广义 Zakharov 方程解的最佳收敛速度

张景军^{①*}, 郭柏灵^②^① 嘉兴学院数理与信息工程学院, 嘉兴 314001;^② 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088

E-mail: zjj_math@aliyun.com, gbl@iapcm.ac.cn

收稿日期: 2014-02-23; 接受日期: 2014-11-04; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11201185) 和浙江省自然科学基金 (批准号: LQ12A01013) 资助项目

摘要 本文考虑一类含自生磁场效应的广义 Zakharov 方程, 并对它的非线性 Schrödinger 极限行为开展研究, 主要考虑解的收敛速度问题. 通过对非线性项的细致估计, 文中给出收敛速度与第一初始层及第二初始层之间的具体依赖关系. 该工作改进了 Zhang 和 Guo 在 2011 年得到的收敛性结果.

关键词 广义 Zakharov 方程 自生磁场 收敛速度

MSC (2010) 主题分类 76B03, 35Q55

1 引言

本文考虑如下的广义 Zakharov 方程:

$$\begin{cases} iE_t + \text{grad div} E - \alpha \text{rot rot} E - nE + iE \times B = 0, \\ \lambda^{-2} n_{tt} - \Delta n = \Delta |E|^2, \\ \Delta B - i\beta \text{rot rot}(E \times \bar{E}) - \gamma B = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\alpha \geq 1$, $\beta, \lambda > 0$ 及 $\gamma \geq 0$ 均为物理常数, $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$. 方程 (1.1) 描述冷等离子体中的自生磁场效应, 其物理推导过程见文献 [1]. 上述方程中, 函数 $E: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ 表示高频电场的缓变振幅, 函数 $n: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 是指离子密度对于平衡位置的扰动量, 函数 $B: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 表示自生磁场. $\bar{E}$ 是 E 的共轭复数. 另外, 方程 (1.1) 中的记号 $\times$ 表示两个 $\mathbb{R}^3$ 或 $\mathbb{C}^3$ 向量的矢量积.

若忽略磁场 B , 广义 Zakharov 方程 (1.1) 就回归到经典 Zakharov 方程 (取 $\alpha = 1$)

$$\begin{cases} iE_t + \Delta E - nE = 0, \\ \lambda^{-2} n_{tt} - \Delta n = \Delta |E|^2. \end{cases} \quad (1.2)$$

该方程描述了未磁化等离子体中 Langmuir 波的传播现象 [2]. 鉴于该方程在物理上的重要性, 在过去的三十多年时间里, 许多学者对方程 (1.2) 都作过广泛且深入的研究. 关于方程 (1.2) 光滑解或低正则解的适定性结果, 可以参阅文献 [3–9]. 直观上看, 若令离子声速 $\lambda \rightarrow \infty$, 则 Zakharov 方程 (1.2) 趋向于立方 Schrödinger 方程

$$iE_t + \Delta E + |E|^2 E = 0.$$

英文引用格式: Zhang J J, Guo B L. Improved convergence rate of the solution for a generalized Zakharov system (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 9–22, doi: 10.1360/012014-68

该极限行为的严格数学理论证明, 见文献 [10–12].

关于磁场型 Zakharov 方程的研究, 相关数学理论成果可参见文献 [13–18]. 特别地, 对于广义 Zakharov 方程 (1.1), Laurey 得到局部光滑解的适定性以及二维小初值整体光滑解的存在性^[13]. 然而, 文献 [13] 只考虑适定性问题 (即只对固定的 $\lambda > 0$ 进行讨论), 并没有对方程的极限问题开展研究. 因此, 本文感兴趣的是 $\lambda \rightarrow \infty$ 时方程 (1.1) 解的极限行为. 为此, 对方程 (1.1) 用参数 λ 来标识:

$$\begin{cases} iE_t^\lambda + \text{grad div} E^\lambda - \alpha \text{rot rot} E^\lambda - n^\lambda E^\lambda + iE^\lambda \times B^\lambda = 0, \\ \lambda^{-2} n_{tt}^\lambda - \Delta n^\lambda = \Delta |E^\lambda|^2, \\ \Delta B^\lambda - i\beta \text{rot rot}(E^\lambda \times \overline{E^\lambda}) - \gamma B^\lambda = 0, \\ E^\lambda(0) = E_0^\lambda, \quad n^\lambda(0) = n_0^\lambda, \quad n_t^\lambda(0) = n_1^\lambda. \end{cases} \quad (1.3)$$

本文目标是研究 $\lambda \rightarrow \infty$ 时解 $(E^\lambda, n^\lambda, B^\lambda)$ 的具体收敛情况. 从形式上看, 易知当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, 极限方程应为如下含磁场效应的非线性 Schrödinger 方程

$$\begin{cases} iE_t^\infty + \text{grad div} E^\infty - \alpha \text{rot rot} E^\infty + |E^\infty|^2 E^\infty + iE^\infty \times B^\infty = 0, \\ \Delta B^\infty - i\beta \text{rot rot}(E^\infty \times \overline{E^\infty}) - \gamma B^\infty = 0, \\ E^\infty(0) = E_0^\infty. \end{cases} \quad (1.4)$$

于是在数学上需致力于给出方程 (1.3) 收敛于方程 (1.4) 的严格理论证明.

在 (1.3) 的第二个方程中令 $\lambda \rightarrow \infty$, 形式上会得到 $n^\infty + |E^\infty|^2 = 0$, 这也就蕴含着 $n_t^\infty + |E^\infty|_t^2 = 0$. 注意到这两个等式要求初值满足一定的相容性条件, 即 $n_0^\infty + |E_0^\infty|^2 \rightarrow 0$ 和 $n_1^\infty + |E_0^\infty|_t^2(0) \rightarrow 0$. 但是, 并非所有事先给出的初值都满足这种相容性条件. 于是, 当 $n_0^\infty + |E_0^\infty|^2 \not\rightarrow 0$ 或 $n_1^\infty + |E_0^\infty|_t^2(0) \not\rightarrow 0$ 时, 我们不得不考虑初始层现象. 事实上, 表达式 $n_0^\infty + |E_0^\infty|^2$ 会产生第一初始层现象, 而表示式 $n_1^\infty + |E_0^\infty|_t^2(0)$ 则产生第二初始层现象. 这种初始层效应可用一个校正函数 N^λ 来刻画, 其中 N^λ 是如下 Cauchy 问题的解:

$$\begin{aligned} \lambda^{-2} N_{tt}^\lambda - \Delta N^\lambda &= 0, \\ N^\lambda(0) &= N_0^\lambda, \quad N_t^\lambda(0) = N_1^\lambda, \end{aligned} \quad (1.5)$$

这里, $N_0^\lambda := n_0^\lambda + |E_0^\infty|^2$, $N_1^\lambda := n_1^\lambda - 2\text{Im}[(\text{grad div} E_0^\infty - \alpha \text{rot rot} E_0^\infty) \cdot \overline{E_0^\infty}]$. 注意, 初值 N_1^λ 的表示方式是基于以下事实给出的:

$$|E^\infty|_t^2 = -2\text{Im}[(\text{grad div} E^\infty - \alpha \text{rot rot} E^\infty) \cdot \overline{E^\infty}].$$

上式可由 (1.4) 的第一个方程推出.

