多分辨率四边形板壳单元有限元法

夏逸鸣

南京航空航天大学航空宇航学院, 南京 210016

*联系人, E-mail: xym4603@sina.com

收稿日期: 2016-11-17; 接受日期: 2017-01-21; 网络出版日期: 2017-06-30

摘要 首先基于传统壳单元分节点形函数, 通过对形函数关于坐标零点的延拓, 形成基本全节点形函数; 然后将此全节点形函数伸缩后在单元区域上进行平移, 生成基函数系, 即多分辨率的简单而明晰的数学基, 同时, 该基张成了位移子空间序列, 由此建立了带有分辨率常数的理性多分辨率的概念; 并在此基础上, 进一步构建了多分辨率四边形板壳单元及其有限元法, 最后, 通过算例验证, 可以得到如下结论, 传统板壳单元为单分辨率单元, 为本文单元的一个特例; 由于域内为全节点, 所以本文建立的结构计算模型是整体化模型而不是传统的网格碎片化模型; 本文的有限元法为理性多分辨率方法, 其计算效率高于其他非理性多分辨率方法且可以完全统一其他的非理性多分辨率方法; 结构数值分析清晰度的高低是由分辨率的大小决定的而非网格疏密; 连续的全节点形函数为传统的节点总刚可由共同节点的单元刚度通过人工叠加组合方式而得到的这种处理方法提供了理论依据。

关键词 板壳单元, 分节点, 全节点, 位移子空间序列, 理性多分辨率, 分辨率

PACS: 02.60.Cb, 02.60.Jh, 02.60.Lj, 02.70.Dh

有限元方法是一种强大的数值计算工具, 其在偏微分方程求解、工程结构计算及热动力学分析等各个领域都得到了广泛的应用。但是, 当遇到材料非线性、局部损伤、裂纹、突变或接触等大梯度问题时, 有限元方法就会产生诸如计算分析结果不准确、需要重新划分有限元网格, 甚至出现病态单元等问题。

为有效解决工程计算中存在的问题, 近30多年来, 国内外学者相继提出了各种有限元方法, 如多重网格法^[1,2]、自适应方法^[3,4]、多尺度有限体积法^[5,6]、多尺度有限元法^[7,8]、小波有限元法^[9,10]及无网格法^[11,12]等, 其中, 自适应有限元方法应用研究较为广泛, 小波有

限元法、无网格法也逐渐成为近年来的研究热点。

自适应方法大致分为3类, 即 h 类型、 p 类型和 r 类型。 h 类型主要通过网格的局部加密或粗化来实现, 使用后验误差估计作为操作的判断标准; p 类型在误差较大时通过增加插值函数的次数来提高计算精度; r 类型在保持原有网格拓扑结构不变的条件下, 移动网格节点, 通过极小化能量泛函, 将网格移动到误差较大区域。针对具体问题, 自适应方法可以是各种类型的结合。但是, 对于工程中的具体问题, 即使是经验丰富的技术人员要选择合适的网格方案也很困难, 往往需要多次反复才能达到指定的求解精度。

引用格式: 夏逸鸣. 多分辨率四边形板壳单元有限元法. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2017, 47: 084601

Xia Y M. A multiresolution finite element method based on a new quadrilateral shell element (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2017, 47: 084601, doi: 10.1360/SSPMA2016-00482

小波有限元法是采用各种不同的小波尺度函数或小波函数作为插值形函数, 并根据小波多分辨理论^[9,10], 通过位移尺度空间随尺度变化而伸缩, 来调整单元网格划分, 从而达到自适应计算的目的, 但是, 根据小波多分辨理论, 其尺度空间的伸缩是基于小波空间(误差空间)与前一尺度空间的直和, 并由此形成相互包含、嵌套的多尺度空间序列, 而此小波空间的构建须满足一定的假设条件, 即小波空间与同阶的尺度空间正交, 由此构造出的小波空间, 因在绝大多数情况下与实际结构计算分析的真实误差空间并不相一致, 而导致产生与实际不符的尺度空间序列; 另外, 现有的小波有限元法其节点参数的物理意义不明确^[10], 需要借助基底函数系数与待求物理参数之间的转换矩阵关系, 来确保单元公共边界的连续性, 而转换矩阵的求解涉及矩阵的求逆, 对于较大尺度问题容易出现数值不稳定现象.

无网格法通过节点信息建立插值基函数, 插值函数不依赖于节点之间的有序拓扑连接, 克服了传统方法对网格的依赖性, 便于自适应计算, 在涉及网格畸变、大变形及断裂等问题中显示出明显的优势, 但是, 由于该法用于建立位移场的考虑周围区域节点影响的插值基函数是由基函数和权函数所构成, 其系数多而复杂, 因而, 比较传统有限元, 该法计算效率较低.

针对有限元自适应网格划分、小波有限元法多分辨分析及无网格法中所存在的问题, 本研究提出了多分辨率有限元方法, 该法通过延拓节点形函数, 直接连接临近相关节点, 而无须像无网格法那样构造考虑影响域大小的权函数, 并在此基础上, 采用形函数在单元区域上进行收缩和平移的方法, 构造了一个基函数系, 也就是一个简洁的数学基, 从而构建了一个位移子空间序列, 并由此形成了一个崭新的多分辨分析, 它可以通过调节单元分辨率的大小来自由调整节点的疏密分布, 从而便于实现自适应网格划分, 同时又使其具有理性成分, 并且, 可以通过基本节点形函数, 将调整后的任意多个节点自动地合并为原单元, 因而, 与传统有限元比较, 其具有较高的计算效率. 本文就有限元中的基本单元——四边形薄板壳单元进行多分辨分析计算公式的推导, 并结合算例说明, 该法可以弥补自适应、小波有限元和无网格法等方法的不, 为解决工程中板壳结构的大梯度等问题提供了强有力的工具.

