极小非正规时序逻辑的矢列式演算系统

马明辉¹, 王善侠^{1,3}, 邓辉文^{1,2*}

1. 西南大学逻辑与智能研究中心, 重庆 400715

2. 西南大学计算机与信息科学学院, 重庆 400715

3. 河南师范大学计算机与信息工程学院, 新乡 453007

* 通信作者. E-mail: huiwend@swu.edu.cn

收稿日期: 2016-04-30; 接受日期: 2016-05-25; 网络出版日期: 2016-09-09

国家社会科学基金项目 (批准号: 16CZX049) 资助

摘要 本文对关系语义 (或 Kripke 语义) 下极小非正规模态逻辑 $C2$ 进行时序化处理, 得到极小非正规时序逻辑 $C2t$, 并建立了 $C2t$ 的 Hilbert 式公理系统 $HC2t$, 证明了其可靠性和完全性, $C2t$ 比极小时序逻辑 Kt 更具有一般性. 本文还从证明论的角度对 $C2t$ 进行了研究, 建立了 $C2t$ 的一个加标矢列式演算系统 $GC2t$, 并且证明了 $GC2t$ 的可靠性和完全性, 同时还证明了 $GC2t$ 的切割消除定理 (cut elimination), 然后得到 $C2t$ 的可判定性. 在 $GC2t$ 中还可以进行证明搜索.

关键词 非正规时序逻辑, 公理系统, 矢列式演算, 完全性, 可判定性

1 引言

时序逻辑是模态逻辑的一个重要分支. 现代形式化时态逻辑起源于 20 世纪 50 年代 Arther Prior 关于时序逻辑的研究. 随着软件工程、人工智能、模型检测等领域的产生和发展, 时序逻辑在计算机科学中产生了重要的影响.

1977 年, Pnueli 在论文“程序的时序逻辑”^[1] 中首次将时序逻辑应用于计算机科学, 对反应式系统和并发式系统进行规约 (specification) 和验证 (verification). 对于多个处理器同时运行的并发程序来说, 为了保证程序的正确性, 就需要验证它们的同步性. 时序逻辑可以描述事件的时间次序. 在验证程序的过程中, 时序公式可以用来表达一些重要的性质, 例如 “ $Gq \rightarrow Fp$ ” 保证, 如果具体条件 q 成立, 那么在计算过程中总是可以达到一个满足 p 的状态. 还有一些公式用来表达 “不变性”, 例如 “ Gp ” 表示 p 是不变的或安全的, 它总是会成立. 在理论计算机科学中, 线性时序逻辑用于表示线性计算过程, 而分枝时序逻辑用于表示不确定的计算模型.

在人工智能领域, 时序逻辑也是十分有用的. 在自然语言处理方面, 为了处理时间的语义表示问题, 需要使用时序逻辑的技术. 更一般地说, 为了处理时序知识表示的问题, 时序逻辑技术是有用的工

引用格式: 马明辉, 王善侠, 邓辉文. 极小非正规时序逻辑的矢列式演算系统. 中国科学: 信息科学, 2017, 47: 31–46, doi: 10.1360/N112015-00320
Ma M H, Wang S X, Deng H W. Sequent calculus for minimal non-normal temporal logic (in Chinese). Sci Sin Inform, 2017, 47: 31–46, doi: 10.1360/N112015-00320

具. 此外, 时序逻辑也被广泛应用于规划系统的设计. 在设计线性或非线性规划器时, 最基本的问题就是时间的表示. 除了自然语言处理和人工智能, 时序逻辑还被应用于软件系统开发的各个方面^[2~4].

Clark 和 Emerson 在 20 世纪 80 年代初期将时序逻辑引入模型检测^[5], 所提出的基于时序逻辑的模型检测算法允许关于计算机程序的推理自动化. 单个公式在单个模型上可满足问题的检测要比公式有效性的检测容易得多, 因此这种模型检测算法是可以改进的. Clark 和 Emerson 针对计算树逻辑提出的算法是模型大小及其时态表述长度的多项式. 这在并发程序的正确性验证方面是极其重要的.

极小时序逻辑 K_t 是一种比较简单的时序逻辑, 它可以看作极小正规模态逻辑 K 加时序算子的扩张^[6,7]. 一般所说的线性时序逻辑、分枝时序逻辑等都是对 K_t 的扩张^[8]. 极小时序逻辑 K_t 的语言是在经典命题逻辑语言的基础上增加时序算子 G 和 H 得到的, 它们的对偶算子分别定义为 $FA := \neg G\neg A$ 和 $PA := \neg H\neg A$. 时序逻辑 K_t 的 Hilbert 式公理系统由下面的公理模式和推理规则构成:

(Tau) 所有经典命题逻辑重言式特例;	(HF) $A \rightarrow HFA$;
(KG) $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$;	(MP) 从 A 和 $A \rightarrow B$ 推出 B ;
(KH) $H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$;	(GE) 从 A 推出 GA 和 HA .
(GP) $A \rightarrow GPA$;	

极小时序逻辑语言的一个框架是 (W, R_F, R_P) , 其中 W 是非空集, R_F 和 R_P 是 W 上的二元关系并且 $R_F = (R_P)^{-1}$. 关系 R_F 和 R_P 分别用来解释时序算子 G 和 H .

本文基于 Lemmon 提出的极小非正规模态逻辑 $C2$ ^[9], 建立一个新的时序逻辑, 称为极小非正规时序逻辑. $C2$ 是在极小正规模态逻辑 K 上去掉正规性得到的, 即把系统 K 中概括规则 (从 A 推出 $\Box A$) 替换为单调规则 (从 $A \rightarrow B$ 推出 $\Box A \rightarrow \Box B$) 就得到 $C2$. 它是关系语义学下极小非正规模态逻辑. 本文的一项工作是将 $C2$ 时序化, 形成比 K_t 更一般的时序逻辑 $C2_t$, 并建立了 $C2_t$ 的 Hilbert 式公理系统 $HC2_t$, 证明了其可靠性和完全性. 在该时序逻辑中, 不一致性在非正规时间点上是不可能的, 在正规时间点上是不可能的. 令 $\perp$ 表示一个不一致的命题, 那么 “ $F\perp$ ” (将来可能出现不一致) 这个公式在非正规时间点上是真的, 但是它在正规时间点上假的. 因此, 对于 “不一致命题的可能性” 在非正规时序逻辑中是能够得到表达的.

本文的另一项工作是建立非正规时序逻辑 $C2_t$ 的加标矢列式演算系统, 从而解决 $C2_t$ 的可判定性和证明搜索问题. 模态逻辑的加标矢列式系统是近年来出现的新证明系统^[10], 关于正规时序逻辑 K_t 也有加标矢列式系统^[11], 其特点是将模态算子的语义写成自然演绎规则, 然后从自然演绎系统转化为矢列式系统. 对于 $C2_t$ 采用这种演算系统的原因是, 在 $C2_t$ 中时序算子之间的 Galois 联系 (伴随性质) 不成立, 具体参见命题 1. 运用 Galois 联系, 时序逻辑 K_t 有显示演算系统^[12] (display calculus), 但 $C2_t$ 无法建立显示演算系统. 本文提出的加标矢列式系统是目前唯一关于非正规时序逻辑的矢列式系统. 利用该系统可以证明 $C2_t$ 的可判定性, 也可以解决该系统的证明搜索问题. 该方法可推广到非正规线性时序逻辑和非正规分枝时序逻辑上, 从而形成更多新的时序逻辑理论, 具有一定的应用前景.