在陈述相关结果之前, 先对文中的常用记号作些约定. 设 $m \in \mathbb{Z}^+$ 和 $1 \leq p \leq +\infty$, $W^{m,p}(\mathbb{R}^3)$ (当 $p = 2$ 时, $W^{m,2}(\mathbb{R}^3)$ 就简记为 $H^m(\mathbb{R}^3)$) 表示通常的非齐次 Sobolev 空间. 齐次 Sobolev 空间 $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ 定义为

$$\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3) = \{u; \Lambda^{-1}u \in L^2(\mathbb{R}^3), \Lambda := (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\},$$

该空间的范数为

$$\|u\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} = \|\Lambda^{-1}u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \| |\xi|^{-1} \hat{u}(\xi) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

其中, $\hat{u} = \mathcal{F}u$ 是函数 u 的 Fourier 变换. 为得到最佳收敛速度, 文中还需用到加权空间 H_*^m , 其定义为

$$\|u\|_{H_*^m} := \max_{|\beta| \leq m} \|(1 + |x|^2)D^\beta u\|_{L^2}.$$

方程 (1.3) 中的初值会在乘积空间 V_m 中给出, 其中

$$V_m := H^m \times H^{m-1} \times (H^{m-2} \cap \dot{H}^{-1}),$$

并赋予 V_m 自然范数

$$\|(u_1, u_2, u_3)\|_{V_m} := (\|u_1\|_{H^m}^2 + \|u_2\|_{H^{m-1}}^2 + \|u_3\|_{H^{m-2} \cap \dot{H}^{-1}}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

关于方程 (1.3) 极限问题的研究, 文献 [16] 已证明如下收敛性结果: 当 $N_0^\lambda \neq 0$, $N_1^\lambda = 0$ 时, 有

$$\sup_{t \in [0, T]} (\|E^\lambda - E^\infty\|_{H^{m-2}} + \|B^\lambda - B^\infty\|_{H^{m-2}} + \|n^\lambda + |E^\infty|^2 - N^\lambda\|_{H^{m-3}}) \leq C\lambda^{-\frac{1}{2}},$$

以及当 $N_0^\lambda = N_1^\lambda = 0$ 时, 有

$$\sup_{t \in [0, T]} (\|E^\lambda - E^\infty\|_{H^{m-2}} + \|B^\lambda - B^\infty\|_{H^{m-2}} + \|n^\lambda + |E^\infty|^2\|_{H^{m-3}}) \leq C\lambda^{-1}. \quad (1.6)$$

然而, 用类似于文献 [11] 中的扰动方法, 可以发现上述收敛速度并不是最佳的. 事实上, 令

$$\begin{aligned} E &= E^{(0)} + \lambda^{-1}E^{(1)} + \lambda^{-2}E^{(2)} + \lambda^{-3}E^{(3)} + \dots, \\ n &= n^{(0)} + \lambda^{-1}n^{(1)} + \lambda^{-2}n^{(2)} + \lambda^{-3}n^{(3)} + \dots, \\ B &= B^{(0)} + \lambda^{-1}B^{(1)} + \lambda^{-2}B^{(2)} + \lambda^{-3}B^{(3)} + \dots. \end{aligned}$$

现将以上三式代入到方程 (1.1) 中, 整理得出关于 λ^{-1} 的零阶方程:

$$\begin{cases} iE_t^{(0)} + \text{grad div} E^{(0)} - \alpha \text{rot rot} E^{(0)} + |E^{(0)}|^2 E^{(0)} + iE^{(0)} \times B^{(0)} = 0, \\ n^{(0)} = -|E^{(0)}|^2, \quad \Delta B^{(0)} - i\beta \text{rot rot}(E^{(0)} \times \overline{E^{(0)}}) - \gamma B^{(0)} = 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

其初始条件为 $(E^{(0)}(0), n^{(0)}(0), n_t^{(0)}(0)) = (E_0, n_0, n_1)$. 同理, 整理得出关于 λ^{-1} 的一阶方程为:

$$\begin{cases} iE_t^{(1)} + \text{grad div} E^{(1)} - \alpha \text{rot rot} E^{(1)} \\ \quad - (n^{(0)} E^{(1)} + n^{(1)} E^{(0)}) + i(E^{(0)} \times B^{(1)} + E^{(1)} \times B^{(0)}) = 0, \\ n^{(1)} = -(E^{(0)} \cdot \overline{E^{(1)}} + E^{(1)} \cdot \overline{E^{(0)}}) = -2\text{Re}(E^{(0)} \cdot \overline{E^{(1)}}), \\ \Delta B^{(1)} - \gamma B^{(1)} - i\beta \text{rot rot}(E^{(0)} \cdot \overline{E^{(1)}} + E^{(1)} \cdot \overline{E^{(0)}}) = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

其初始条件为 $(E^{(1)}(0), n^{(1)}(0), n_t^{(1)}(0)) = (0, 0, 0)$. 类似地, 可以写出关于 λ^{-1} 的二阶及更高阶的方程, 为了简便起见, 这些高阶方程此处略去不写. 注意到, 方程 (1.8) 中的函数 $E^{(0)}$, $n^{(0)}$ 和 $B^{(0)}$ 是已知的, 实际上它们由方程 (1.7) 所唯一确定. 因此, 可以看到 (1.8) 中的第一个方程本质上是一个关于未知函数 $E^{(1)}$ 的线性方程, 通过常规的能量估计易得 $E^{(1)} \equiv 0$, 从而也就蕴含着 $n^{(1)} \equiv 0$ 和 $B^{(1)} \equiv 0$. 因此, 我们得到

$$E - E^{(0)} = O(\lambda^{-2}), \quad n - n^{(0)} = O(\lambda^{-2}), \quad B - B^{(0)} = O(\lambda^{-2}).$$

尽管以上讨论要求初值满足一定的相容性条件 $n_0 + |E_0|^2 = 0$ (该条件在很多讨论中过于苛刻), 但上述结果却强烈地暗示着收敛速度 (1.6) 有很大的改进余地. 这便是撰写本文的主要动因.

为了简单起见, 以下记

$$E := E^\lambda - E^\infty, \quad n = n^\lambda + |E^\infty|^2 - N^\lambda. \quad (1.9)$$

现在陈述文中的主要结果, 即定理 1. 该定理给出了广义 Zakharov 方程 (1.3) 的解趋向于 Schrödinger 方程 (1.4) 的最优收敛速度.

定理 1 设 $m \geq 6$ 为整数, $(E_0^\lambda, n_0^\lambda, n_1^\lambda)$ 和 E_0^λ 分别在空间 V_m 和 H_*^{m-3} 中一致有界, 且 $N_0^\lambda, \Lambda^{-1}N_1^\lambda \in H_*^{m-3}$. 令 $(E^\lambda, B^\lambda, n^\lambda) \in C([0, T^\lambda]; H^m(\mathbb{R}^3) \times H^m(\mathbb{R}^3) \times H^{m-1}(\mathbb{R}^3))$ 是方程 (1.3) 的解, 这里 T^λ 是该解的最大存在时间. 则 $T^\infty \leq \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} T^\lambda$ 且有

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T_0]} (\|E(t)\|_{H^{m-3}} + \|n(t)\|_{H^{m-4}} + \lambda^{-1} \|n_t(t)\|_{H^{m-5} \cap \dot{H}^{-1}}) \\ & \leq C(\|E(0)\|_{H^{m-3}} + \lambda^{-1} \|N_0^\lambda\|_{H_*^{m-3}} + \lambda^{-2} \|\Lambda^{-1}N_1^\lambda\|_{H_*^{m-3}} + \lambda^{-2}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

对任意 $0 < T_0 < T^\infty$ 皆成立, 其中常数 C 依赖于 T_0 和初值数据的一致界, 但 C 不依赖于参数 λ . 在 (1.10) 式中, (E, n) 的定义见 (1.9), (E^∞, B^∞) 是方程 (1.4) 的解, 其最大存在区间为 $[0, T^\infty)$, N^λ 是波方程 (1.5) 的自由演化解.