1 基本全节点形函数

如图1所示, 在直角坐标系下, 有一任意四边形薄板壳单元. 为了计算简便, 需将此任意四边形转换成自然坐标系下的正方形母单元如图2, 即采用等参元方法, 等参元方法中两种坐标系的转换关系可参考文献[13], 则四边形板壳单元内任意一点沿 x, y, z 方向的位移 u^e, v^e, w^e 可写为

$$\begin{cases} u^e = \sum_{i=1}^4 N_i^m u_i, \\ v^e = \sum_{i=1}^4 N_i^m v_i, \\ w^e = \sum_{i=1}^4 N_i^b w_i + \sum_{i=1}^4 N_{xi}^b \theta_{xi} + \sum_{i=1}^4 N_{yi}^b \theta_{yi}, \end{cases} \quad (1)$$

式中, u_i, v_i, w_i 分别为单元节点 i 处沿 x, y, z 方向的位移; θ_{xi}, θ_{yi} 分别为单元节点 i 处绕 x, y 轴的转角; N_i^m 为单元节点 i 处的平面薄膜内位移形函数, 其表达式可参见文献[13]; $N_i^b, N_{xi}^b, N_{yi}^b$ 为单元节点 i 处的挠曲形函数, 其表

图1 四边形薄板壳单元

Figure 1 A quadrilateral membrane and thin plate bending element.

图2 单元分节点形函数域

Figure 2 The shape function domain for a split node.

达式参见文献[14].

由图2可以看出, 传统板壳单元在自然坐标系下的形函数定义域(图中阴影部分)只包含了完整节点中的一部分(图中涂黑部分), 所以, 构建传统有限单元的形函数的过程其本质就是将完整节点进行分裂的过程, 因此, 传统有限元离散了整体结构. 为了建立整体结构的计算模型, 必须构建完整节点-全节点的形函数, 其定义域应闭包整个节点, 即需要对分裂节点-分节点形函数的定义域进行扩展延拓, 因此, 需要将如图2中的单元分节点(1)的形函数定义域由 $[0, 1] \times [0, 1]$ 扩展延拓到如图3所示的 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ 支撑域, 其具体的延拓方法是, 在自然坐标系下, 将原单元分别沿水平、垂直和斜向移动到坐标系中其他的3个象限中, 同时, 该单元的4个分节点也跟随移动, 由此形成如图3所示的关于坐标原点(0, 0)的基本全节点(此时定义域闭包整个节点, 如图3涂黑原点)形函数, 可定义为

$$\varphi(\xi, \eta) := \begin{cases} N_1^m(\xi, \eta), & \xi \in [0, 1], \eta \in [0, 1], \\ N_2^m(1 + \xi, \eta), & \xi \in [-1, 0], \eta \in [0, 1], \\ N_3^m(1 + \xi, 1 + \eta), & \xi \in [-1, 0], \eta \in [-1, 0], \\ N_4^m(\xi, 1 + \eta), & \xi \in [0, 1], \eta \in [-1, 0], \\ 0, & \xi \notin [-1, 1], \eta \notin [-1, 1], \end{cases} \quad (2)$$

$$\phi_1(\xi, \eta) := \begin{cases} N_1^b(\xi, \eta), & \xi \in [0, 1], \eta \in [0, 1], \\ N_2^b(1 + \xi, \eta), & \xi \in [-1, 0], \eta \in [0, 1], \\ N_3^b(1 + \xi, 1 + \eta), & \xi \in [-1, 0], \eta \in [-1, 0], \\ N_4^b(\xi, 1 + \eta), & \xi \in [0, 1], \eta \in [-1, 0], \\ 0, & \xi \notin [-1, 1], \eta \notin [-1, 1], \end{cases} \quad (3)$$

图3 坐标原点(0, 0)处全节点延拓形函数域

Figure 3 The extended shape function domain for the full node in the classical shell element at the zero coordinate point of (0, 0).

$$\phi_2(\xi, \eta) := \begin{cases} N_{x1}^b(\xi, \eta), & \xi \in [0, 1], \eta \in [0, 1], \\ N_{x2}^b(1 + \xi, \eta), & \xi \in [-1, 0], \eta \in [0, 1], \\ N_{x3}^b(1 + \xi, 1 + \eta), & \xi \in [-1, 0], \eta \in [-1, 0], \\ N_{x4}^b(\xi, 1 + \eta), & \xi \in [0, 1], \eta \in [-1, 0], \\ 0, & \xi \notin [-1, 1], \eta \notin [-1, 1], \end{cases} \quad (4)$$

$$\phi_3(\xi, \eta) := \begin{cases} N_{y1}^b(\xi, \eta), & \xi \in [0, 1], \eta \in [0, 1], \\ N_{y2}^b(1 + \xi, \eta), & \xi \in [-1, 0], \eta \in [0, 1], \\ N_{y3}^b(1 + \xi, 1 + \eta), & \xi \in [-1, 0], \eta \in [-1, 0], \\ N_{y4}^b(\xi, 1 + \eta), & \xi \in [0, 1], \eta \in [-1, 0], \\ 0, & \xi \notin [-1, 1], \eta \notin [-1, 1], \end{cases} \quad (5)$$

经过延拓分节点形函数定义域后的基本全节点形函数如图4.

