) 作为行出现相同的次数. 设 α 、 β 和 γ 是 E 的任意 3 个不同列. 分以下 3 种情形来验证.

情形 1 若 α 、 β 和 γ 都取自 E 的前 $m(n-2)$ 列, 由引理 4.2 知, 每一个 $(\begin{smallmatrix} D_j \\ -D_j \end{smallmatrix})$ 都是 $\mathcal{X}$ 上的一个 $\text{OA}(2mn, m(n-2), 2, 3)$, 其中 $1 \leq j \leq m$, 则每一个可能的 3 元组 (x, y, z) 作为行在 $(\alpha \ \beta \ \gamma)$ 中都恰好出现 $\frac{2m^2n}{2^3}$ 次.

情形 2 若 α 、 β 和 γ 中有两列取自 E 的最后两列, 另一列取自 E 的前 $m(n-2)$ 列. 由引理 4.2 可知,

$$\begin{pmatrix} B & \beta_1 & \beta_2 \\ -B & -\beta_1 & -\beta_2 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} -B & \beta_1 & \beta_2 \\ B & -\beta_1 & -\beta_2 \end{pmatrix}$$

都是 $\mathcal{X}$ 上的 $\text{OA}(2n, n, 2, 3)$. 从而,

$$\begin{pmatrix} B & p * \beta_1 & q * \beta_2 \\ -B & -p * \beta_1 & -q * \beta_2 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} -B & p * \beta_1 & q * \beta_2 \\ B & -p * \beta_1 & -q * \beta_2 \end{pmatrix}$$

也都是 $\mathcal{X}^{(n-2)} \times \{p, -p\} \times \{q, -q\}$ 上的 $\text{MOA}(2n, (2)^{(n-2)}(2)^2, 3)$, 其中 $p, q \in \{1, 2, \dots, m\}$. 因此, 每一个可能的 3 元组 (x, y, z) 作为行在 $(\alpha \ \beta \ \gamma)$ 中恰好出现 $\frac{2m^2n}{2 \cdot (2m)^2} = \frac{2n}{2^3}$ 次.

情形 3 若 α 、 β 和 γ 中有两列取自 E 的前 $m(n-2)$ 列, 另外一列取自 E 的最后两列. 由引理 4.2 可知,

$$\begin{pmatrix} A_1 \otimes B & \beta_1 \\ -A_1 \otimes B & -\beta_1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} A_1 \otimes B & \beta_2 \\ -A_1 \otimes B & -\beta_2 \end{pmatrix}$$

都是 $\mathcal{X}$ 上的 $\text{OA}(2mn, m(n-2) + 1, 2, 3)$, 其中

$$\beta_i = (\underbrace{\beta_i, \beta_i, \dots, \beta_i}_m)^T, \quad i = 1, 2,$$

则每一个可能的 3 元组 (x, y, z) 作为行在 (α, β, γ) 中恰好出现 $\frac{2m^2n}{2^2 \cdot (2m)} = \frac{2mn}{2^3}$ 次.

最后, 因为

$$\begin{aligned} N &= 1 + \left\{ \sum_{i=1}^{m(n-2)} (2-1) + \sum_{i=m(n-2)+1}^{m(n-2)+2} (2m-1) \right\} \\ &\quad + (2m-1) \left\{ \left[\sum_{i=1}^{m(n-2)} (2-1) + \sum_{i=m(n-2)+1}^{m(n-2)+2} (2m-1) \right] - (2m-1) \right\} \\ &= 1 + \{m(n-2) + 2 \cdot (2m-1)\} + (2m-1)[m(n-2) + (2m-1)] \\ &= 1 + m(n-2) + 2 \cdot (2m-1) + (2m-1)(mn-1) \\ &= 1 + m(n-2) + (2m-1)(mn+1) \\ &= 1 + mn - 2m + 2m^2n + 2m - mn - 1 \\ &= 2m^2n, \end{aligned}$$

所以, 上述构造的 $\text{MOA}(2m^2n, (2)^{m(n-2)}(2m)^2, 3)$ 也是紧的. $\square$

在构造 4.4 中取 $m = 2, 4$, 就得到了如下的构造.

构造 4.5 ^[16] 若存在一个 n 阶 Hadamard 矩阵, 则存在一个紧的 $\text{MOA}(8n, 2^{2n-4}4^2, 3)$ 和一个紧的 $\text{MOA}(32n, 2^{4n-8}8^2, 3)$.