对比于文献 [10–12], 上述定理对解的正则性要求更低. 条件 $m \geq 6$ 蕴含着 $(E^\lambda, B^\lambda, n^\lambda)$ 是方程 (1.3) 的经典解. 顺便指出, 该假设不是必须的, 我们相信对于较小的 m , (1.10) 式仍旧成立, 不过本文并不试图去给出 m 的一个下界. 相比于文献 [16] 中的结果, 估计 (1.10) 更确切地给出收敛速度与第一初始层及第二初始层之间的相互依赖关系. 事实上, 从定理 1 可知, 在没有初始层效应的情形下 (即初值数据满足相容性条件 $N_0^\lambda = N_1^\lambda = 0$), 解的收敛速度可达到 $O(\lambda^{-2})$, 该结果与上面用扰动分析法得出的结论相吻合. 此外, 从定理 1 还可得知, 只有第一初始层效应时 (即 $N_0^\lambda \neq 0, N_1^\lambda = 0$) 解的收敛速度为 $O(\lambda^{-1})$, 相比之下, 只有第二初始层效应时 (即 $N_0^\lambda = 0, N_1^\lambda \neq 0$) 解的收敛速度却为 $O(\lambda^{-2})$. 而且, 文献 [11] 中关于未磁化 Zakharov 方程所得的结果蕴含着收敛速度 (1.10) 是最佳的. 因此, 定理 1 对文献 [16] 中的已有结果作了改进.

尽管定理 1 是针对三维情形给出的结果, 但所用方法亦可直接应用到二维情形. 特别地, 当 $d = 2$ 且范数 $\|E_0\|_{L^2}$ 较小时, 有 $T^\lambda = T^\infty = \infty$. 这是因为在 $\|E_0\|_{L^2}$ 的小性条件下, 二维方程 (1.3) 和 (1.4) 存在唯一整体解, 见文献 [13, 19]. 于是这种情形下, 定理 1 的结论对 $0 < T_0 < \infty$ 皆成立.

本文内容安排如下: 第 2 节给出一些预备知识, 包括方程 (1.3) 解关于参数 λ 的一致估计和一个积分不等式; 第 3 节给出定理 1 的证明; 第 4 节给出关于 $\|N^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}}$ 关于时间的积分估计, 该估计在定理 1 的证明中是至关重要的.

2 预备知识

本节给出一些预备知识. 首先, 可将磁场 B 表示成 E 的函数. 事实上, 因为 B 满足方程

$$\Delta B - i\beta \operatorname{rot} \operatorname{rot}(E \times \overline{E}) - \gamma B = 0,$$

所以通过两边取 Fourier 变换可得

$$B = B(E) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{i\beta}{|\xi|^2 + \gamma} (\xi \times (\xi \times \widehat{(E \times \overline{E})})) \right]. \quad (2.1)$$

该式蕴含着

$$\|B(E)\|_{H^m} \leq C\|E\|_{H^m}^2, \quad m > 3/2. \quad (2.2)$$

上面的 (2.1) 式和 (2.2) 式在后续讨论中会经常用到.

其次, 易知方程 (1.3) 的解 (充分光滑) 满足质量守恒

$$\|E^\lambda(t)\|_{L^2}^2 = \|E_0\|_{L^2}^2 \quad (2.3)$$

和能量守恒

$$\mathcal{H}(E^\lambda(t), n^\lambda(t), n_t^\lambda(t)) = \mathcal{H}(E_0, n_0, n_1), \quad (2.4)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(E^\lambda, n^\lambda, n_t^\lambda) = & \|\operatorname{div} E^\lambda\|_{L^2}^2 + \alpha \|\operatorname{rot} E^\lambda\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|n^\lambda\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \lambda^{-2} \|n_t^\lambda\|_{H^{-1}}^2 \\ & + \int_{\mathbb{R}^d} n^\lambda |E^\lambda|^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|\xi|^2 + \gamma} (|\xi \cdot \widehat{u^\lambda}|^2 - |\xi|^2 |\widehat{u^\lambda}|^2) d\xi, \end{aligned}$$

上式中 $u^\lambda = E^\lambda \times \overline{E^\lambda}$. 这里, 我们称方程 (1.3) 的解充分光滑, 是指解 $(E^\lambda, n^\lambda, n_t^\lambda) \in V_r$, 其中 $r > 0$ 充分大. 基于守恒量 (2.3) 和 (2.4), 通过细致的能量估计, 可得关于解 $(E^\lambda, n^\lambda, n_t^\lambda)$ 的一致估计.

命题 1 设 $m \geq 3$ 为一整数, $(E^\lambda(0), n^\lambda(0), n_t^\lambda(0)) \in V_m$ 且满足

$$\|(E^\lambda, n^\lambda, \lambda^{-1} n_t^\lambda)(0)\|_{V_m} \leq C_0, \quad (2.5)$$

其中 C_0 与 λ 无关. 令 $(E^\lambda, n^\lambda, n_t^\lambda)$ 是方程 (1.3) 且以 $(E^\lambda(0), n^\lambda(0), n_t^\lambda(0))$ 为初值的解. 则存在 $T = T(C_0) > 0$ 满足

$$\sup_{t \in [0, T]} (\|(E^\lambda, n^\lambda, n_t^\lambda)(t)\|_{V_m} + \|E_t^\lambda(t)\|_{H^{m-2}} + \|B^\lambda(t)\|_{H^m}) \leq C, \quad (2.6)$$

其中 C 依赖于 T 和 C_0 , 但 T 和 C 均不依赖于参数 λ .

由 (2.6) 式, 可知存在 (E^λ, B^λ) 的子列 $(E^{\lambda_k}, B^{\lambda_k})$ 满足当 $\lambda_k \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} E^{\lambda_k}, B^{\lambda_k} &\rightharpoonup E^\infty, B^\infty \text{ 在 } L^\infty(0, T; H^m) \text{ 中,} \\ E_t^{\lambda_k} &\rightharpoonup E_t^\infty \text{ 在 } L^\infty(0, T; H^{m-2}) \text{ 中.} \end{aligned}$$

进一步, 还可证明 (E^∞, B^∞) 是极限方程 (1.4) 的解.

命题 2 上述 E^∞ 和 B^∞ 即为极限方程 (1.4) 的唯一解, 满足 $(E^\infty, B^\infty) \in C([0, T]; H^m \times H^m)$, 其中 T 由命题 1 所确定.

命题 1 和 2 的证明可参见文献 [16]. 最后, 我们以一个积分不等式来结束本节内容.

命题 3 设非负函数 $f(t), g(t) \in C^1$ 且满足

$$f^2(t) \leq A + \int_0^t (f^2(s) + f(s)g(s)) ds, \quad t \in [0, T],$$

其中 $A > 0$ 为常数. 则有

$$f(t) \leq e^{\frac{1}{2}T} \left(A^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^t g(s) ds \right), \quad t \in [0, T].$$

证明 令 $F(t) := \int_0^t (f^2(s) + f(s)g(s))ds$, 利用命题条件, 可得

$$F'(t) = f^2(t) + f(t)g(t) \leq A + F(t) + (A + F(t))^{\frac{1}{2}}g(t).$$

若设 $G(t) = (A + F(t))^{\frac{1}{2}}$, 则上式等价于

$$2G(t)G'(t) = [G^2(t)]' \leq G^2(t) + G(t)g(t),$$

即

$$G'(t) \leq \frac{1}{2}G(t) + \frac{1}{2}g(t), \quad t \in [0, T].$$

利用 Gronwall 不等式得

$$G(t) \leq e^{\frac{1}{2}t} \left(A^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^t g(s)ds \right).$$

由于 $f^2(t) \leq A + F(t) = G^2(t)$, 故

$$f(t) \leq G(t) \leq e^{\frac{1}{2}T} \left(A^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^t g(s)ds \right).$$

至此, 命题 3 证毕. □

3 定理 1 的证明

以下记号贯穿于本节的讨论:

$$E := E^\lambda - E^\infty, \quad n := n^\lambda + |E^\infty|^2 - N^\lambda, \quad B := B^\lambda - B^\infty.$$

由于 (B^λ, E^λ) 和 (B^∞, E^∞) 均满足 (2.1) 式, 故利用 (2.1) 和 (2.6), 易知

$$\|B^\lambda - B^\infty\|_{C([0,T];H^k)} \leq C\|E^\lambda - E^\infty\|_{C([0,T];H^k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (3.1)$$

其中 T 由命题 1 给出.