由图4可以看到, 所有基本全节点形函数都是连续的且具有如下的Kronecker delta特性:

$$\begin{cases} \varphi(0, 0) = 1, \varphi(8\text{points}) = 0, \\ \phi_1(0, 0) = 1, \phi_1(8\text{points}) = 0, \\ \frac{\partial \phi_1(0, 0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial \phi_1(0, 0)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \phi_1(8\text{points})}{\partial x} = 0, \frac{\partial \phi_1(8\text{points})}{\partial y} = 0, \\ \phi_2(0, 0) = 0, \phi_2(8\text{points}) = 0, \\ \frac{\partial \phi_2(0, 0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial \phi_2(0, 0)}{\partial y} = 1, \\ \frac{\partial \phi_2(8\text{points})}{\partial x} = 0, \frac{\partial \phi_2(8\text{points})}{\partial y} = 0, \\ \phi_3(0, 0) = 0, \phi_3(8\text{points}) = 0, \\ -\frac{\partial \phi_3(0, 0)}{\partial x} = 1, \frac{\partial \phi_3(0, 0)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \phi_3(8\text{points})}{\partial x} = 0, \frac{\partial \phi_3(8\text{points})}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

2 位移子空间序列

若要实现多分辨率的计算分析, 就必须构建单元的多分辨率位移子空间序列. 通过函数的伸缩、平移可以组建子空间序列的基底函数系, 由此, 将基本全节点形函数在区域内进行伸缩、平移, 由此形成单元

图4 (网络版彩图)在支撑域 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ 上的基本全节点形函数: $\varphi(\xi, \eta)$ (a); $\phi_1(\xi, \eta)$ (b); $\phi_2(\xi, \eta)$ (c); $\phi_3(\xi, \eta)$ (d)
Figure 4 (Color online) The basic full node shape functions $\varphi(\xi, \eta)$ (a), $\phi_1(\xi, \eta)$ (b), $\phi_2(\xi, \eta)$ (c), $\phi_3(\xi, \eta)$ (d) on the domain of $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

的多分辨率位移子空间序列的基函数向量 Ψ_{mn}^e , 对于单元区域为 $[0, 1] \times [0, 1]$ 的薄板壳, 当单元分辨率 RL (Resolution Level)为 $(m+1) \times (n+1)$ 时, Ψ_{mn}^e 可以取为

$$\Psi_{mn}^e = [\Phi_{mn,00}^e \cdots \Phi_{mn,rs}^e \cdots \Phi_{mn,mn}^e], \quad (7)$$

式中,

$$\Phi_{mn,rs}^e = \begin{bmatrix} \varphi_{mn,rs} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{mn,rs} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{1mn,rs} & \phi_{2mn,rs}/n & \phi_{3mn,rs}/m \end{bmatrix},$$

其中,

$$\begin{aligned} \varphi_{mn,rs} &= \varphi(m\xi - r, n\eta - s), \phi_{1mn,rs} = \phi_1(m\xi - r, n\eta - s), \\ \phi_{2mn,rs} &= \phi_2(m\xi - r, n\eta - s), \phi_{3mn,rs} = \phi_3(m\xi - r, n\eta - s), \\ m, n &\text{ 为正整数, 分别表示两个方向上的伸缩倍数;} \\ r &= 0, 1, 2, 3, \dots, m, s = 0, 1, 2, 3, \dots, n \text{ 表示节点位置平} \\ &\text{移的参数; 这里, } (m\xi - r) \in [-1, 1] \text{ } (n\eta - s) \in [-1, 1], \\ &\xi \in [0, 1], \eta \in [0, 1]. \end{aligned}$$

首先, 将基本全节点形函数在区域 $[-1/m, 1/m] \times [-1/n, 1/n]$ 上进行伸缩, 然后把经过伸缩的形函数平移至单元区域上的所有节点 $(r/m, s/n)$ 处, 由此, 即可构造出单元区域内各个节点的形函数. 当单元分辨率为 $2 \times 2, 3 \times 3$ 时, 基本全节点形函数在区域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上平移所生成的各个全节点形函数(边界上为半分节点; 角点为四分节点), 分别如图5(a)和(b)所示.

可以看出, 由于基函数向量中的元素为 $\varphi_{mn,rs}, \phi_{1mn,rs}, \phi_{2mn,rs}, \phi_{3mn,rs}$, 其不同的分辨率和节点平移参数形成的不同函数组是线性无关的, 所以其构成的位移空间序列是一个诸多子空间所组成, 即 $[V_{11} \dots V_{ij} \dots V_{mn}]$, 此位移子空间序列构成一个多分辨率分析(Multi-Resolution Analysis, MRA), 即

$$\begin{aligned} W_{mn} &= [V_{11} \dots V_{ij} \dots V_{mn}], \\ V_{ij} &:= \text{span}\{\Psi_{ij} : i, j \in \mathbf{Z}\}, \end{aligned} \quad (8)$$

当 $I=2i, J=2j$ 时, 有 $V_{ij} \subset V_{IJ}$, 其中, $\mathbf{Z}$ 为正整数集; V_{ij} 为分

图5 (网络版彩图)单元区域 $[0, 1]^2$ 上经收缩和平移后的基本全节点形函数 $\varphi(\xi, \eta)$, $\phi_1(\xi, \eta)$. (a) $\varphi(\xi, \eta)$ ($RL=2 \times 2$); (b) $\phi_1(\xi, \eta)$ ($RL=2 \times 2$); (c) $\varphi(\xi, \eta)$ ($RL=3 \times 3$); (d) $\phi_1(\xi, \eta)$ ($RL=3 \times 3$)

Figure 5 (Color online) The scaled and shifted version of the basic full node shape functions $\varphi(\xi, \eta)$, $\phi_1(\xi, \eta)$ on the domain. (a) $\varphi(\xi, \eta)$ ($RL=2 \times 2$); (b) $\phi_1(\xi, \eta)$ ($RL=2 \times 2$); (c) $\varphi(\xi, \eta)$ ($RL=3 \times 3$); (d) $\phi_1(\xi, \eta)$ ($RL=3 \times 3$).

分辨率 $RL=(i+1) \times (j+1)$ 的位移子空间.

因此, 在分辨率 $RL=(m+1) \times (n+1)$ 的位移子空间中, 板壳单元内任意一点的位移可写为

$$\begin{Bmatrix} u_{mn}^e \\ v_{mn}^e \\ w_{mn}^e \end{Bmatrix} = \Psi_{mn}^e \mathbf{a}_{mn}^e, \quad (9)$$

式中

$$\mathbf{a}_{mn}^e = \begin{bmatrix} u_{00}, v_{00}, w_{00}, \theta_{x00}, \theta_{y00} \dots [u_{rs}, v_{rs}, w_{rs}, \theta_{xrs}, \theta_{yrs}] \dots [u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}, \theta_{xmn}, \theta_{ymn}] \end{bmatrix}^T,$$

$u_{rs}, v_{rs}, w_{rs}, \theta_{xrs}, \theta_{yrs}$ 分别为单元节点 $(r/m, s/n)$ 处的沿 x, y, z 方向的位移和绕 x, y 轴的转角.