2 非正规时序逻辑 $C2_t$

时序逻辑语言 $\mathcal{L}_t$ 由可数命题变元集 Prop 、命题常量 $\perp$ 、命题联接词 $\rightarrow$ 、时序算子 G 和 H 组成. $\mathcal{L}_t$ 公式由如下规则递归定义:

$$A ::= p \mid \perp \mid (A \rightarrow A) \mid GA \mid HA, \quad p \in \text{Prop}.$$

定义 $\neg A := A \rightarrow \perp$ (否定), $\top := \perp \rightarrow \perp$ (恒真), $A \vee B := \neg A \rightarrow B$ (析取), $A \wedge B := \neg(\neg A \vee \neg B)$ (合取), $A \leftrightarrow B := (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ (等值), $FA := \neg G\neg A$, $PA := \neg H\neg A$. 公式 GA 表示“ A 将来总是真的”, HA 表示“ A 过去总是真的”, FA 表示“ A 将来可能真”, PA 表示“ A 过去可能真”. 与 Lemmon 关于非正规模态逻辑 C2 的模型 (W, N, R) 类似^[9], 时序逻辑语言 $\mathcal{L}_t$ 在正则框架和正则模型上来解释.

定义1 一个正则框架是 $\mathcal{F} = (W, N, R_F, R_P)$, 其中 W 是非空集 (时间点的集合), $N \subseteq W$, R_F 和 R_P 是集合 W 上满足如下条件的二元关系:

对任意 $x, y \in N$, $xR_F y$ 当且仅当 $yR_P x$.

用 $\mathbb{RF}$ 表示所有正则框架组成的框架类. 一个正则模型是 $\mathcal{M} = (W, N, R_F, R_P, V)$, 其中 (W, N, R_F, R_P) 是正则框架, $V: \text{Prop} \rightarrow \mathcal{P}(W)$ 是从 Prop 到 W 的幂集上的赋值函数.

对任何正则框架 $\mathcal{F} = (W, N, R_F, R_P)$, N 中的元素称为正规时间点, 而 N 之外的元素称为非正规时间点. 引入这种框架的直观意义是, 在非正规时间点上 FA 是真的, 即使 A 是不一致的, A 也是可能的. 在任何正规时间点上, 如果 A 是不一致的, 那么 FA 是假的.

定义2 一个公式 A 在正则模型 $\mathcal{M}$ 中的点 x 上真 (记号 $\mathcal{M}, x \models A$) 递归定义如下.

$\mathcal{M}, x \models p$ 当且仅当 $x \in V(p)$, 其中 $p \in \text{Prop}$.

$\mathcal{M}, x \not\models \perp$.

$\mathcal{M}, x \models A \rightarrow B$ 当且仅当 $\mathcal{M}, x \not\models A$ 或者 $\mathcal{M}, x \models B$.

$\mathcal{M}, x \models GA$ 当且仅当 $x \in N$ 并且 $\forall y \in W(xR_F y \Rightarrow \mathcal{M}, y \models A)$.

$\mathcal{M}, x \models HA$ 当且仅当 $x \in N$ 并且 $\forall y \in W(xR_P y \Rightarrow \mathcal{M}, y \models A)$.

由定义 2 可得

$\mathcal{M}, x \models FA$ 当且仅当 $x \notin N$ 或者 $\exists y \in W(xR_F y \& \mathcal{M}, y \models A)$.

$\mathcal{M}, x \models PA$ 当且仅当 $x \notin N$ 或者 $\exists y \in W(xR_P y \& \mathcal{M}, y \models A)$.

一个公式 A 在正则框架 $\mathcal{F} = (W, N, R_F, R_P)$ 上有效 (记号 $\mathcal{F} \models A$), 如果对任意赋值 V 和任意时间点 $x \in W$ 都有 $\mathcal{F}, V, x \models A$. 对任何公式集 $\Gamma \cup \{A\}$, 称 A 是 Γ (相对于 $\mathbb{RF}$) 的逻辑后承 (记号 $\Gamma \models_{\mathbb{RF}} A$), 如果对任意正则模型 $\mathcal{M}$ 和其中的时间点 x , 如果 $\mathcal{M}, x \models B$ 对所有 $B \in \Gamma$, 那么 $\mathcal{M}, x \models A$.

定义3 Hilbert 式公理系统 HC2t 由下面的公理模式和推理规则组成:

(Tau) 所有经典命题逻辑重言式特例;	(N) $G\top \leftrightarrow H\top$;
(KG) $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$;	(MP) 从 A 和 $A \rightarrow B$ 推出 B ;
(KH) $H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$;	(Mon _H) 从 $A \rightarrow B$ 推出 $HA \rightarrow HB$;
(Ad1) $G\top \rightarrow (A \rightarrow GPA)$;	(Mon _G) 从 $A \rightarrow B$ 推出 $GA \rightarrow GB$.
(Ad2) $H\top \rightarrow (A \rightarrow HFA)$;	

在上述公理系统中, 公理 (Ad1) 和 (Ad2) 是与 Galois 联系有关的公理, 称之为伴随公理, 其中 $G\top$ 表示, 在任何正规时间点上, 任何重言式将来一直是真的. 在任何模型 $\mathcal{M} = (W, N, R_F, R_P, V)$, 对任何时间点 $x \in W$, $\mathcal{M}, x \models G\top$ 当且仅当 $x \in N$. 因此, Galois 联系只在正规时间点中成立, 扩展到非正规时间点, Galois 联系一般不成立 (见命题 1). 公理 (N) 表示, 在任何模型中, $G\top$ 与 $H\top$ 都定义正规时间点的集合. 规则 (Mon_G) 和 (Mon_H) 分别是关于算子 G 和 H 的单调性规则.

记号 $\vdash_{\text{HC2t}} A$ 表示 A 是系统 HC2t 的定理. 我们也用 HC2t 表示系统 HC2t 的所有定理的集合. 对任何公式集 Γ , 记号 $\Gamma \vdash_{\text{HC2t}} A$ 表示存在公式集 Γ 的有穷子集 Γ' 使得 $\vdash_{\text{HC2t}} \bigwedge \Gamma' \rightarrow A$, 其中 $\bigwedge \Gamma'$

表示 Γ' 中所有公式的合取. 称公式集 Γ (相对于系统 HC2t) 是一致的, 如果 $\Gamma \not\vdash_{\text{HC2t}} \perp$. 称 Γ 是不一致的, 如果它不是一致的. 称一个公式 A 是一致的, 如果公式集 $\{A\}$ 是一致的. 称 Γ 是极大一致的, 如果 Γ 是一致的并且任意真包含 Γ 的公式集都是不一致的.

引理1 对任意公式 A 和 B , 如下成立:

- (1) $\vdash_{\text{HC2t}} GA \wedge GB \leftrightarrow G(A \wedge B)$,
- (2) $\vdash_{\text{HC2t}} G\top \rightarrow (FHA \rightarrow A)$.

证明 (1) 显然, $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \in \text{HC2t}$. 根据推理规则 (Mon_G), 有 $GA \rightarrow G(B \rightarrow (A \wedge B)) \in \text{HC2t}$. 根据公理模式 (KG), 有 $G(B \rightarrow (A \wedge B)) \rightarrow (GB \rightarrow G(A \wedge B)) \in \text{HC2t}$. 所以 $GA \rightarrow (GB \rightarrow G(A \wedge B)) \in \text{HC2t}$. 因此 $(GA \wedge GB) \rightarrow G(A \wedge B) \in \text{HC2t}$. 又因 $A \wedge B \rightarrow A \in \text{HC2t}$ 并且 $A \wedge B \rightarrow B \in \text{HC2t}$. 根据推理规则 (Mon_G), 有 $G(A \wedge B) \rightarrow G(A) \in \text{HC2t}$ 并且 $G(A \wedge B) \rightarrow G(B) \in \text{HC2t}$. 所以 $G(A \wedge B) \rightarrow G(A) \wedge G(B) \in \text{HC2t}$. 因此 $\vdash_{\text{HC2t}} GA \wedge GB \leftrightarrow G(A \wedge B)$.