先导出 E 和 n 的方程. 事实上, 根据 E^λ 和 E^∞ 所满足的方程, 可知 E 满足

$$\begin{aligned} & iE_t + \text{grad div} E - \alpha \text{rot rot} E \\ & - nE^\lambda - N^\lambda E^\lambda + |E^\infty|^2 E + iE \times B^\lambda + iE^\infty \times B = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

且 $E(0) = E_0^\lambda - E_0^\infty$. 同理, 从 n^λ 和 N^λ 所满足的方程可推出

$$\begin{aligned} & \lambda^{-2} n_{tt} - \Delta n = \Delta(|E^\lambda|^2 - |E^\infty|^2) + \lambda^{-2} |E^\infty|_{tt}^2, \\ & n(0) = 0, \quad n_t(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

下面给出本文主要定理的证明.

定理 1 的证明 该证明分三步来完成.

第 1 步 E 和 n 的低阶范数估计. 方程 (3.2) 与 E 作内积, 并利用 (2.6) 式和 (3.1) 式, 可得

$$\frac{d}{dt} \|E\|_{L^2}^2 = 2\text{Im} \int_{\mathbb{R}^3} (nE^\lambda + N^\lambda E^\lambda - |E^\infty|^2 E - iE \times B^\lambda - iE^\infty \times B) \cdot \bar{E} dx$$

$$\leq C(\|n\|_{L^2} + \|E\|_{L^2} + \|N^\lambda E^\lambda\|_{L^2})\|E\|_{L^2}. \quad (3.4)$$

方程 (3.3) 两边乘以 $\Lambda^{-2}n_t$ (回顾 $\Lambda = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$) 并在 $\mathbb{R}^3$ 上积分, 则

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\lambda^{-2} \|n_t\|_{\dot{H}^{-1}}^2 + \|n\|_{L^2}^2 + 2 \int_{\mathbb{R}^3} (|E^\lambda|^2 - |E^\infty|^2) n dx - 2\lambda^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} n \Lambda^{-2} |E^\infty|_{tt}^2 dx \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (|E^\lambda|^2 - |E^\infty|^2)_t n dx - \lambda^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} n \Lambda^{-2} |E^\infty|_{ttt}^2 dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

由于

$$\begin{aligned} |E^\lambda|_t^2 &= 2\text{Im}[(-\text{grad div} E^\lambda + \alpha \text{rot rot} E^\lambda) \cdot \overline{E^\lambda}], \\ |E^\infty|_t^2 &= 2\text{Im}[(-\text{grad div} E^\infty + \alpha \text{rot rot} E^\infty) \cdot \overline{E^\infty}], \end{aligned} \quad (3.6)$$

故有

$$\begin{aligned} |E^\lambda|_t^2 - |E^\infty|_t^2 &= 2\text{Im}[(-\text{grad div} E + \alpha \text{rot rot} E) \cdot \overline{E^\lambda}] \\ &\quad + 2\text{Im}[(-\text{grad div} E^\infty + \alpha \text{rot rot} E^\infty) \cdot \overline{E}]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

由上式可得

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} (|E^\lambda|^2 - |E^\infty|^2)_t n dx \right| \leq C \|n\|_{L^2} \|E\|_{H^2} \leq C(\|n\|_{L^2}^2 + \|E\|_{H^2}^2). \quad (3.8)$$

利用以下事实

$$\begin{aligned} \text{Im}[(\text{grad div} E) \cdot \overline{E}] &= \text{div Im}[(\text{div} E) \overline{E}], \\ \text{Im}[(\text{rot rot} E) \cdot \overline{E}] &= \text{div Im}[(\text{div} E) \overline{E}] - \text{div Im}(E \nabla \overline{E}), \end{aligned} \quad (3.9)$$

并联合 (3.6) 中的第二式, 可得

$$\left| \lambda^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} n \Lambda^{-2} |E^\infty|_{ttt}^2 dx \right| \leq C \lambda^{-2} \|n\|_{L^2} \|[(\nabla E^\infty) E^\infty]_{tt}\|_{\dot{H}^{-1}}.$$

因为 $E^\infty \in C^j([0, T]; H^{m-2j})$, $j = 0, 1, 2$, 利用嵌入关系 $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)$, 不难得到

$$\begin{aligned} \|\nabla E^\infty E_{tt}^\infty\|_{\dot{H}^{-1}} &\leq C \|\nabla E^\infty E_{tt}^\infty\|_{L^{\frac{6}{5}}} \leq C \|\nabla E^\infty\|_{L^3} \|E_{tt}^\infty\|_{L^2} \leq C, \\ \|\nabla E_t^\infty E_t^\infty\|_{\dot{H}^{-1}} &\leq C \|\nabla E_t^\infty E_t^\infty\|_{L^{\frac{6}{5}}} \leq C \|\nabla E_t^\infty\|_{L^2} \|E_t^\infty\|_{L^3} \leq C, \\ \|\nabla E_{tt}^\infty E^\infty\|_{\dot{H}^{-1}} &\leq C \|\nabla E_{tt}^\infty E^\infty\|_{L^{\frac{6}{5}}} \leq C \|\nabla E_{tt}^\infty\|_{L^2} \|E^\infty\|_{L^3} \leq C, \end{aligned}$$

于是也就有

$$\left| \lambda^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} n \Lambda^{-2} |E^\infty|_{ttt}^2 dx \right| \leq C \lambda^{-2} \|n\|_{L^2} \leq C \lambda^{-4} + C \|n\|_{L^2}^2. \quad (3.10)$$

对 (3.5) 式关于 $t \in [0, T]$ 积分得

$$\begin{aligned} \lambda^{-2} \|n_t\|_{\dot{H}^{-1}}^2 + \|n\|_{L^2}^2 &\leq C \lambda^{-4} T + C \int_0^t (\|E\|_{H^2}^2 + \|n\|_{L^2}^2) ds \\ &\quad + C \left| \int_{\mathbb{R}^3} (|E^\lambda|^2 - |E^\infty|^2) n dx \right| + C \left| \lambda^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} n \Lambda^{-2} |E^\infty|_{tt}^2 dx \right|. \end{aligned}$$

现在估计上式中的最后两项. 利用 Cauchy-Schwarz 不等式和 (3.7) 式, 有

$$\begin{aligned}
 C \left| \int_{\mathbb{R}^3} (|E^\lambda|^2 - |E^\infty|^2) n dx \right| &\leq \frac{1}{4} \|n\|_{L^2}^2 + C \| |E^\lambda|^2 - |E^\infty|^2 \|_{L^2}^2 \\
 &\leq \frac{1}{4} \|n\|_{L^2}^2 + C \| (|E^\lambda|^2 - |E^\infty|^2)(0) \|_{L^2}^2 \\
 &\quad + 2C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (|E^\lambda|^2 - |E^\infty|^2) (|E^\lambda|^2 - |E^\infty|^2)_s dx ds \\
 &\leq \frac{1}{4} \|n\|_{L^2}^2 + C \|E(0)\|_{L^2}^2 + C \int_0^t \|E\|_{H^2}^2 ds.
 \end{aligned}$$