显然, 此单元为无网格单元, 其单元内节点数量和位置可由分辨率来自由调节; 一旦确定了单元分辨率也就确定了节点总数及其具体位置. 当式(9)中的分

分辨率 $RL=2 \times 2$ 时, 该式就退化为传统四边形板壳单元的位移场(1), 因此, 传统四边形板壳单元, 也就是单分辨率单元, 为本文多分辨率四边形板壳单元的一个特例.

3 多分辨率四边形板壳单元

在分辨率 $RL=(m+1) \times (n+1)$ 的位移子空间中, 四边形板壳单元的总势能可写为

$$\begin{aligned} \Pi(V_{mn}) = & \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [\varepsilon]_{mn}^T [D_m] [\varepsilon]_{mn} dx dy \\ & - \int_0^a \int_0^b (p_x u_{mn}^e + p_y v_{mn}^e) dx dy \\ & - \sum_i (P_{xi} u_{mn}^e + P_{yi} v_{mn}^e) \\ & + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [\kappa]_{mn}^T [D_b] [\kappa]_{mn} dx dy \\ & - \int_0^a \int_0^b q w_{mn}^e dx dy - \sum_i Q_i w_{mn}^e, \end{aligned} \quad (10)$$

式中,

$$[\varepsilon]_{mn} = \begin{bmatrix} \partial u_{mn}^e / \partial x \\ \partial v_{mn}^e / \partial y \\ \partial u_{mn}^e / \partial y + \partial v_{mn}^e / \partial x \end{bmatrix},$$

$$[\kappa]_{mn} = - \begin{bmatrix} \partial^2 w_{mn}^e / \partial x^2 \\ \partial^2 w_{mn}^e / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 w_{mn}^e / \partial x \partial y \end{bmatrix},$$

$$[D_m] = C_m \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix},$$

$$[D_b] = D_0 \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix},$$

$$C_m = \frac{Eh}{1-\mu^2}, D_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)},$$

E 为材料弹性模量; h 是单元厚度, μ 为泊松比; p_x, p_y 分别为沿 x, y 轴的分布力; q 为横向分布荷载; P_x, P_y 分别为沿 x, y 轴的集中力; Q 为横向集中荷载; 还有

$$\begin{cases} [\varepsilon]_{mn} = [B_{00}^p, \dots, B_{rs}^p, \dots, B_{mn}^p] \mathbf{a}_p^e, \\ [\kappa]_{mn} = [B_{00}^w, \dots, B_{rs}^w, \dots, B_{mn}^w] \mathbf{a}_w^e, \end{cases} \quad (11)$$

其中,

$$B_{rs}^p = \begin{bmatrix} \partial \varphi_{rs} / \partial x & 0 & \partial \varphi_{rs} / \partial y \\ 0 & \partial \varphi_{rs} / \partial y & \partial \varphi_{rs} / \partial x \end{bmatrix}^T, \begin{Bmatrix} \partial \varphi_{rs} / \partial x \\ \partial \varphi_{rs} / \partial y \end{Bmatrix} = \mathbf{J}_1^{-1} \begin{Bmatrix} \partial \varphi_{rs} / \partial \xi \\ \partial \varphi_{rs} / \partial \eta \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_p^e = [u_{11} \quad v_{11} \dots u_{rs} \quad v_{rs} \dots u_{mn} \quad v_{mn}]^T,$$

$$B_{rs}^w = - \begin{bmatrix} \partial^2 \phi_{1rs,mn} / \partial x^2 & \partial^2 \phi_{2rs,mn} / \partial y^2 & \partial^2 \phi_{3rs,mn} / \partial x \partial y \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{Bmatrix} \partial^2 \phi_{1rs,mn} / \partial x^2 \\ \partial^2 \phi_{2rs,mn} / \partial y^2 \\ \partial^2 \phi_{3rs,mn} / \partial x \partial y \end{Bmatrix} = \mathbf{J}_2^{-1} \begin{Bmatrix} \partial^2 \phi_{1rs,mn} / \partial \xi^2 \\ \partial^2 \phi_{2rs,mn} / \partial \eta^2 \\ \partial^2 \phi_{3rs,mn} / \partial \xi \partial \eta - \alpha' \partial \phi_{3rs,mn} / \partial \xi + \beta' \partial \phi_{3rs,mn} / \partial \eta \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_w^e = [w_{11} \quad \theta_{11x} \quad \theta_{11y} \dots w_{rs} \quad \theta_{rsx} \quad \theta_{rsy} \dots w_{mn} \quad \theta_{mnx} \quad \theta_{mny}]^T,$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} (\partial x / \partial \xi)^2 & (\partial y / \partial \xi)^2 & 2(\partial x / \partial \xi)(\partial y / \partial \xi) \\ (\partial x / \partial \eta)^2 & (\partial y / \partial \eta)^2 & 2(\partial x / \partial \eta)(\partial y / \partial \eta) \\ (\partial x / \partial \xi)(\partial x / \partial \eta) & (\partial y / \partial \xi)(\partial y / \partial \eta) & (\partial x / \partial \xi)(\partial y / \partial \eta) + (\partial y / \partial \xi)(\partial x / \partial \eta) \end{bmatrix}$$

为二阶Jacobi矩阵, 其中,

$$\alpha' = (\alpha \cdot \partial y / \partial \eta - \beta \cdot \partial x / \partial \eta) / |\mathbf{J}_1|,$$

$$\beta' = (\alpha \cdot \partial y / \partial \xi - \beta \cdot \partial x / \partial \xi) / |\mathbf{J}_1|,$$

$$\alpha = x_1 - x_2 + x_3 - x_4,$$

$$\beta = y_1 - y_2 + y_3 - y_4.$$

将式(11)代入式(10), 经整理可得到

$$\Pi_p(V_{mn}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}_{mn}^{eT} \mathbf{K}_{mn}^e \mathbf{a}_{mn}^e - \mathbf{a}_{mn}^{eT} \mathbf{f}_{mn}^e - \mathbf{a}_{mn}^{eT} \mathbf{F}_{mn}^e, \quad (12)$$