(2) 根据 HC2t 的公理模式, 显然有 $G\top \rightarrow (\neg A \rightarrow GP\neg A) \in \text{HC2t}$, 即 $G\top \rightarrow (\neg A \rightarrow G\neg H\neg A) \in \text{HC2t}$. 又因 $A \leftrightarrow \neg\neg A \in \text{HC2t}$. 根据 HC2t 的推理规则 (Mon_H) 和 (Mon_G), 有 $G\neg HA \leftrightarrow G\neg H\neg\neg A \in \text{HC2t}$. 所以 $G\top \rightarrow (\neg A \rightarrow G\neg HA) \in \text{HC2t}$. 因此 $G\top \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg G\neg HA) \in \text{HC2t}$. 所以 $G\top \rightarrow (\neg G\neg HA \rightarrow A) \in \text{HC2t}$, 即 $G\top \rightarrow (FHA \rightarrow A) \in \text{HC2t}$.

引理2 任何极大一致公式集 Γ 具有下列性质:

- (1) $\text{HC2t} \subseteq \Gamma$;
- (2) 如果 $\Gamma \vdash_{\text{HC2t}} A$, 那么 $A \in \Gamma$;
- (3) 如果 $A, A \rightarrow B \in \Gamma$, 那么 $B \in \Gamma$;
- (4) 对任意公式 A , $A \in \Gamma$ 当且仅当 $\neg A \notin \Gamma$;
- (5) 对任意公式 A 和 B , $A \wedge B \in \Gamma$ 当且仅当 $A \in \Gamma$ 并且 $B \in \Gamma$;
- (6) 对任意公式 A 和 B , $A \vee B$ 当且仅当 $A \in \Gamma$ 或者 $B \in \Gamma$;
- (7) $G\top \in \Gamma$ 当且仅当 $H\top \in \Gamma$.

证明 运用极大一致集的定义易证.

引理3 对任意一致公式集 Γ , 都存在极大一致公式集 Γ' 使得 $\Gamma \subseteq \Gamma'$.

证明 考虑集合族 $\Pi = \{\Sigma \mid \Gamma \subseteq \Sigma \text{ 并且 } \Sigma \text{ 是一致的}\}$. 集合族 Π 中任何非空链都有上界, 即所考虑链的并集. 根据 Zorn 引理, Π 有极大元 Γ' , 即所需要的极大一致集.

下面用典范模型方法来证明 HC2t 的完全性.

定义4 系统 HC2t 的典范模型 $\mathcal{M}^t = (W^t, N^t, R_F^t, R_P^t, V^t)$ 定义如下:

- (1) $W^t = \{x \mid x \text{ 是极大一致集}\}$;
- (2) $N^t = \{x \in W^t \mid G\top \in x\}$;
- (3) 当 $x \in N^t$ 时, $xR_F^t y$ 当且仅当 $\{A \mid GA \in x\} \subseteq y$; 当 $x \notin N^t$ 时, 令 $R_F^t(x) = \{y \in W^t \mid xR_F^t y\} = \emptyset$;
- (4) 当 $x \in N^t$ 时, $xR_P^t y$ 当且仅当 $\{A \mid HA \in x\} \subseteq y$; 当 $x \notin N^t$ 时, 令 $R_P^t(x) = \{y \in W^t \mid xR_P^t y\} = \emptyset$;
- (5) $V^t(p) = \{x \in W^t \mid p \in x\}$, 对每个 $p \in \text{Prop}$.

引理4 对任意 $x, y \in W^t$, (1) 如果 $x \in N^t$, 那么 $xR_F^t y$ 当且仅当 $\{FA \mid A \in y\} \subseteq x$; (2) 如果 $x \in N^t$, 那么 $xR_P^t y$ 当且仅当 $\{PA \mid A \in y\} \subseteq x$; (3) $N^t = \{x \in W^t \mid H\top \in x\}$.

证明 (1) 设 $x \in N^t$. 再设 $xR_F^t y$ 和 $A \in y$. 由极大一致集的性质可得, $\neg A \notin y$. 由 $xR_F^t y$ 的定义可知, $G\neg A \notin x$. 所以 $\neg G\neg A \in x$, 即 $FA \in x$. 反之, 设 $\{FA \mid A \in y\} \subseteq x$ 并且 $GA \in x$. 由极大一致集的性质可得, $\neg F\neg A \in x$. 所以 $F\neg A \notin x$. 所以 $\neg A \notin y$. 因此 $A \in y$. 所以 $xR_F^t y$. (2) 的证明与 (1) 类似. (3) 根据极大一致集的性质直接可得.

引理5 对任意公式 A 和 $x \in W^t$, (1) 如果 $FA \in x$, 那么 $x \notin N^t$, 或者存在 $y \in W^t$ 使得 $xR_F^t y$ 并且 $A \in y$; (2) 如果 $PA \in x$, 那么 $x \notin N^t$, 或者存在 $y \in W^t$ 使得 $xR_P^t y$ 并且 $A \in y$.

证明 (1) 设 $FA \in x$ 并且 $x \in N^t$. 下面构造极大一致集 y 使得 $xR_F^t y$ 并且 $A \in y$. 令 $y' = \{A\} \cup \{A \mid GA \in x\}$. 那么 y' 是一致的. 假设不一致. 那么存在公式 $A_1, \dots, A_n \in \{A \mid GA \in x\}$ 使得 $\vdash_{\text{HC2t}} (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow \neg A$. 由规则 (Mon_G) 得, $\vdash_{\text{HC2t}} G(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow G\neg A$. 由引理 1(1) 得, $\vdash_{\text{HC2t}} (GA \wedge GB) \leftrightarrow G(A \wedge B)$. 所以 $\vdash_{\text{HC2t}} (GA_1 \wedge \dots \wedge GA_n) \rightarrow G\neg A$. 因为 $GA_1, \dots, GA_n \in x$ 并且 x 是极大一致集, 所以 $GA_1 \wedge \dots \wedge GA_n \in x$. 所以 $G\neg A \in x$. 所以 $\neg FA \in x$. 与 $FA \in x$ 矛盾. 所以 y' 是一致的. 将 y' 扩张为极大一致集 y . 由 y' 的构造可得 $xR_F^t y$ 并且 $A \in y$. (2) 的证明与 (1) 类似.

引理6 对任意 $x, y \in N^t$, $xR_F^t y$ 当且仅当 $yR_P^t x$.

证明 设 $x, y \in N^t$. 再设 $xR_F^t y$ 并且 $HA \in y$. 由引理 4 可得, $FHA \in x$. 由引理 1(2) 得, $GT \rightarrow (FHA \rightarrow A) \in \text{HC2t}$. 因为 $GT \in x$, 所以 $FHA \rightarrow A \in x$. 因此 $A \in x$. 所以 $yR_P^t x$. 反之, 设 $yR_P^t x$ 并且 $A \in y$. 因为 $HT \rightarrow (A \rightarrow HFA) \in y$ 并且 $HT \in y$, 所以 $HFA \in y$. 因此 $FA \in x$. 所以 $xR_F^t y$.

下面的证明将运用公式复杂度的概念. 对任何公式 A , 它的复杂度 $d(A)$ 递归定义如下:

$$d(p) = 0 = d(\perp), \quad d(A \rightarrow B) = \max\{d(A), d(B)\} + 1, \quad d(GA) = d(A) + 1 = d(HA),$$

每个公式的复杂度是其中出现的嵌套算子的最大数目.