根据 (3.9) 式和嵌入关系 $\dot{H}^{-1} \hookrightarrow L^{\frac{6}{5}}$, 可以看出

$$C \left| \lambda^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} n \Delta^{-2} |E^\infty|_{tt}^2 dx \right| \leq \frac{1}{4} \|n\|_{L^2}^2 + C \lambda^{-4} \|[(\nabla E^\infty) E^\infty]_t\|_{\dot{H}^{-1}} \leq \frac{1}{4} \|n\|_{L^2}^2 + C \lambda^{-4}.$$

于是, 联合上述三个不等式得出

$$\lambda^{-2} \|n_t\|_{\dot{H}^{-1}}^2 + \|n\|_{L^2}^2 \leq C \lambda^{-4} + C \|E(0)\|_{L^2}^2 + C \int_0^t (\|E\|_{H^2}^2 + \|n\|_{L^2}^2) ds. \quad (3.11)$$

第 2 步 E 和 n 的高阶范数估计. 不失一般性, 不妨假设 m 是偶数, 即 $m = 2k, k \geq 3$, 这是因为 m 是奇数的情形可类似讨论. 方程 (3.2) 乘以 $\Delta^{2k-4}(\text{grad div } \bar{E} - \alpha \text{rot rot } \bar{E})$, 积分并取虚部可得

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} (\|\Delta^{k-2} \text{div } E\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta^{k-2} \text{rot } E\|_{L^2}^2) \\
 &= 2\text{Im} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \Delta^{k-2} (n E^\lambda + N^\lambda E^\lambda - |E^\infty|^2 E) \cdot \nabla \Delta^{k-3} (\text{grad div } \bar{E} - \alpha \text{rot rot } \bar{E}) dx \\
 &\quad - 2\text{Im} i \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \Delta^{k-2} (E \times B^\lambda + E^\infty \times B) \cdot \nabla \Delta^{k-3} (\text{grad div } \bar{E} - \alpha \text{rot rot } \bar{E}) dx. \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

利用 (2.6)、(3.1) 式及 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\begin{aligned}
 (3.12) \text{ 式的左边} &\leq 2\text{Im} \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \Delta^{k-2} n) E^\lambda \cdot \nabla \Delta^{k-3} (\text{grad div } \bar{E} - \alpha \text{rot rot } \bar{E}) dx \\
 &\quad + C (\|n\|_{H^{m-4}} + \|E\|_{H^{m-3}} + \|N^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}}) \|E\|_{H^{m-3}}. \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

现在来估计 n 的 H^{m-4} 范数. 方程 (3.3) 与 $\Delta^{2k-5} n_t$ 作内积, 则

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\lambda^{-2} \|\nabla \Delta^{k-3} n_t\|_{L^2}^2 + \|\Delta^{k-2} n\|_{L^2}^2 + 2 \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^{k-2} (|E^\lambda|^2 - |E^\infty|^2) \Delta^{k-2} n dx \right. \\
 &\quad \left. + 2\lambda^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^{k-3} |E^\infty|_{tt}^2 \Delta^{k-2} n dx \right) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^{k-2} (|E^\lambda|_t^2 - |E^\infty|_t^2) \Delta^{k-2} n dx + \lambda^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^{k-3} |E^\infty|_{ttt}^2 \Delta^{k-2} n dx \\
 &=: I_1 + I_2. \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

对于 I_1 , 利用 (3.7) 式得

$$|I_1| \leq 2\text{Im} \int_{\mathbb{R}^3} [\nabla \Delta^{k-3} (\text{grad div } E - \alpha \text{rot rot } E) \cdot \overline{E^\lambda}] \nabla \Delta^{k-2} n dx + C \|E\|_{H^{m-3}} \|n\|_{H^{m-4}}.$$

注意到上式不等号右边第一项与 (3.13) 式中的积分项相互抵消. 对于 I_2 , 直接估计不难得到

$$|I_2| = \lambda^{-2} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^{k-3} |E^\infty|_{tt}^2 \Delta^{k-2} n dx \right| \leq C \lambda^{-2} \|\Delta^{k-2} n\|_{L^2} \leq C \lambda^{-2} \|n\|_{H^{m-4}}.$$

将 I_1 和 I_2 的估计代入 (3.14) 式中, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\lambda^{-2} \|\nabla \Delta^{k-3} n_t\|_{L^2}^2 + \|\Delta^{k-2} n\|_{L^2}^2 + 2 \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^{k-2} (|E^\lambda|^2 - |E^\infty|^2) \Delta^{k-2} n dx \right. \\ & \quad \left. + 2 \lambda^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^{k-3} |E^\infty|_{tt}^2 \Delta^{k-2} n dx \right) \\ & \leq 2 \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^3} [\nabla \Delta^{k-3} (\operatorname{grad} \operatorname{div} E - \alpha \operatorname{rot} \operatorname{rot} E) \cdot \overline{E^\lambda}] \nabla \Delta^{k-2} n dx \\ & \quad + C \|E\|_{H^{m-3}} \|n\|_{H^{m-4}} + C \lambda^{-2} \|n\|_{H^{m-4}}. \end{aligned}$$

把上式与 (3.13) 式相加, 则有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(2 \|\Delta^{k-2} \operatorname{div} E\|_{L^2}^2 + 2 \alpha \|\Delta^{k-2} \operatorname{rot} E\|_{L^2}^2 + \lambda^{-2} \|\nabla \Delta^{k-3} n_t\|_{L^2}^2 + \|\Delta^{k-2} n\|_{L^2}^2 \right. \\ & \quad \left. + 2 \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^{k-2} (|E^\lambda|^2 - |E^\infty|^2) \Delta^{k-2} n dx + 2 \lambda^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^{k-3} |E^\infty|_{tt}^2 \Delta^{k-2} n dx \right) \\ & \leq C (\|n\|_{H^{m-4}} + \|E\|_{H^{m-3}} + \|N^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}}) \|E\|_{H^{m-3}} + C \lambda^{-2} \|n\|_{H^{m-4}}, \end{aligned}$$

再关于时间 $t \in [0, T]$ 积分得

$$\begin{aligned} & \|\Delta^{k-2} \operatorname{div} E\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta^{k-2} \operatorname{rot} E\|_{L^2}^2 + \lambda^{-2} \|\nabla \Delta^{k-3} n_t\|_{L^2}^2 + \|\Delta^{k-2} n\|_{L^2}^2 \\ & \leq C \lambda^{-4} + \int_0^t (\|E\|_{H^{m-3}}^2 + \|n\|_{H^{m-4}}^2 + \|N^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} \|E\|_{H^{m-3}}) ds \\ & \quad + \left| \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^{k-2} (|E^\lambda|^2 - |E^\infty|^2) \Delta^{k-2} n dx \right| \\ & \quad + \left| \lambda^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^{k-3} |E^\infty|_{tt}^2 \Delta^{k-2} n dx \right|. \end{aligned}$$

上式中的最后两项可按如下方式进行估计:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^{k-2} (|E^\lambda|^2 - |E^\infty|^2) \Delta^{k-2} n dx \right| \\ & \leq \frac{1}{4} \|\Delta^{k-2} n\|_{L^2}^2 + C \|\Delta^{k-2} (|E^\lambda|^2 - |E^\infty|^2)\|_{L^2}^2 \\ & \leq \frac{1}{4} \|\Delta^{k-2} n\|_{L^2}^2 + C \|\Delta^{k-2} (|E^\lambda|^2 - |E^\infty|^2)(0)\|_{L^2}^2 \\ & \quad + 2C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^{k-2} (|E^\lambda|^2 - |E^\infty|^2) \Delta^{k-2} (|E^\lambda|^2 - |E^\infty|^2)_s dx ds \\ & \leq \frac{1}{4} \|\Delta^{k-2} n\|_{L^2}^2 + C \|\Delta^{k-2} E(0)\|_{L^2}^2 + C \int_0^t \|E\|_{H^{m-3}}^2 ds \end{aligned}$$