式中, $\mathbf{K}_{mn}^e$ 为单元刚度矩阵; $\mathbf{f}_{mn}^e$ 为单元节点分布等效荷载向量; $\mathbf{F}_{mn}^e$ 为单元节点集中等效荷载向量。

根据最小势能原理, 即 $\delta \Pi_p(V_{mn}) = 0$, 可得板壳单元的平衡方程

$$\mathbf{K}_{mn}^e \mathbf{a}_{mn}^e = \mathbf{f}_{mn}^e + \mathbf{F}_{mn}^e, \quad (13)$$

式中,

$$\mathbf{K}_{mn}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{00}^{00} \cdots \mathbf{k}_{rs}^{00} \cdots \mathbf{k}_{mn}^{00} \\ \vdots \vdots \vdots \\ \mathbf{k}_{00}^{rs} \cdots \mathbf{k}_{rs}^{rs} \cdots \mathbf{k}_{ij}^{rs} \\ \vdots \vdots \vdots \\ \mathbf{k}_{00}^{mn} \cdots \mathbf{k}_{rs}^{mn} \cdots \mathbf{k}_{mn}^{mn} \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{k}_{rs}^{rs} = \sum_{\substack{|c-r| \leq 1 \\ |d-s| \leq 1}} \mathbf{k}_{cd,rs}, \\ \mathbf{k}_{rs}^{rs} = \mathbf{k}_{cd,rs} = 0, \text{ 当 } |c-r| > 1, |d-s| > 1 \text{ 时,} \end{cases}$$

其中, $\mathbf{k}_{cd,rs}$ 为节点 (c, d) 与节点 (r, s) 的相关刚度矩阵, 其可写为

$$\mathbf{k}_{cd,rs} = \int_0^1 \int_0^1 [\mathbf{B}_{cd}]^T [\mathbf{D}_m] [\mathbf{B}_{rs}] |\mathbf{J}_i| d\zeta d\eta, \quad (14)$$

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{mn,rs}^{er} = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{N}^T \mathbf{q} |\mathbf{J}_i| d\zeta d\eta, \\ \mathbf{F}_{mn,rs}^{er} = \mathbf{N}^T \mathbf{P}, \end{cases} \quad (15)$$

式中 $\mathbf{N} = \boldsymbol{\Psi}_{mn}^e$ 为形函数矩阵; $\mathbf{P}$ 为集中荷载向量.

4 转换矩阵

通过上述步骤, 可以得到多分辨率四边形板壳单元的刚度与等效节点力, 为进行结构计算, 需要将单元刚度与等效节点力转换到整体坐标系下, 此转换可以通过转换矩阵 $\mathbf{T}_{mn}^e$ 来实现, 即

$$\mathbf{K}_{mnl}^i = \mathbf{T}_{mn}^{eT} \mathbf{K}_{mn}^e \mathbf{T}_{mn}^e, \quad (16)$$

$$\mathbf{f}_{mn}^i = \mathbf{T}_{mn}^{eT} \mathbf{f}_{mn}^e, \quad (17)$$

$$\mathbf{F}_{mn}^i = \mathbf{T}_{mn}^{eT} \mathbf{F}_{mn}^e, \quad (18)$$

其中,

$$\mathbf{T}_{mn}^e = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & & & & \mathbf{0} \\ & \cdots & & & \\ & & \lambda_{ij} & & \\ & & & \cdots & \\ \mathbf{0} & & & & \lambda_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\lambda_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{xX} & \cos\theta_{xY} & \cos\theta_{xZ} & 0 & 0 \\ \cos\theta_{yX} & \cos\theta_{yY} & \cos\theta_{yZ} & 0 & 0 \\ \cos\theta_{zX} & \cos\theta_{zY} & \cos\theta_{zZ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{xX} & \cos\theta_{xY} \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{yX} & \cos\theta_{yY} \end{bmatrix},$$

其中 θ 为单元局部坐标轴与整体坐标轴之间的夹角.

5 结构总刚和节点力

得到整体坐标系下的单元刚度与等效节点力后, 很容易得到结构的总刚和节点力

$$\mathbf{K}_{mn} = \sum_i \mathbf{K}_{mn}^i, \quad (19)$$

$$\mathbf{F}_{mn} = \sum_i \mathbf{F}_{mn}^i, \quad (20)$$

$$\mathbf{f}_{mn} = \sum_i \mathbf{f}_{mn}^i. \quad (21)$$

6 算例与讨论

6.1 算例

算例1 如图6所示, 有一两边简支两边自由边 60° 的斜板, 各边长为 L , 板厚 t , 弹性模量 E , 材料泊松比 $\mu = 0.2$, 承受均布荷载 q , 求该斜板中心的挠度.

针对斜板中心的挠度计算, 分别采用本文的多分辨率和传统的单分辨率四边形板壳单元有限元方法及区间三次B样条小波有限元法(BSWI)来求解. 由于采用了全节点形函数, 多分辨率四边形板壳单元计算模型为整体结构模型, 即只需单个单元来模拟整个斜板, 其分辨率分别取 9×9 , 13×13 和 17×17 , 如图7(a); 另外, 由于采用了分节点形函数, 传统的四边形板壳单元建立的计算模型是离散模型, 其离散网格划分取对应的 8×8 , 12×12 和 16×16 , 如图7(b); 而区间三次B样条小波有限元法采用了样条尺度函数矢量积的方法构建了复杂的全节点形函数, 所以该模型也是整体结构模型. 其计算结果列于表1^[9,15]. 由表1看出, 我们可以通过调节多分辨率单元分辨率的大小来提高计算的清晰度, 此单元相当于一张图片, 节点等同于图片的像素, 而传统单分辨率单元是通过增加网格的密度来提高计算精度, 而精度与清晰度相当, 但是与传统单分辨率单元有限元法相比较, 多分辨率单元有限元法有如下优势: (1) 多分辨率单元模型中的分辨率具有明确的数学意义, 其取值具有坚实的数学基, 而传统模型的网格划分主要依靠经验, 无数学基, 无任何数学意义; (2) 由于域内是全节点, 多分辨率整体模型中单元节点刚度与等效力可以直接自动生成, 而传统离散模型的单元节点为分节点, 其每个节点刚度与等效

图6 简支斜板
Figure 6 A skew plate.