引理7 对任意公式 A 和 $x \in W^t$, $\mathcal{M}^t, x \models A$ 当且仅当 $A \in x$.

证明 对公式 A 的复杂度归纳证明. 公式 A 是命题变元或 $\perp$ 时, 结论显然成立. 公式 $A = B \rightarrow C$ 时, 由归纳假设易证. 令 $A = GB$. 公式 $A = HB$ 的情况类似证明. 首先, 设 $\mathcal{M}^t, x \models GB$ 并且 $GB \notin x$. 所以 $x \in N^t, \forall y \in W^t (xR_F^t y \Rightarrow \mathcal{M}^t, y \models B), \neg GB \in x$. 所以 $F\neg B \in x$. 由于 $x \in N^t$, 根据引理 5, 存在 $z \in W^t$ 使得 $xR_F^t z$ 并且 $\neg B \in z$. 由 $\neg B \in z$ 可得, $B \notin z$. 由归纳假设得, $\mathcal{M}^t, z \not\models B$. 因为 $xR_F^t z$ 并且 $\mathcal{M}^t, x \models GB$, 所以 $\mathcal{M}^t, z \models B$, 矛盾. 反之, 设 $GB \in x$, 因为 $B \rightarrow \top \in \text{HC2t}$, 所以 $GB \rightarrow GT \in \text{HC2t}$. 所以 $GT \in x$. 因此 $x \in N^t$. 再设 $y \in W^t$ 并且 $xR_F^t y$. 由于 $GB \in x$, 所以 $B \in y$. 由归纳假设, $\mathcal{M}^t, y \models B$. 所以 $\mathcal{M}^t, x \models GB$.

定理1 (可靠性和完全性) 对任意公式集 $\Gamma \cup \{A\}$, $\Gamma \vdash_{\text{HC2t}} A$ 当且仅当 $\Gamma \vdash_{\text{RF}} A$.

证明 从左至右 (可靠性) 只需对 $\Gamma \vdash_{\text{HC2t}} A$ 的证明长度进行归纳即可证之. 反之, 设 $\Gamma \not\vdash_{\text{HC2t}} A$. 那么公式集 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 是一致的, 所以存在极大一致集 x 使得 $\Gamma \cup \{\neg A\} \subseteq x$. 根据引理 7, $\mathcal{M}^t, x \models B$ 对所有 $B \in \Gamma$ 并且 $\mathcal{M}^t, x \models \neg A$. 所以 $\mathcal{M}^t, x \not\models A$. 因此 $\Gamma \not\vdash_{\text{RF}} A$.

非正规时序逻辑 C2t 与正规时序逻辑 Kt 的一个重要区别是如下 Galois 联系规则在 Kt 中可推导, 但它们在 HC2t 中不成立:

$$\frac{PA \rightarrow B}{A \rightarrow GB} (G1), \quad \frac{FA \rightarrow B}{A \rightarrow HB} (G2).$$

命题1 (G1) 和 (G2) 在 HC2t 中不成立.

证明 假设 (G1) 在 HC2t 中成立. 因为 $Pq \rightarrow Pq \in \text{HC2t}$, 根据 (G1) 可得, $q \rightarrow GPq \in \text{HC2t}$. 但这是不可能的. 构造一个正则模型 $\mathcal{M} = (W, N, R_F, R_P, V)$ 如下: $W = \{x, y\}$; $N = \{x\}$; $R_F = R_P = \emptyset$; $V(q) = \{y\}$. 那么 $\mathcal{M}, y \models q$ 但是 $\mathcal{M}, y \not\models GPq$. 所以 $\mathcal{M}, y \not\models q \rightarrow GPq$. 由 HC2t 的可靠性可得, $q \rightarrow GPq \notin \text{HC2t}$. (G2) 在 HC2t 中不成立的证明与 (G1) 类似.

3 C2t 的加标矢列式演算系统

本节定义非正规时序逻辑的加标矢列式系统. 模态逻辑的加标矢列式系统参见文献 [10]. 首先定义加标矢列式的概念. 一个关系原子是形如 xR_Fy 或 xR_Py 的表达式. 一个加标公式是形如 $x:A$ 的表达式, 其中 A 为时序逻辑语言 $\mathcal{L}_t$ 的公式. 这里 x, y 等是以正则框架中的时间点集合为论域的变元 (假定有可数多个这样的变元), 称为标记. 所有标记的集合记为 X . 一个项是按如下规则构造的表达式:

$$t ::= Nx \mid xR_Fy \mid xR_Py \mid x:A,$$

其中 A 是一个公式, x, y 等都是标记. 用 s, t 等 (可加下标) 表示任意的项. 一个矢列式是形如 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的表达式, 其中 Γ, Δ 是由项构成的可重集.

一个项 Nx 表示 “ x 是正规时间点”, xR_Fy 表示 “ y 是 x 的将来时间点”, xR_Py 表示 “ y 是 x 的过去时间点”, $x:A$ 表示 “ A 在 x 上是真的”. 一个矢列式 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 直观意思是 “ Γ 中所有项都成立蕴涵 Δ 中至少一个项成立”.

定义5 矢列式系统 GC2t 由如下公理和规则组成:

(1) 公理

$$\begin{aligned} & x:p, \Gamma \Rightarrow \Delta, x:p, \quad Nx, \Gamma \Rightarrow \Delta, Nx, \\ & xR_Fy, \Gamma \Rightarrow \Delta, xR_Fy, \quad xR_Py, \Gamma \Rightarrow \Delta, xR_Py. \end{aligned}$$

注: 上述 4 条公理是矢列式演算系统中基本的恒等公理.

(2) 命题联结词规则

$$\begin{aligned} & \frac{x:A, x:B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x:A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\text{L}\wedge), \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, x:A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, x:B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x:A \wedge B} (\text{R}\wedge), \\ & \frac{x:A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad x:B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x:A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\text{L}\vee), \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, x:A, x:B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x:A \vee B} (\text{R}\vee), \\ & \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, x:A \quad x:B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x:A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\text{L}\rightarrow), \quad \frac{x:A, \Gamma \Rightarrow \Delta, x:B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x:A \rightarrow B} (\text{R}\rightarrow), \\ & \frac{}{x:\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\text{L}\perp). \end{aligned}$$

(3) 时序算子规则

$$\begin{aligned} & \frac{Nx, x:GA, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x:GA, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\text{LG1}), \quad \frac{y:A, x:GA, xR_Fy, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x:GA, xR_Fy, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\text{LG2}), \\ & \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, Nx \quad xR_Fy, \Gamma \Rightarrow \Delta, y:A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x:GA} (\text{RG}), \quad \frac{Nx, x:HA, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x:HA, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\text{LH1}), \\ & \frac{y:A, x:HA, xR_Py, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x:HA, xR_Py, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\text{LH2}), \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, Nx \quad xR_Py, \Gamma \Rightarrow \Delta, y:A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x:HA} (\text{RH}). \end{aligned}$$

注: 规则 (RG) 和 (RH) 中, 变量 y 不在结论中出现. 称变量 y 是规则 (RG) 和 (RH) 中的特征变量.