以及

$$\left| \lambda^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^{k-3} |E^\infty|_{tt}^2 \Delta^{k-2} n dx \right| \leq C \lambda^{-2} \|\Delta^{k-2} n\|_{L^2} \leq C \lambda^{-4} + \frac{1}{4} \|\Delta^{k-2} n\|_{L^2}^2.$$

注意到上述估计需要利用条件 $m \geq 6$, 这是因为该条件和 (1.3) 的第一个方程蕴含着

$$\Delta^{k-3}|E^\infty|_{tt}^2 \in C([0, T^\infty); L^2).$$

联合以上几个估计式, 得出

$$\begin{aligned} & \|\Delta^{k-2}\operatorname{div}E\|_{L^2}^2 + \alpha\|\Delta^{k-2}\operatorname{rot}E\|_{L^2}^2 + \lambda^{-2}\|\nabla\Delta^{k-3}n_t\|_{L^2}^2 + \|\Delta^{k-2}n\|_{L^2}^2 \\ & \leq C\lambda^{-4} + C\|\Delta^{k-2}E(0)\|_{L^2}^2 \\ & \quad + \int_0^t (\|E\|_{H^{m-3}}^2 + \|n\|_{H^{m-4}}^2 + \|N^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}}\|E\|_{H^{m-3}})ds. \end{aligned} \quad (3.15)$$

第 3 步 从估计式 (3.4)、(3.11) 和 (3.15) 可推出

$$\begin{aligned} & \|E\|_{H^{m-3}}^2 + \|n\|_{H^{m-4}}^2 + \lambda^{-2}\|n_t\|_{H^{m-5}\cap\dot{H}^{-1}}^2 \\ & \leq C\|E(0)\|_{H^{m-3}}^2 + C\lambda^{-4} \\ & \quad + C\int_0^t (\|E\|_{H^{m-2}}^2 + \|n\|_{H^{m-3}}^2 + \|N^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}}\|E\|_{H^{m-3}})ds. \end{aligned} \quad (3.16)$$

利用命题 3 和如下这个关键估计 (该估计的证明推迟至第 4 节给出)

$$\int_0^t \|N^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}}ds \leq C\lambda^{-1}\|N_0^\lambda\|_{H_*^{m-3}} + C\lambda^{-2}\|\Lambda^{-1}N_1^\lambda\|_{H_*^{m-3}}, \quad (3.17)$$

可得

$$\begin{aligned} & \|E\|_{H^{m-3}} + \|n\|_{H^{m-4}} + \lambda^{-1}\|n_t\|_{H^{m-5}\cap\dot{H}^{-1}} \\ & \leq C\|E(0)\|_{H^{m-3}} + C\lambda^{-2} + C\int_0^t \|E^\lambda N^\lambda\|_{H^{m-3}}ds \\ & \leq C\|E(0)\|_{H^{m-3}} + C\lambda^{-2} + C\lambda^{-1}\|N_0^\lambda\|_{H_*^{m-3}} + C\lambda^{-2}\|\Lambda^{-1}N_1^\lambda\|_{H_*^{m-3}}. \end{aligned}$$

现在, 可选取 T 作为新的初始时刻, 运用刚才的办法进行讨论, 最终可知上述收敛结果在给定的时间区间 $[0, T_0]$ 上都成立. 于是定理 1 证毕. $\square$

4 (3.17) 式的证明

剩下需证明 (3.17) 式. 回顾命题 1 给出的一致界

$$\sup_{t \in [0, T]} (\|E^\lambda\|_{H^m} + \|n^\lambda\|_{H^{m-1}} + \|n_t^\lambda\|_{H^{m-2}\cap\dot{H}^{-1}} + \|B^\lambda\|_{H^m}) \leq C. \quad (4.1)$$

因为 N^λ 是方程 (1.5) 的解, 故有

$$N^\lambda = \cos(\lambda\Lambda t)N_0^\lambda + \frac{\sin(\lambda\Lambda t)}{\lambda\Lambda}N_1^\lambda =: \Phi^\lambda + \Psi^\lambda, \quad (4.2)$$

其中 Φ^λ 满足

$$\lambda^{-2}\Phi_{tt}^\lambda - \Delta\Phi^\lambda = 0, \quad \Phi^\lambda(0) = N_0^\lambda, \quad \Phi_t^\lambda(0) = 0,$$

而 Ψ^λ 满足

$$\lambda^{-2}\Psi_{tt}^\lambda - \Delta\Psi^\lambda = 0, \quad \Psi^\lambda(0) = 0, \quad \Psi_t^\lambda(0) = N_1^\lambda.$$

这里, Φ^λ 和 Ψ^λ 分别表示第一初始层和第二初始层. 后面将会看到, 这两个初始层对收敛速度的贡献是不一样的. 于是, 为了估计 $\int_0^t \|N^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds$, 只需分别估计 $\int_0^t \|\Phi^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds$ 和 $\int_0^t \|\Psi^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds$. 现在先来估计第一项, 即 $\int_0^t \|\Phi^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds$. 受文献 [11] 的启发, 将该项分解成

$$\int_0^t \|\Phi^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds = \int_0^{\frac{4}{\lambda}} \|\Phi^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds + \int_{\frac{4}{\lambda}}^t \|\Phi^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds =: I_1 + I_2. \quad (4.3)$$

对于 I_1 , 注意到

$$\begin{aligned} \|\Phi^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} &= \|[\cos(\lambda\Lambda t)N_0^\lambda]E^\lambda\|_{H^{m-3}} \leq \|\cos(\lambda\Lambda t)N_0^\lambda\|_{H^{m-3}} \|E^\lambda\|_{H^{m-3}} \\ &\leq \|N_0^\lambda\|_{H^{m-3}} \|E^\lambda\|_{H^{m-3}} \leq C\|N_0^\lambda\|_{H^{m-3}}, \end{aligned}$$

故有

$$I_1 = \int_0^{\frac{4}{\lambda}} \|\Phi^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds \leq C\lambda^{-1}\|N_0^\lambda\|_{H^{m-3}}. \quad (4.4)$$

为了估计 I_2 , 引入一个径向对称的非负函数 $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 满足当 $|x| \leq \frac{1}{4}$ 时 $\varphi(x) \equiv 1$, 当 $|x| \geq \frac{1}{2}$ 时 $\varphi(x) \equiv 0$. 对任意的 $a > 0$, 定义 $\varphi_a(x) := \varphi(\frac{x}{a})$. 于是对 $s \geq \frac{4}{\lambda}$, 将 Φ^λ 分解为

$$\Phi^\lambda(s, \cdot) = \cos(\lambda\Lambda s)(\varphi_{\lambda s}N_0^\lambda) + \cos(\lambda\Lambda s)((1 - \varphi_{\lambda s})N_0^\lambda) =: \Phi_{\text{in}}^\lambda + \Phi_{\text{out}}^\lambda, \quad (4.5)$$

故有 $\Phi^\lambda E^\lambda = \Phi_{\text{in}}^\lambda E^\lambda + \Phi_{\text{out}}^\lambda E^\lambda$. 这样就转化为估计 $\Phi_{\text{in}}^\lambda E^\lambda$ 和 $\Phi_{\text{out}}^\lambda E^\lambda$. 为达此目的, 需利用如下引理.

引理 1 设 $\|E_0^\lambda\|_{H_*^{m-3}} = \max_{|\alpha| \leq m-3} \|\langle x \rangle^{2\alpha} E_0^\lambda\|_{L^2} \leq C$, 其中 C 不依赖于参数 λ , $\langle x \rangle := (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$. 则有

$$\max_{|\gamma| \leq m-3} \|\langle x \rangle^2 D^\gamma E^\lambda\|_{L^\infty L^2} \leq C. \quad (4.6)$$

上式中的常数 C 与 λ 无关.