图7 斜板的有限元计算模型. (a) 多分辨率单元整体计算模型; (b) 单分辨率单元离散计算模型

Figure 7 The finite element model for the skew plate. (a) A multiresolution model (integrated by RL); (b) a monoresolution model (discretized by mesh).

表1 斜板中心的挠度($w/qL^4/100D0$)
Table 1 The center point deflection ($w/qL^4/100D0$)

单元类型		
本文单元 (分辨率/单个单元)	传统单元 (网格)	挠度
9×9	8×8	0.7876
13×13	12×12	0.7909
17×17	16×16	0.7920
BSW ^[9]	—	0.7925
Analytical ^[15]	—	0.7945

力都需进行人工叠加组合. 比较区间三次B样条小波有限元法分析结果的精度, 多分辨率单元有限元法的计算清晰度与其相当, 但多分辨率单元有限元法有如下特长: (1) 多分辨率单元模型中的分辨率具有明确的数学意义, 其取值具有坚实的数学基, 而区间三次B样条函数节点数量的选取主要依靠经验, 也无数学基, 无任何数学意义; (2) 全节点形函数表达式简洁且具有Kronecker delta特性, 便于处理边界条件, 从而提高了计算效率, 而矢量积构造的全节点形函数表达式较为复杂, 有负值, 不利于快速数值积分, 且没有Kronecker

delta特性, 因此需要对边界条件进行特殊处理, 从而大大地影响了计算速度.

算例2 一边自由一边固定的圆环板, 板厚 t , 内外半径分别为 b , a , 如图8所示, 承受均布荷载 q , 弹性模量 E , 材料泊松比 $\mu = 0.3$, 求圆环板内缘自由边的挠度.

为求解问题, 同时减少工作量, 可以利用对称性, 取1/4结构来进行计算分析, 如图9. 可以分别采用本文的多分辨率和传统的单分辨率四边形板壳单元有限元方法来分析计算. 多分辨率单元有限元模型如图9(a), 该1/4圆环被划分为4个多分辨率单元①, ②, ③, ④. 其每个单元的分辨率取为 5×3 , 则整体结构的分辨率为 9×5 , 分析过程中各个单元的连接, 可以通过拼接来完成, 此过程就像图片间的PS, 其计算结果列于表2^[16], 同时, 传统单分辨率单元有限元模型如图9(b), 1/4圆环被划分为 8×4 个网格单元, 计算结果列于表2. 由表2可以看到, 两种方法的计算结果是一致的, 其接近解析解, 但是, 和单多分辨率单元有限元模型比较, 多分辨

图8 圆环板
Figure 8 A circular ring slab.

图9 1/4圆环板的有限元模型. (a) 多分辨率单元整体计算模型; (b) 单分辨率单元离散计算模型

Figure 9 The finite element model for the 1/4 circular ring slab. (a) A multiresolution model; (b) a monoresolution model.

表2 圆环板的位移反应($w/qa^4/Er^3$)Table 2 The displacement response for circular ring slab ($w/qa^4/Er^3$)

单元类型		挠度
本文单元(分辨率)	传统单元(网格)	
5×3	8×4	0.0576
Analytical ^[16]		0.0575

率单元有限元模型中单元少得多, 因此, 矢量转换次数少很多, 从而大大提高了计算分析的效率.

算例3 如图10所示折板, 弹性模量 $E=2.06 \times 10^5$ MPa, 泊松比 $\mu=0.3$, 折板厚度 $t=1$ m, 折板为方形板, 边长 $L=50$ m. 受均匀外压 $q=1.0$ kN/m² 作用, 边界条件为AB, EF自由, 其余各边简支. 求解图10中沿AB和CD边的位移.

本题分别采用本文的多分辨率四边形板壳单元、传统单分辨率四边形板壳单元求解. 为了构建四边形板壳单元模型, 在CD线中点处将其脊点沿 $-y$ 方向移动5 m, 标为点O, 再分别将C, D两点沿 y 正向移动5 m, 标为点K, I, 连接点KOI成折线. 这样, 多分辨率计算模型就由折线KOI和脊线划分的4个多分辨率四边形板壳单元①, ②, ③, ④组成, 如图11(a)所示, 每个单元的分辨率为 6×6 , 整个折板结构的分辨率是 11×11 , 由于该模型域中节点是全节点, 所以它属于无网格整体计算模型, 其计算结果对应图12(a)和(b)中的Case A曲线; 单分辨率计算模型是由 10×10 个传统单分辨率四边形板壳单元构成, 如图11(b)所示, 由于该模型域中节点是分裂节点, 所以它属于网格离散计算模型, 其计算结果对应图12(a)和(b)中的Case B曲线; 图12中的第3条曲线是文献[9]采用区间三次B样条小波有限元分析的结果, 其计算模型是由矢量积构建的全节点形函数组合成的无网格整体模型, 由于此全节点形函数没有Kronecker delta特性, 所以该数学模型在处理边界条件方面, 需要转换矩阵, 显得比较复杂, 因此大大降低了该模型的计算效率, 模型图可以参见文献[9]. 由图12(a)和(b)可以看出, 多分辨率单元是个无网格单元, 它可以通过调节其分辨率的大小来调整单元节点的数量, 从而调节单元的计算精度, 此单元相当于一张图片, 单元节点与图片中的像素相当, 其计算分析的精度等同于图片的清晰度, 所以高清晰度单元的节点数量肯定要多于低清晰度单元; 虽然多分辨率单元模型与传统的单分辨率单元模型比较, 其计算清晰度

图10 均布荷载 q 作用下的折板结构Figure 10 A folded plate structure under the uniform loading q .