(4) 关系规则

$$\frac{yR_Fx, Nx, Ny, xR_Py, \Gamma \Rightarrow \Delta}{Nx, Ny, xR_Py, \Gamma \Rightarrow \Delta} (R_P), \quad \frac{yR_Px, Nx, Ny, xR_Fy, \Gamma \Rightarrow \Delta}{Nx, Ny, xR_Fy, \Gamma \Rightarrow \Delta} (R_F).$$

在 GC2t 中, 矢列式 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的一个推导是一个矢列式树状结构, 其中每个矢列式或者是公理的特例或规则 (L $\perp$) 的特例, 或者是应用规则从前面的矢列式得到的. 一个推导的高度是连续应用规则的最多次数, 公理和 (L $\perp$) 结论的推导高度规定为 0, 称一个矢列式 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 GC2t 中可推导 (记号 $\vdash_{GC2t} \Gamma \Rightarrow \Delta$), 如果存在以 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 为结论的推导. 用记号 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta$ 表示 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 有一个高度至多为 n 的推导, 其中 n 是自然数.

引理8 对任意加标公式 $x:A$, 可重集 Γ 和 Δ , 有 $\vdash x:A, \Gamma \Rightarrow \Delta, x:A$.

证明 对 A 的复杂度归纳证明. A 是命题变元时, $x:A, \Gamma \Rightarrow \Delta, x:A$ 是公理. A 是 $\perp$ 时, $x:A, \Gamma \Rightarrow \Delta, x:A$ 等于 $x:\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta, x:\perp$. 显然它是 (L $\perp$) 的结论. 公式 A 的主联结词 (即构造公式 A 最后一步使用的联结词) 是命题联结词时易证, 参考文献 [13]. 设 $A = GB$. 与情况 $A = HB$ 类似. 构造如下推导:

$$\frac{\frac{Nx, x:GB, \Gamma \Rightarrow \Delta, Nx}{x:GB, \Gamma \Rightarrow \Delta, Nx} (LG1) \quad \frac{y:B, xR_Fy, x:GB, \Gamma \Rightarrow \Delta, y:B}{xR_Fy, x:GB, \Gamma \Rightarrow \Delta, y:B} (LG2)}{x:GB, \Gamma \Rightarrow \Delta, x:GB} (RG).$$

在该推导中, 左上边的矢列式是公理; 右上边的矢列式根据归纳假设是可推导的.

定义6 设 x 和 y 为任意变量, 称 (y/x) 为 y 对 x 的替换. 项在一个替换下的值递归定义如下:

$$\begin{aligned} xRy(z/w) &= xRy, \text{ 如果 } w \neq x, w \neq y. & xRy(z/x) &= zRy, \text{ 如果 } x \neq y. \\ xRy(z/y) &= xRz, \text{ 如果 } x \neq y. & xRx(z/x) &= zRx. \\ x:A(z/y) &= x:A, \text{ 如果 } y \neq x. & x:A(z/x) &= z:A. \\ Nx(z/w) &= Nx, \text{ 如果 } w \neq x. & Nx(z/x) &= Nx. \end{aligned}$$

记号 $\Gamma(y/x) \Rightarrow \Delta(y/x)$ 表示替换 (y/x) 作用在 Γ 和 Δ 中所有的项上得到的矢列式.

引理9 如果 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta$, 那么 $\vdash_n \Gamma(y/x) \Rightarrow \Delta(y/x)$.

证明 对 n 归纳证明. 当 $n=0$ 时, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 是公理或者 L $\perp$ 的结论. 易证 $\Gamma(y/x) \Rightarrow \Delta(y/x)$ 是公理或 L $\perp$ 的结论. 设 $\vdash_{n+1} \Gamma \Rightarrow \Delta$, 即 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 有高度至多为 $n+1$ 的推导. 设推导的最后一步是 R. 当 R 是命题联结词规则或者关系规则时, 对 R 的前提运用归纳假设, 然后再运用 R 规则即得. 当 R 是没有特征变量的模态规则时, 证明类似. 设 R 是规则 (RG) (规则 (RH) 的情况类似). 分 3 种情况讨论.

(1) 替换 (y/x) 是一个空替换, 即 x 不在 Γ 和 Δ 中出现. 结论显然成立.

(2) 替换 (y/x) 中变量 x 和 y 不是规则 (RG) 中的特征变量. 例如

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta', Nx \quad xR_Fz, \Gamma \Rightarrow \Delta', z:A}{\Gamma \Rightarrow \Delta', x:GA} (RG),$$

变量 $z \notin \{x, y\}$ 不在 (RG) 结论中出现. 对 (RG) 前提用归纳假设得, $\Gamma(y/x) \Rightarrow \Delta'(y/x), Ny$ 和 $yR_Fz, \Gamma(y/x) \Rightarrow \Delta'(y/x), z:A$. 运用 (RG) 规则可得, $\Gamma(y/x) \Rightarrow \Delta'(y/x), y:GA$.

(3) 替换 (y/x) 中的变量 x 或 y 是规则 (RG) 的特征变量. 例如

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta', Nx \quad xR_Fy, \Gamma \Rightarrow \Delta', y:A}{\Gamma \Rightarrow \Delta', x:GA} (RG),$$

用替换 (w/y) 对矢列式 $xR_F y, \Gamma \Rightarrow \Delta', y : A$ 中的变量 y 进行替换, 其中 w 是新特征变量, 即 w 不在 Γ 和 Δ' 中出现且 $w \neq x, y$. 由归纳假设可得 $xR_F w, \Gamma \Rightarrow \Delta', w : A$ 可推导. 对 $\Gamma \Rightarrow \Delta', Nx$ 和 $xR_F w, \Gamma \Rightarrow \Delta', w : A$ 分别应用归纳假设, 再运用 (RG) 规则, 即可得证.

4 GC2t 中结构规则的证明

本节研究一些结构规则在系统 GC2t 中的可允许性质, 特别是要证明 GC2t 的切割消除定理. 一个加标矢列式规则 (R) 的形式是

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \dots, \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n}{\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0} (R),$$

它有 n 个前提和一个结论. 称规则 (R) 在 GC2t 中可允许, 如果假设 (R) 所有前提在 GC2t 中可推导, 那么 (R) 的结论在 GC2t 中也可推导. 称规则 (R) 保持高度可允许, 如果假设 (R) 的前提存在高度至多为 n 的推导, 那么 (R) 的结论也存在高度至多为 n 的推导. 称一个规则 (R) 是保持高度可逆的, 如果 (R) 的结论存在高度至多为 n 的推导, 那么 (R) 的前提也存在高度至多为 n 的推导. 在一个规则 (R) 的结论中, 一个项称为主项, 如果它是通过规则 (R) 引入的.

引理10 在系统 GC2t 中, 弱化规则

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{t, \Gamma \Rightarrow \Delta} (LW), \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, t} (RW),$$

保持高度可允许, 其中 t 为任意项. 这里 (LW) 和 (RW) 分别称为左弱化规则和右弱化规则.

证明 当 t 是关系原子或 Nx 的表达式时易证. 令 t 是加标公式 $x : A$. 首先证明 LW 在 GC2t 中保持高度可允许, 即证明: 如果 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta$, 那么 $\vdash_n x : A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ ((RW) 的证明类似). 对 n 归纳证明. 当 $n = 0$ 时, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 是公理或者 (L $\perp$) 的结论. 在两种情况下, $x : A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ 是公理或者 (L $\perp$) 的结论. 设 $\vdash_{n+1} \Gamma \Rightarrow \Delta$. 那么 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 有高度至多为 $n+1$ 的推导. 设推导的最后一个规则是 R. 分 3 种情况.

(1) R 是命题联结词规则或关系规则. 对 R 前提应用归纳假设, 再运用 R 规则, 即可得证.

(2) R 是没有特征变量的时序算子规则. 证明和 (1) 类似.