证明 对于任意多重指标 γ ($|\gamma| \leq m-3$), 用微分算子 D^γ 作用于 (1.3) 的第一个方程, 得

$$iD^\gamma E_t^\lambda + \text{grad div} D^\gamma E^\lambda - \alpha \text{rot rot} D^\gamma E^\lambda - D^\gamma(n^\lambda E^\lambda) + iD^\gamma(E^\lambda \times B^\lambda) = 0.$$

该方程两边乘以 $\langle x \rangle^2 D^\gamma \overline{E^\lambda}$ 并积分取其虚部, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\langle x \rangle D^\gamma E^\lambda\|_{L^2}^2 &= -\text{Im} \int_{\mathbb{R}^3} \text{grad div} D^\gamma E^\lambda \cdot \langle x \rangle^2 D^\gamma \overline{E^\lambda} dx \\ &\quad + \alpha \text{Im} \int_{\mathbb{R}^3} \text{rot rot} D^\gamma E^\lambda \cdot \langle x \rangle^2 D^\gamma \overline{E^\lambda} dx \\ &\quad + \text{Im} \int_{\mathbb{R}^3} D^\gamma(n^\lambda E^\lambda) \cdot \langle x \rangle^2 D^\gamma \overline{E^\lambda} dx \\ &\quad - \text{Im} i \int_{\mathbb{R}^3} D^\gamma(E^\lambda \times B^\lambda) \cdot \langle x \rangle^2 D^\gamma \overline{E^\lambda} dx \\ &=: J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \end{aligned} \quad (4.7)$$

对 J_1 这项, 注意到

$$\operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} D^\gamma E^\lambda \cdot \langle x \rangle^2 \operatorname{div} D^\gamma \overline{E^\lambda} dx = \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^3} \langle x \rangle^2 |\operatorname{div} D^\gamma E^\lambda|^2 dx = 0,$$

并利用分部积分, 估计 (4.1) 及初等不等式 $|\nabla \langle x \rangle^2| \leq 2\langle x \rangle$, 则有

$$\begin{aligned} J_1 &= \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} D^\gamma E^\lambda (\nabla \langle x \rangle^2) D^\gamma \overline{E^\lambda} dx \leq 2 \|\operatorname{div} D^\gamma E^\lambda\|_{L^2} \|\langle x \rangle D^\gamma \overline{E^\lambda}\|_{L^2} \\ &\leq 2 \|E^\lambda\|_{H^{1+|\gamma|}} \|\langle x \rangle D^\gamma E^\lambda\|_{L^2} \leq 2 \|E^\lambda\|_{H^{m-2}} \|\langle x \rangle D^\gamma E^\lambda\|_{L^2} \\ &\leq C \|\langle x \rangle D^\gamma E^\lambda\|_{L^2} \leq C (\|\langle x \rangle D^\gamma E^\lambda\|_{L^2}^2 + 1). \end{aligned}$$

同理可得关于 J_2 的估计 $J_2 \leq C \|\langle x \rangle D^\gamma E^\lambda\|_{L^2}^2 + C$. 由于

$$D^\gamma (n^\lambda E^\lambda) = \sum_{\beta \leq \gamma} C_{\beta, \gamma} D^\beta n^\lambda D^{\gamma-\beta} E^\lambda,$$

故 J_3 可按如下进行估计:

$$\begin{aligned} J_3 &\leq C \|\langle x \rangle \sum_{\beta \leq \gamma} D^\beta n^\lambda D^{\gamma-\beta} E^\lambda\|_{L^2} \|\langle x \rangle D^\gamma \overline{E^\lambda}\|_{L^2} \\ &\leq C \|n^\lambda\|_{W^{m-3, \infty}} \left(\sum_{|\beta| \leq m-3} \|\langle x \rangle D^\beta E^\lambda\|_{L^2} \right) \|\langle x \rangle D^\gamma \overline{E^\lambda}\|_{L^2} \\ &\leq C \left(\sum_{|\beta| \leq m-3} \|\langle x \rangle D^\beta E^\lambda\|_{L^2} \right) \|\langle x \rangle D^\gamma E^\lambda\|_{L^2}. \end{aligned}$$

用类似的办法可得

$$J_4 \leq C \left(\sum_{|\beta| \leq m-3} \|\langle x \rangle D^\beta E^\lambda\|_{L^2} \right) \|\langle x \rangle D^\gamma E^\lambda\|_{L^2}.$$

令 $f(t) := \max_{|\beta| \leq m-3} \|\langle x \rangle D^\beta E^\lambda\|_{L^2}^2$, 那么根据 (4.7) 式以及上述关于 J_1, J_2, J_3 和 J_4 的估计, 可知 $f'(t) \leq C f(t) + C$. 于是, 利用 Gronwall 不等式即可得到引理所需的估计. $\square$

现在来估计 $\Phi_{\text{out}}^\lambda E^\lambda$ 和 $\Phi_{\text{in}}^\lambda E^\lambda$.

引理 2 设 $\lambda > 0, t \in [0, T]$, 则有

$$\int_{\frac{\lambda}{4}}^t \|\Phi_{\text{out}}^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds \leq C \|N_0^\lambda\|_{H_*^{m-3}} \lambda^{-1}, \quad (4.8)$$

其中 C 依赖于 T , 但不依赖于 λ .

证明 因为 $\operatorname{supp}((1 - \varphi_{\lambda s})N_0^\lambda) \subset \{x; |x| \geq \frac{\lambda s}{4}\}$, 所以有

$$\begin{aligned} \|\Phi_{\text{out}}^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} &\leq \|\cos(\lambda \Lambda s)((1 - \varphi_{\lambda s})N_0^\lambda)\|_{H^{m-3}} \|E^\lambda\|_{H^{m-3}} \\ &\leq C \|(1 - \varphi_{\lambda s})N_0^\lambda\|_{H^{m-3}} \\ &\leq C \sum_{|\gamma| \leq m-3} \|D^\gamma [(1 - \varphi_{\lambda s})N_0^\lambda]\|_{L^2(|x| \geq \frac{\lambda s}{4})} \\ &\leq C \sum_{|\gamma| \leq m-3} \left(\sum_{\beta \leq \gamma} \|D^{\gamma-\beta} (1 - \varphi_{\lambda s})\|_{L^\infty(|x| \geq \frac{\lambda s}{4})} \|D^\beta N_0^\lambda\|_{L^2(|x| \geq \frac{\lambda s}{4})} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C \sum_{|\beta| \leq m-3} \|\langle x \rangle^{-2} \langle x \rangle^2 D^\beta N_0^\lambda\|_{L^2(|x| \geq \frac{\lambda s}{4})} \\ &\leq C \|N_0^\lambda\|_{H_*^{m-3}} \langle \lambda s \rangle^{-2}. \end{aligned}$$

上面倒数第二步需利用如下事实 $\|D^\gamma(1 - \varphi_{\lambda s})\|_{L^\infty} \leq C(\lambda s)^{-|\gamma|} \leq C$, $\lambda s \geq 4$. 因此关于时间积分可得

$$\begin{aligned} \int_{\frac{4}{\lambda}}^t \|\Phi_{\text{out}}^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds &\leq C \|N_0^\lambda\|_{H_*^{m-3}} \int_{\frac{4}{\lambda}}^t \langle \lambda s \rangle^{-2} ds \leq C \|N_0^\lambda\|_{H_*^{m-3}} \int_4^{\lambda t} \frac{\lambda^{-1}}{1+s^2} ds \\ &\leq C \|N_0^\lambda\|_{H_*^{m-3}} \lambda^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} ds \leq C \|N_0^\lambda\|_{H_*^{m-3}} \lambda^{-1}. \end{aligned}$$

引理 2 证毕. $\square$

引理 3 设 $\lambda > 0$, $t \in [0, T]$, 则有

$$\int_{\frac{4}{\lambda}}^t \|\Phi_{\text{in}}^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds \leq C \|N_0^\lambda\|_{H^{m-3}} \lambda^{-1}, \quad (4.9)$$

其中 C 与 λ 无关.