推论 4.6 若存在一个 n 阶 Hadamard 矩阵, 则存在一个紧的 $\text{MOA}(2^{2a+1}n, (2)^{2^a(n-2)}(2^{a+1})^2, 3)$, 其中 a 是任意正整数.

证明 对任意正整数 a , 由引理 4.2 可知, 存在一个 2^a 阶 Hadamard 矩阵, 则由构造 4.4 得结论成立. $\square$

结合引理 4.1、构造 4.3 和推论 4.6, 我们得到下面的结论.

定理 4.7 对于任意的正整数 m 和 a , 若 n 满足下列条件之一:

- (i) $4 \mid n$ 且 $n \leq 200$ 或者 $n = 2^b$, 其中 b 是一个正整数;
- (ii) $n \equiv 0 \pmod{4}$ 且 $n-1$ 是一个素数幂;
- (iii) $n = 2(s+1)$, 其中 s 是一个奇素数幂,

则存在一个紧的 $\text{MOA}(2mn, (2)^{n-1}(2m)^1, 3)$ 、一个紧的 $\text{MOA}(64n, (2)^{16(n-1)}(4)^6, 3)$ 和一个紧的 $\text{MOA}(2^{2a+1}n, (2)^{2^a(n-2)}(2^{a+1})^2, 3)$.

5 总结

本文通过利用差阵和 Hadamard 矩阵给出了强度 3 的混合正交表的新构造, 并且应用这些构造得到了许多新的强度 3 的混合正交表. 在第 2 和 3 节中, 可知差阵是构造混合正交表的强有力工具, 而在第 2 节中也得到了一些差阵的新结果, 如推论 2.14、2.20、2.22、引理 2.16 和 2.17. 但差阵的存在性问题还远远没有解决.

- 18 Gupta V K, Nigam A K. A class of asymmetrical orthogonal resolution-IV designs. *J Statist Plann Inference*, 1985, 11: 381–383
- 19 Jiang L, Yin J X. An approach of constructing mixed-level orthogonal arrays of strength ≥ 3 . *Sci China Math*, 2013, 56: 1109–1115
- 20 Suen C, Das A, Dey A. On the construction of asymmetric orthogonal arrays. *Statist Sinica*, 2001, 11: 241–260
- 21 Nguyen M V M. Some new constructions of strength 3 mixed orthogonal arrays. *J Statist Plann Inference*, 2008, 138: 220–233
- 22 Bush K A. Orthogonal arrays of index unity. *Ann Math Statist*, 1952, 23: 426–434
- 23 Hedayat A S, Stufken J, Su G. On difference schemes and orthogonal arrays of strength t . *J Statist Plann Inference*, 1996, 56: 307–324
- 24 Bose R C, Bush K A. Orthogonal arrays of strength two and three. *Ann Math Statist*, 1952, 23: 508–524
- 25 Buratti M. Recursive constructions for difference matrices and relative difference families. *J Combin Des*, 1998, 6: 165–182
- 26 Drake D A. Partial λ -geometries and generalized Hadamard matrices over groups. *Canad J Math*, 1979, 31: 617–627
- 27 Ge G N. On $(g, 4; 1)$ -difference matrices. *Discrete Math*, 2005, 301: 164–174
- 28 Ji L J, Yin J X. Constructions of new orthogonal arrays and covering arrays of strength three. *J Combin Theory Ser A*, 2010, 117: 236–247
- 29 Shrikhande S. Generalized Hadamard matrices and orthogonal arrays of strength two. *Canad J Math*, 1964, 16: 736–740
- 30 Zhang Y S, Li W G, Mao S S, et al. A simple method for constructing orthogonal arrays by the Kronecker sum. *J Syst Sci Complex*, 2006, 19: 266–273

Constructions of mixed orthogonal arrays of strength three

CHEN GuangZhou & LEI JianGuo

Abstract Symmetric orthogonal arrays and mixed (or asymmetric) orthogonal arrays are useful in the design of various experiments. They are also a fundamental tool in the construction of various combinatorial configurations. In this paper, we obtain some difference matrices of strength three and provide some new constructions of mixed orthogonal arrays of strength three by using difference matrices and Hadamard matrices. As an application, we obtain some new mixed orthogonal arrays of strength three, and some of them are tight.

Keywords mixed orthogonal array, asymmetric, difference matrix, Hadamard matrix, Kronecker sum

MSC(2010) 05B15, 62K15

doi: 10.1360/012016-23