图11 折板结构计算模型. (a) 多分辨率整体计算模型; (b) 单分辨率离散计算模型

Figure 11 The folded plate structural computational model. (a) Multiresolution integrated computational model; (b) monoresolution discretized computational model.

相当, 但多分辨率模型比较传统的单分辨率模型具有以下优势: (1) 多分辨率模型中的分辨率具有明确的数学意义, 其取值具有坚实的数学基, 而传统模型的网格划分主要依靠经验, 无数学基, 无任何数学意义; (2) 由于域内是全节点, 多分辨率整体模型中单元节点刚度与等效力可以直接自动生成而传统离散模型的单元节点为分节点, 所以其每个节点刚度与等效力都需进行人工叠加组合; (3) 与传统单元的碎片化模型相比较, 多分辨率单元的整体化模型中, 单元数量少, 所以矢量转换次数少, 计算效率高.

6.2 讨论

多分辨分析可看作是一种曝光的单元细节数量可以随意调节的技术. 在数值分析领域, 解方程的过程相当于曝光各个细节的过程, 而大尺寸单元的节点(细

图 12 折板结构位移反应曲线. (a) 沿边界线AB的变形曲线; (b) 沿中轴线CD的变形曲线

Figure 12 The folded plate structural displacement response curve. (a) The deflection curve along boundary line AB; (b) the deflection curve along midline CD.

节)数量可采用不同的方法和方式来进行调整,这些方法可分为两类,即网格(离散)计算模型法及无网格(整体)计算模型法,其中属于网格计算模型法的有,传统有限元法、多重网格法、自适应方法、多尺度有限体积法、多尺度有限元法等,其特征是基于离散模型,即采用了分节点的形函数;属于无网格(整体)计算模型法的有,小波有限元法、无网格法、自然单元法、等几何法及多分辨有限元法等,其特征是基于整体模型,即采用了全节点的形函数.传统有限元法采用经验性的网格划分方式来调节大单元内节点数量,而网格划分基本上没有数学基提供支撑;小波有限元法采用依靠所建立的相互包含、嵌套的多尺度小波基函数这样的数学基的方式,但是该数学基是个弱基且因其构建过程(尺度函数矢量积)复杂而效率较低(二、三维);无网格法、自然单元法应用经验性的拓扑排布的全节点布置方式,而全节点拓扑排布也没有数学基

提供支撑;等几何法一般采用三次B样条函数矢量积为全节点形函数,但样条函数节点的选取主要依据经验,同样,没有数学基的支撑.总之,上述各种方法或其他方法都缺乏分辨率 RL 这种很容易地调节点数量的常数,就是因为它们都没有一个简洁而坚实的数学基,而本文提出的多分辨率有限元方法具有此简洁而坚实的数学基,因此,它拥有一个分辨率常数 RL ,可以方便地调节大单元内节点的数量同时确定每个节点在单元中的位置,这里的分辨率一般是指能够辨析出的单元内两点之间的距离,如有米级、厘米级、纳米级等.因此,可以说,小波有限元法、无网格法、自然单元法、等几何法等都属于非理性多辨分析方法,可被视为是传统单分辨率有限元法(离散模型)向多分辨率有限元法(整体模型)转化过程中所产生的过渡性的方法,即多分辨率有限元法完全可以统一这些方法(在所有这些方法的全节点形函数中,多分辨率有限元法的全节点形函数最为简洁且具有Kronecker delta特性而便于边界条件的处理).

7 结论与展望

本文构造了多分辨率板壳单元有限元方法,和传统板壳单元有限元法相比较,本文方法有如下特点.

(1) 本文提出了分节点和全节点的概念,并基于传统板壳单元的分节点形函数,提出一种新颖的函数域的延拓方法,构建了基本全节点形函数,该函数具有Kronecker delta特性,便于边界条件的处理,同时基本全节点形函数的连续性为传统有限元法中节点刚度可由共同节点的单元刚度叠加得到的处理方法提供了坚实的理论依据.

(2) 将基本全节点函数收缩和平移,构造了基函数系,也就是多分辨分析的简洁而坚实的数学基,并由此形成了多分辨率单元的位移子空间序列,并引入了分辨率常数 RL ,从而建立了理性的多分辨分析概念,实现了结构理性化的多分辨数值分析.

(3) 传统板壳单元有限元法是单分辨率单元有限元法,为本文多分辨率板壳单元有限元方法的一个特例.

(4) 结构数值分析清晰度的高低是由分辨率大小决定的而非网格的密疏;高清晰度单元的节点数多于低清晰度单元.

(5) 理性多分辨分析的多分辨率板壳单元有限元法可以完全统一那些相应的非理性多分辨分析的有网格或无网格法, 且多分辨率板壳单元有限元方法计算效率高于相应的其他有网格或无网格板壳单元有限元法; 多分辨率有限元法以清晰度取代了其他方法的精度, 以分辨率代替了网格或条带, 以理性多分辨分析替换了非理性多分辨分析, 以全节点替代了分节点,

从此, 结构的计算模型实现了从碎片化(离散化)到整体化的转变.

(6) 随着多分辨率有限元法^[13,17-22]的提出, 理性多分辨分析将会在工程实际中得到广泛的应用.

针对连接不同分辨率单元的过渡单元的构造问题, 我们同样可以采用将基本全节点形函数收缩、平移, 并结合虚实节点的方法加以解决.