证明 由于 $\Phi_{\text{in}}^\lambda = \cos(\lambda \Lambda s)(\varphi_{\lambda s} N_0^\lambda)$ 且 $\varphi_{\lambda s} N_0^\lambda$ 的支集落于集合 $\{x; |x| \leq \frac{\lambda s}{2}\}$ 中, 根据 Huygens 原理知 $\text{supp } \Phi_{\text{in}}^\lambda(s, x) \subset \{x; \frac{\lambda s}{2} \leq |x| \leq \frac{3\lambda s}{2}\}$. 于是有

$$\begin{aligned} \|\Phi_{\text{in}}^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} &= \|\cos(\lambda \Lambda s)(\varphi_{\lambda s} N_0^\lambda) E^\lambda\|_{H^{m-3}(\frac{\lambda s}{2} \leq |x| \leq \frac{3\lambda s}{2})} \\ &\leq C \|N_0^\lambda\|_{H^{m-3}} \|E^\lambda\|_{H^{m-3}(\frac{\lambda s}{2} \leq |x| \leq \frac{3\lambda s}{2})} \\ &\leq C \|N_0^\lambda\|_{H^{m-3}} \sum_{|\beta| \leq m-3} \|\langle x \rangle^{-2} \langle x \rangle^2 D^\beta E^\lambda\|_{L^2(|x| \geq \frac{\lambda s}{2})} \\ &\leq C \|N_0^\lambda\|_{H^{m-3}} \langle \lambda s \rangle^{-2}, \end{aligned}$$

其中最后一步利用了引理 1, 从而就有

$$\int_{\frac{4}{\lambda}}^t \|\Phi_{\text{in}}^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds \leq C \|N_0^\lambda\|_{H^{m-3}} \int_{\frac{4}{\lambda}}^t \langle \lambda s \rangle^{-2} ds \leq C \|N_0^\lambda\|_{H^{m-3}} \lambda^{-1}.$$

因此, 引理 3 证毕. $\square$

联合 (4.5)、(4.8) 和 (4.9) 式, 可以看到

$$I_2 = \int_{\frac{4}{\lambda}}^t \|\Phi^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds \leq \int_{\frac{4}{\lambda}}^t \|\Phi_{\text{in}}^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds + \int_{\frac{4}{\lambda}}^t \|\Phi_{\text{out}}^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds \leq C \lambda^{-1} \|N_0^\lambda\|_{H_*^{m-3}},$$

再结合 (4.3) 和 (4.4) 式, 即得

$$\int_0^t \|\Phi^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds = I_1 + I_2 \leq C \lambda^{-1} \|N_0^\lambda\|_{H_*^{m-3}}. \quad (4.10)$$

至此, 还需估计 $\int_0^t \|\Psi^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds$, 其中 $\Psi^\lambda = \frac{\sin(\lambda \Lambda t)}{\lambda \Lambda} N_1^\lambda$. 事实上, 这项估计所用的方法与上述完全相同, 而且由于 Ψ^λ 带有因子 λ^{-1} , 故不难得到

$$\int_0^t \|\Psi^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds = \int_0^t \|\Psi_{\text{in}}^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds + \int_0^t \|\Psi_{\text{out}}^\lambda E^\lambda\|_{H^{m-3}} ds \leq C \lambda^{-2} \|\Lambda^{-1} N_1^\lambda\|_{H_*^{m-3}}^2. \quad (4.11)$$

因为 (4.11) 式的证明与 (4.10) 式是类似的, 故此处省略进一步的证明细节.

最后, 联合 (4.2)、(4.10) 和 (4.11) 式, 可立即推出所需的估计 (3.17).

参考文献

- 1 Kono M, Skoric M M, Haar D T. Spontaneous excitation of magnetic fields and collapse dynamics in a Langmuir plasma. *J Plasma Phys*, 1981, 26: 123–146
- 2 Zakharov V E. Collapse of Langmuir waves. *Sov Phys JETP*, 1972, 908–914
- 3 Added H, Added S. Existence globale de solutions fortes pour les équations de la turbulence de Langmuir en dimension 2. *C R Acad Sci Paris*, 1984, 29: 551–554
- 4 Guo B, Shen L. The existence and uniqueness of the classical solution on the periodic initial value problem for Zakharov equation (in Chinese). *Acta Math Appl Sin*, 1982, 3: 310–324
- 5 Ozawa T, Tsutsumi Y. Existence and smooth effect of solutions for the Zakharov equations. *Pub RIMS Kyoto Univ*, 1992, 28: 329–361
- 6 Sulem C, Sulem P L. Quelques résultats de régularité pour les équations de la turbulence de Langmuir. *C R Acad Sci Paris*, 1979, 289: 173–176
- 7 Bejenaru I, Herr S, Holmer J, et al. On the 2d Zakharov system with L^2 Schrödinger data. *Nonlinearity*, 2009, 22: 1063–1089
- 8 Colliander J, Holmer J, Tzirakis N. Low regularity global well-posedness for the Zakharov and Klein-Gordon-Schrödinger systems. *Trans Amer Math Soc*, 2008, 360: 4619–4638
- 9 Ginibre J, Tsutsumi Y, Velo G. On the Cauchy problem for the Zakharov system. *J Funct Anal*, 1997, 151: 384–436
- 10 Added H, Added S. Equations of Langmuir turbulence and nonlinear Schrödinger equation: smoothness and approximation. *J Funct Anal*, 1988, 79: 183–210
- 11 Ozawa T, Tsutsumi Y. The nonlinear Schrödinger limit and the initial layer of the Zakharov equations. *Differ Integral Equ*, 1991, 5: 721–745
- 12 Schochet S H, Weinstein M I. The nonlinear Schrödinger limit of the Zakharov equations governing Langmuir turbulence. *Commun Math Phys*, 1986, 106: 569–580
- 13 Laurey C. The Cauchy problem for a generalized Zakharov system. *Differ Integral Equ*, 1995, 8: 105–130
- 14 Guo B, Zhang J. Well-posedness of the Cauchy problem for the magnetic Zakharov type system. *Nonlinearity*, 2011, 24: 2191–2210
- 15 Han L, Zhang J, Gan Z, et al. On the limit behavior of the magnetic Zakharov system. *Sci China Math*, 2012, 55: 509–540
- 16 Zhang J, Guo Y. On the convergence of the solution for a generalized Zakharov system. *J Math Phys*, 2011, 52: 1–12
- 17 Zhang J, Guo C, Guo B. On the Cauchy problem for the magnetic Zakharov system. *Monatsh Math*, 2013, 170: 89–111
- 18 Zhang J, Han L, Guo B. On the nonlinear Schrödinger limit of the magnetic Zakharov system. *Nonlinear Anal. TMA*, 2012, 75: 4090–4103
- 19 Guo B, Zhang J, Pu X. On the existence and uniqueness of smooth solution for a generalized Zakharov equation. *J Math Anal Appl*, 2010, 365: 238–253

Improved convergence rate of the solution for a generalized Zakharov system

ZHANG JingJun & GUO BoLing

Abstract In this paper, we study the convergence rate of the nonlinear Schrödinger limit for a generalized Zakharov system including self-generated magnetic field. By delicate estimate of the nonlinear term, detailed relation between the convergence rate and the first, second initial layer is obtained. This work improves the result obtained by Zhang and Guo in 2011.

Keywords generalized Zakharov system, self-generated magnetic field, convergence rate

MSC(2010) 76B03, 35Q55

doi: 10.1360/012014-68