(3) R 是有特征变量的时序算子规则, 即 R 是 (RG) 或 (RH). 设 R 是 (RG) (R 是 (RH) 的情形与 RG 类似). 如果变量 x 不是 R 的特征变量, 那么证明与 (1) 类似. 如果 x 是 R 的特征变量, 例如

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta', Ny \quad yR_F x, \Gamma \Rightarrow \Delta', x : A}{\Gamma \Rightarrow \Delta', y : GA} (RG),$$

其中 x 是 (RG) 的特征变量. 选取一个新特征变量 w . 用 w 对 $yR_F x, \Gamma \Rightarrow \Delta', x : A$ 中的特征变量 x 进行替换. 根据引理 9, $yR_F w, \Gamma \Rightarrow \Delta', w : A$ 存在高度至多为 n 的推导. 由归纳假设得, $\vdash_n x : A, \Gamma \Rightarrow \Delta', Ny$ 并且 $\vdash_n x : A, yR_F w, \Gamma \Rightarrow \Delta', w : A$. 运用 (RG) 得, $\vdash_{n+1} x : A, \Gamma \Rightarrow \Delta', y : GA$.

引理11 系统 GC2t 的所有规则都是保持高度可逆的, 即如下成立:

- (1) 如果 $\vdash_n x : A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta$, 那么 $\vdash_n x : A, x : B, \Gamma \Rightarrow \Delta$;
- (2) 如果 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, x : A \wedge B$, 那么 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, x : A$ 并且 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, x : B$;
- (3) 如果 $\vdash_n x : A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta$, 那么 $\vdash_n x : A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ 并且 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, x : B$;
- (4) 如果 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, x : A \vee B$, 那么 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, x : A, x : B$;

- (5) 如果 $\vdash_n x : A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta$, 那么 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, x : A$ 并且 $\vdash_n x : B, \Gamma \Rightarrow \Delta$;
 (6) 如果 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, x : A \rightarrow B$, 那么 $\vdash_n x : A, \Gamma \Rightarrow \Delta, x : B$;
 (7) 如果 $\vdash_n x : GA, \Gamma \Rightarrow \Delta$, 那么 $\vdash_n Nx, x : GA, \Gamma \Rightarrow \Delta$;
 (8) 如果 $\vdash_n x : GA, xR_F y, \Gamma \Rightarrow \Delta$, 那么 $\vdash_n y : A, x : GA, xR_F y, \Gamma \Rightarrow \Delta$;
 (9) 如果 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, x : GA$, 那么 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, Nx$ 并且 $\vdash_n xR_F y, \Gamma \Rightarrow \Delta, y : A$;
 (10) 如果 $\vdash_n x : HA, \Gamma \Rightarrow \Delta$, 那么 $\vdash_n Nx, x : HA, \Gamma \Rightarrow \Delta$;
 (11) 如果 $\vdash_n x : HA, xR_P y, \Gamma \Rightarrow \Delta$, 那么 $\vdash_n y : A, x : HA, xR_P y, \Gamma \Rightarrow \Delta$;
 (12) 如果 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, x : HA$, 那么 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, Nx$ 并且 $\vdash_x R_P y, \Gamma \Rightarrow \Delta, y : A$;
 (13) 如果 $\vdash_n Nx, xR_P y, \Gamma \Rightarrow \Delta$, 那么 $\vdash_n Ny, yR_F x, Nx, xR_P y, \Gamma \Rightarrow \Delta$;
 (14) 如果 $\vdash_n Nx, xR_F y, \Gamma \Rightarrow \Delta$, 那么 $\vdash_n Ny, yR_P x, Nx, xR_F y, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

证明 关于 (1)~(6) 的证明可以参考文献 [13]. 根据弱化规则, 可直接得到 (7), (8), (10), (11), (13) 和 (14). 对 (9) 和 (12) 的证明类似. 这里只证 (9). 首先证明: 如果 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, x : GA$, 那么 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, Nx$. 对 n 进行归纳. 当 $n = 0$ 时, 设 $\vdash_0 \Gamma \Rightarrow \Delta, x : GA$. 那么 $\Gamma \Rightarrow \Delta, x : GA$ 是公理或者 (L $\perp$) 的结论. 如果 $\Gamma \Rightarrow \Delta, x : GA$ 是公理, 那么有两种情况: 情况 1: $\Gamma \Rightarrow \Delta, x : GA$ 是 $z : p, \Gamma' \Rightarrow \Delta', z : p, x : GA$, 其中 $z : p, \Gamma' = \Gamma$ 并且 $\Delta', z : p = \Delta$. 情况 2: $\Gamma \Rightarrow \Delta, x : GA$ 是 $Nz, \Gamma' \Rightarrow \Delta', Nz, x : GA$, 其中 $Nz, \Gamma' = \Gamma$ 并且 $\Delta', Nz = \Delta$. 显然, 在两种情况下, $\Gamma \Rightarrow \Delta, Nx$ 都是公理. 如果 $\Gamma \Rightarrow \Delta, x : GA$ 是 (L $\perp$) 的结论, 那么 $\Gamma \Rightarrow \Delta, x : GA$ 是 $z : \perp, \Gamma' \Rightarrow \Delta, x : GA$, 其中 $z : \perp, \Gamma' = \Gamma$. 显然 $\Gamma \Rightarrow \Delta, Nx$ 也是 (L $\perp$) 的结论. 假设 $\vdash_{n+1} \Gamma \Rightarrow \Delta, x : GA$. 那么 $\Gamma \Rightarrow \Delta, x : GA$ 有高度至多为 $n+1$ 的推导. 设该推导的最后一步是 R, 分两种情况: (1) $x : GA$ 不是 R 的主项. 那么对 R 的前提用归纳假设, 然后再用 R 即可得证. (2) $x : GA$ 是 R 的主项. 那么 R 是 (RG). 所以 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, Nx$. 因此 $\vdash_{n+1} \Gamma \Rightarrow \Delta, Nx$. 下面证明: 如果 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, x : GA$, 那么 $\vdash_n xR_F y, \Gamma \Rightarrow \Delta, y : A$. 对 n 进行归纳. 当 $n = 0$ 时, $\Gamma \Rightarrow \Delta, x : GA$ 是公理或者 L $\perp$ 的结论. 容易验证, $xR_F y, \Gamma \Rightarrow \Delta, y : A$ 是公理或者 L $\perp$ 的结论. 设 $\vdash_{n+1} \Gamma \Rightarrow \Delta, x : GA$, 那么 $\Gamma \Rightarrow \Delta, x : GA$ 有高度至多为 $n+1$ 的推导. 设该推导的最后一步是 R. 称 R 的结论中一个项 t 是 R 的主项, 如果 t 是通过规则 R 得到的. 分 3 种情况:

(1) 规则 R 中没有特征变量并且 $x : GA$ 不是 R 的主项. 易验证, 对规则 R 的前提运用归纳假设, 再运用规则 R 即可得证.

(2) 规则 R 有特征变量但是 $x : GA$ 不是 R 的主项, 即 R 是 (RG) 或 (RH). 选择新特征变量对原来的特征变量进行替换, 然后用归纳假设, 再运用 R 规则即可得证. 例如

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta', Nz, x : GA \quad zR_F y, \Gamma \Rightarrow \Delta', y : B, x : GA}{\Gamma \Rightarrow \Delta', z : GB, x : GA} \text{ (RG)},$$

选择新特征变量 w , 即 w 不在 Γ 和 Δ' 中出现且 $w \neq x, y, z$. 根据引理 9, $\vdash_n zR_F w, \Gamma \Rightarrow \Delta', w : B, x : GA$. 根据归纳假设, $\vdash_n xR_F y, \Gamma \Rightarrow \Delta', Nz, y : A$ 并且 $\vdash_n xR_F y, zR_F w, \Gamma \Rightarrow \Delta', w : B, y : A$. 运用 (RG) 规则可得, $\vdash_{n+1} xR_F y, \Gamma \Rightarrow \Delta', z : GB, y : A$.