参考文献

- Xu J. An introduction to multigrid convergence theory. In: *Iterative Methods in Scientific Computing*. Singapore: Springer, 1997. 169–241
- Xu J, Zikatanov L T. On multigrid methods for generalized finite element methods. In: Griebel M, Schweitzer M A, eds. *Meshfree Methods for Partial Differential Equations*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003. 401–418
- Krause R, Rank E. Multiscale computations with a combination of the h- and p-versions of the finite-element method. *Comp Methods Appl Mech Eng*, 2003, 192: 3959–3983
- Zienkiewicz O C. The background of error estimation and adaptivity in finite element computations. *Comp Methods Appl Mech Eng*, 2006, 195: 207–213
- Jenny P, Lee S H, Tchelepi H A. Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation. *J Comp Phys*, 2003, 187: 47–67
- Jenny P, Lee S H, Tchelepi H A. Adaptive multiscale finite-volume method for multiphase flow and transport in porous media. *Multiscale Model Simul*, 2005, 3: 50–64
- Hou T Y, Wu X H, Zhang Y. Removing the cell resonance error in the multiscale finite element method via a petrov-galerkin formulation. *Commun Math Sci*, 2004, 2: 185–205
- He X, Ren L. A modified multiscale finite element method for well-driven flow problems in heterogeneous porous media. *J Hydrol*, 2006, 329: 674–684
- He Z J, Chen X F, Li B, et al. *Wavelet Finite Element Theory and Its Application* (in Chinese). Beijing: Science Press, 2006 [何正嘉, 陈雪峰, 李兵, 等. 小波有限元理论及其应用. 北京: 科学出版社, 2006]
- Xiang J W, Chen X F, He Z J, et al. The construction of 1D wavelet finite elements for structural analysis. *Comput Mech*, 2007, 40: 325–339
- Chen W. Singular boundary method: A novel, simple, meshfree, boundary collocation numerical method (in Chinese). *Chin J Solid Mech*, 2009, 30: 592–599 [陈文. 奇异边界法: 一个新的、简单、无网格、边界配点数值方法. 固体力学学报, 2009, 30: 592–599]
- Zhao M, Chen W. A meshless weighted least square method based on radial basic functions (in Chinese). *Chin J Comput Mech*, 2011, 28: 66–71 [赵敏, 陈文. 基于径向基函数的加权最小二乘无网格法. 计算力学学报, 2011, 28: 66–71]
- Xia Y M. A multiresolution finite element method based on a new quadrilateral plate element. *J Coupled Syst Multiscale Dyn*, 2014, 2: 52–61
- Luo S F, Pan G M, Pan H. Arbitrary quadrilateral element of plate bending (in Chinese). *Chin J Comput Mech*, 1985, 2: 65–72 [罗崧发, 潘光明, 潘慧. 非正交边界薄板弯曲问题的一种新单元—任意四边形单元. 计算结构力学及其应用, 1985, 2: 65–72]
- Ganga Rao H V S, Chaudhary V K. Analysis of skew and triangular plates in bending. *Comp Struct*, 1988, 28: 223–235
- Timoshenko S, Woinowsk-Krieger S. *Theory of Plates and Shells* (2nd ed). New York: McGraw-Hill College, 1959
- Xia Y, Liu Y, Chen S, et al. A rectangular shell element formulation with a new multi-resolution analysis. *Acta Mech Solid Sin*, 2014, 27: 612–625
- Xia Y M, Chen S L. A hexahedron element formulation with a new multi-resolution analysis. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2015, 58: 014601, arXiv: 1405.6775
- Xia Y M, Tang G, Jiang S Y. A multiresolution Timoshenko beam element formulation (in Chinese). *Chin J Solid Mech*, 2014, 35: 57–62 [夏逸鸣, 唐敢, 江世永. 多分辨率Timoshenko梁单元. 固体力学学报, 2014, 35: 57–62]
- Xia Y M. A multiresolution finite element method based on a new plane element (in Chinese). *Highlights Sciencepaper Online*, 2016, 9: 93–100 [夏逸鸣. 多分辨率平面单元有限元法. 中国科技论文在线精品论文, 2016, 9: 93–100]
- Xia Y. Multiresolution finite element method based on a new locking-free rectangular mindlin plate element. *World J Mech*, 2016, 06: 193–206, arXiv: 1505.06822

- 22 Xia Y M. A Multiresolution Finite Element Method (in Chinese). Reports for Postdoctoral Research. Chongqing: Logistics Engineering University, 2012 [夏逸鸣. 多分辨率有限元方法. 博士后出站报告. 重庆: 后勤工程学院, 2012]

A multiresolution finite element method based on a new quadrilateral shell element

XIA YiMing^{*}

College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China

Initially based on a split node shape function for a quadrilateral shell element, the basic full node shape function is constructed by extending the split node shape function to other three quadrants around the coordinate zero point and a displacement subspace sequence is constituted out of scaling and shifting of the basic full node shape function on the element domain, which brings about a simple, clear and rigorous mathematical basis for the multiresolution analysis (MRA). After that, the multiresolution quadrilateral shell element and method is formulated through applying the minimum potential energy principle. Hence, the MRA concept is established and the resolution level (*RL*) for the element is introduced. Finally, through the numerical examples, the following conclusions are drawn: traditional 4-node quadrilateral shell element and method is essentially a mono-resolution one and also a special case of the proposed element and method. Due to the full nodes in the element domain, the structural model for a numerical analysis by the proposed multiresolution element is an integrated one by *RL*, not a discretized one by mesh just as by the conventional monoresolution element. The proposed finite element method is a rational MRA method and overperforms all those irrational MRA methods in numerical analysis efficiency, also can consolidate those irrational MRA methods. The clarity of a structural analysis is defined by the *RL*, not mesh. The continuity of the full node shape functions unveils the secretes behind artificial assemblage of the corresponding items of the stiffness, mass matrices and the equivalent node loading vectors at common nodes by the conventional quadrilateral shell element.

quadrilateral thin shell element, split node, full node, mutually nesting displacement subspace sequence, rational multiresolution analysis, resolution level (*RL*)

PACS: 02.60.Cb, 02.60.Jh, 02.60.Lj, 02.70.Dh

doi: 10.1360/SSPMA2016-00482