(3) $x : GA$ 是 R 的主项, 即 R 是 (RG). 所以 $\vdash_n xR_F z, \Gamma \Rightarrow \Delta, z : A$, 其中 z 是特征变量. 由引理 9, $\vdash_n xR_F z(y/z), \Gamma(y/z) \Rightarrow \Delta(y/z), z : A(y/z)$, 即 $\vdash_n xR_F y, \Gamma \Rightarrow \Delta, y : A$. 所以 $\vdash_{n+1} xR_F y, \Gamma \Rightarrow \Delta, y : A$.

引理12 在 GC2t 中, 收缩规则

$$\frac{t, t, \Gamma \Rightarrow \Delta}{t, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (LC)}, \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, t, t}{\Gamma \Rightarrow \Delta, t} \text{ (RC)},$$

保持高度可允许, 其中 t 为任意项. 这里 (LC) 和 (RC) 分别称为左收缩规则和右收缩规则.

证明 当 t 是形如 xR_Fy 或者 xR_Py 或者 Nx 的表达式时易证. 令 t 是加标公式 $x:A$. 对收缩规则 LC 和 RC 同时归纳证明. 即证明: (i) 如果 $\vdash_n x:A, x:A, \Gamma \Rightarrow \Delta$, 那么 $\vdash_n x:A, \Gamma \Rightarrow \Delta$; (ii) 如果 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, x:A, x:A$, 那么 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, x:A$.

(i) 对 n 进行归纳. $n=0$ 时易证. 设 $\vdash_{n+1} x:A, x:A, \Gamma \Rightarrow \Delta$. 那么 $x:A, x:A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ 有高度至多为 $n+1$ 的推导. 设该推导最后一步是 R. 分情况讨论如下:

- $x:A$ 不是 R 的主项. 对规则 R 的前提应用归纳假设, 再运用 R 即可得证.
- 规则 R 是命题联结词规则并且 $x:A$ 是主项. 参考文献 [13] 中关于 G3cp 的收缩规则的证明.
- 规则 R 是 (LG1) 或 (LG2) 并且 $x:A$ 是主项. 设 R 是 (LG1) 并且 $A=GB$. 那么 $\vdash_n Nx, x:GB, x:GB, \Gamma \Rightarrow \Delta$. 根据归纳假设, $\vdash_n Nx, x:GB, \Gamma \Rightarrow \Delta$. 运用 (LG1) 规则可得 $\vdash_{n+1} x:GB, \Gamma \Rightarrow \Delta$. 设 R 是 (LG2) 并且 $A=GB$. 令 $\Gamma = xR_Fy, \Gamma'$. 那么 $\vdash_n y:B, x:GB, x:GB, xR_Fy, \Gamma' \Rightarrow \Delta$. 根据归纳假设可得, $\vdash_n y:B, x:GB, xR_Fy, \Gamma' \Rightarrow \Delta$. 运用规则 (LG2) 可得, $\vdash_{n+1} x:GB, xR_Fy, \Gamma' \Rightarrow \Delta$.
- 规则 R 是 (LH1) 或者 (LH2) 的情形与上面类似.

(ii) 设 $\vdash_{n+1} \Gamma \Rightarrow \Delta, x:A, x:A$, 那么 $\Gamma \Rightarrow, x:A, x:A$ 有高度至多为 $n+1$ 的推导. 设该推导的最后一步是 R. 分情况讨论如下:

- $x:A$ 在 R 中不是主项. 应用归纳假设与 R 的前提, 再应用 R 规则即可得证.
- R 是命题联结词规则并且 $x:A$ 是 R 的主项. 参考文献 [13] 中关于系统 G3cp 中收缩规则的证明.
- R 是 (RG) 或 (RH) 且 $x:A$ 在 R 中是主项. 当 R 是 (RG) 时, 设 $A=GB$. 那么 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, x:GB, Nx$ 且 $\vdash_n xR_Fy, \Gamma \Rightarrow \Delta, x:GB, y:B$, 其中 y 是特征变量. 根据 (RG) 的可逆性, $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, Nx, Nx$ 且 $\vdash_n xR_Fy, xR_Fy, \Gamma \Rightarrow \Delta, y:B, y:B$. 根据归纳假设可得 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, Nx$ 并且 $\vdash_n xR_Fy, \Gamma \Rightarrow \Delta, y:B$. 运用规则 (RG) 得 $\vdash_{n+1} \Gamma \Rightarrow \Delta, x:GB$, 即 $\vdash_{n+1} \Gamma \Rightarrow \Delta, x:A$. 当 R 是 (RH) 时, 证明类似.

定义7 切割规则是

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, t \quad t, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} (\text{Cut}),$$

其中 t 为任意项. 在一个推导中, 规则 (Cut) 每一次使用称为 (Cut) 的一个实例. 一个 (Cut) 实例的切割高度定义为该 (Cut) 实例中两个前提的推导高度之和.

定理2 (切割消除定理) 切割规则 (Cut) 在系统 GC2t 中可允许.

证明 当项 t 是形如 xR_Fy 或者 xR_Py 或者 Nx 的表达式时易证. 考虑项 t 是一个加标公式. 即证明: 对任意变量 x 和公式 A , 如果 $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, x:A$ 并且 $\vdash x:A, \Gamma'$, 那么 $\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$. 下面证明中会对 $x:A$ 中的公式 A 的复杂度和左右前提的推导高度同时归纳. 首先设 (Cut) 左右前提都是可推导的, 即 $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, x:A$ 并且 $\vdash x:A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$. 分情况讨论如下.

(1) 两个前提中至少有一个是公理或者 (L $\perp$) 的结论. 假设左前提 $\Gamma \Rightarrow \Delta, x:A$ 是公理或者 (L $\perp$) 的结论. 分 3 种子情况:

(1.1) $x:A$ 在 Γ 中. 由于 $\vdash x:A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$, 根据弱化规则可得 $\vdash \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$.

(1.2) Γ 和 Δ 有一个共同的项. 此时 $\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$ 是公理.

(1.3) $x:\perp$ 在 Γ 中. 此时 $\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$ 也是 (L $\perp$) 的结论. 假设右前提 $x:A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ 是公理或者 (L $\perp$) 的结论. 分 4 种子情况:

(1.3.1) $x:A$ 在 Δ' 中. 由于 $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, x:A$, 根据弱化规则可得 $\vdash \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$.

(1.3.2) Γ' 和 Δ' 有共同项. 那么 $\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$ 是公理.

(1.3.3) 某个项 $y:\perp$ 在 Γ' 中. 此时 $\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$ 是 (L $\perp$) 的结论.

(1.3.4) $x : A = x : \perp$. 对左前提的推导高度进行归纳. 如果左前提是公理或者 (L $\perp$) 的结论. 此时与 (1.1) 类似. 如果左前提是用规则得到的, 由于 $x : \perp$ 不是主项, 所以该规则只能是矢列式左边引入规则. 每一种情形易证, 参考文献 [13].

(2) 规则 (Cut) 的两个前提即不是公理, 也不是 (L $\perp$) 的结论. 设左前提推导的最后一步是 R1, 右前提推导的最后一步是 R2. 分情况讨论:

(2.1) 切割项 $x : A$ 在 R1 中不是主项. 对 R1 分情况证明. 如果 R1 是命题联结词规则或关系规则, 证明与系统 G3cp 的证明类似, 参考文献 [13].

(2.1.1) R1 是 (LG1). 设 $\Gamma = y : GB, \Gamma''$. 如下推导:

$$\frac{\frac{Ny, y : GB, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, x : A}{y : GB, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, x : A} (LG1) \quad x : A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{y : GB, \Gamma'', \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} (Cut),$$

变换为

$$\frac{\frac{Ny, y : GB, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, x : A \quad x : A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{Ny, y : GB, \Gamma'', \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} (Cut)}{y : GB, \Gamma'', \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} (LG1).$$

(2.1.2) R1 是 (LG2). 设 $\Gamma = y : GB, yR_F z, \Gamma$. 如下推导:

$$\frac{\frac{z : B, y : GB, yR_F z, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, x : A}{y : GB, yR_F z, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, x : A} (LG2) \quad x : A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{y : GB, yR_F z, \Gamma'', \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} (Cut),$$

变换为

$$\frac{\frac{z : B, y : GB, yR_F z, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, x : A \quad x : A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{z : B, y : GB, yR_F z, \Gamma'', \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} (Cut)}{y : GB, yR_F z, \Gamma'', \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} (LG2).$$

(2.1.3) R1 是 (RG). 设 $\Delta = y : GB, \Delta''$. 如下推导:

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta'', x : A, Ny \quad yR_F z, \Gamma \Rightarrow \Delta'', x : A, z : B}{\Gamma \Rightarrow \Delta'', y : GB, x : A} (RG) \quad x : A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta'', y : GB, \Delta'} (Cut),$$

变换为

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta'', x : A, Ny \quad x : A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta'', Ny, \Delta'} (Cut) \quad \frac{yR_F z, \Gamma \Rightarrow \Delta'', x : A, z : B \quad x : A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{yR_F z, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta'', z : B, \Delta'} (Cut)}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta'', \Delta', y : GB} (RG).$$

(2.2) 切割项 $x : A$ 在 R2 中不是主项.

(2.2.1) R2 是命题联结词或关系规则时, 证明类似, 参考文献 [13].

(2.2.2) R2 是 (LG1). 设 $\Gamma' = y : GB, \Gamma''$. 如下推导:

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : A \quad Ny, x : A, y : GB, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'}{x : A, y : GB, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'} (LG1)}{\Gamma, y : GB, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta'} (Cut),$$

变换为

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : A \quad Ny, x : A, y : GB, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, Ny, y : GB, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta'} (Cut)}{\Gamma, y : GB, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta'} (LG1).$$

(2.2.3) R2 是 (LG2). 设 $\Gamma' = y : GB, yR_F z, \Gamma''$. 如下推导:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : A \quad \frac{z : B, x : A, y : GB, yR_F z, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'}{x : A, y : GB, yR_F z, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'} \text{ (LG2)}}{\Gamma, y : GB, yR_F z, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{ (Cut)}$$

变换为

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : A \quad \frac{z : B, x : A, y : GB, yR_F z, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, z : B, y : GB, yR_F z, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{ (Cut)}}{\Gamma, y : GB, yR_F z, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{ (LG2)}$$

(2.2.4) R2 是 (RG). 设 $\Delta' = \Delta'', y : GB$. 如下推导:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : A \quad \frac{x : A, \Gamma' \Rightarrow \Delta', Ny \quad yR_F z, x : A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'', z : B}{x : A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'', y : GB} \text{ (RG)}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'', y : GB} \text{ (Cut)}$$

变换为

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : A \quad x : A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'', Ny}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'', Ny} \text{ (Cut)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : A \quad yR_F z, x : A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'', z : B}{\Gamma, yR_F z, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'', z : B} \text{ (Cut)}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'', y : GB} \text{ (RG)}$$

注意: 在右边的 (Cut) 中, 如果特征变量 z 与 Γ 和 Δ 中的变量冲突, 那么在切割之前, 先使用一个新特征变量 w 对 z 进行替换. 根据引理 9, 替换后的矢列式保持高度可推导. 变量 w 在切割后的结论中是特征变量.

(2.3) 切割项 $x : A$ 在 R1 和 R2 中都是主项. 公式 A 的主联结词是命题联结词时易证, 参考文献 [13]. 假设 A 的主联结词是时序算子 G 或 H . 因为 G 和 H 类似, 只证 $A = GB$ 的情形. 有两种子情况.

(2.3.1) R1 是 (RG), R2 是 (LG1). 如下推导:

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, Nx \quad xR_F y, \Gamma \Rightarrow \Delta, y : B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : GB} \text{ (RG)} \quad \frac{Nx, x : GA, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{x : GB, \Gamma' \Rightarrow \Delta'} \text{ (LG1)}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{ (Cut)}$$

变换为

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, Nx \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : GB \quad Nx, x : GB, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, Nx, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{ (Cut)}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{ (Cut)} \quad \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{ (C*)}$$

注意: 其中的 (C*) 表示收缩规则的多次运用.

(2.3.2) R1 是 (RG), R2 是 (LG2). 设 $\Gamma' = xR_F z, \Gamma''$. 推导如下:

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, Nx \quad xR_F y, \Gamma \Rightarrow \Delta, y : B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : GB} \text{ (RG)} \quad \frac{z : B, x : GA, xR_F z, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'}{x : GB, xR_F z, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'} \text{ (LG2)}}{\Gamma, xR_F z, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{ (Cut)}$$

用 (z/y) 对 $xR_F y, \Gamma \Rightarrow \Delta, y : B$ 进行替换. 因为 y 是特征变量, 所以替换不影响 Γ 和 Δ . 根据引理 9, 可得 $\vdash xR_F z, \Gamma \Rightarrow \Delta, z : B$. 构造如下一个新的推导:

$$\frac{\frac{xR_F z, \Gamma \Rightarrow \Delta, z : B \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : GB \quad z : B, x : GB, xR_F z, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, z : B, xR_F z, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{ (Cut)}}{\Gamma, xR_F z, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{ (Cut)} \quad \frac{xR_F z, \Gamma, \Gamma, xR_F z, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta, \Delta'}{\Gamma, xR_F z, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{ (C*)}$$

其中 (C*) 表示收缩规则的多次使用.

5 GC2t 的可靠性和完全性

设 $\mathcal{M} = (W, N, R_F, R_P, V)$ 是正则模型. 设 $L : X \rightarrow W$ 是从标记集 X 到 W 的函数. 称 $\mathcal{M}' = (\mathcal{M}, L)$ 是正则模型 $\mathcal{M}$ 的加标扩张. 对任意正则模型 $\mathcal{M}$, 一个项 t 在 $\mathcal{M}$ 的加标扩张 $\mathcal{M}'$ 上的满足关系定义如下:

- (1) $\mathcal{M}', L \models xR_F y$ 当且仅当 $L(x)R_F L(y)$;
- (2) $\mathcal{M}', L \models xR_P y$ 当且仅当 $L(x)R_P L(y)$;
- (3) $\mathcal{M}', L \models Nx$ 当且仅当 $L(x) \in N$;
- (4) $\mathcal{M}', L \models x : A$ 当且仅当 $\mathcal{M}, L(x) \models A$.

一个矢列式 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 $\mathcal{M}'$ 上可满足 (记号 $\mathcal{M}' \models \Gamma \Rightarrow \Delta$), 如果 $\mathcal{M}'$ 满足 Γ 中所有的项蕴涵 $\mathcal{M}'$ 满足 Δ 中的某一项. 称 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 有效 (记号 $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$), 如果对任意正则模型 $\mathcal{M}$ 都有 $\mathcal{M}' \models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

引理13 $\models \Rightarrow x : A$ 当且仅当 $\models_{\text{RF}} A$.

证明 根据有效性的定义易证.

引理14 如果 $\vdash_{\text{GC2t}} \Gamma \Rightarrow \Delta$, 那么 $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

证明 只需证明系统 GC2t 的公理都是有效的, 所有的规则都保持有效性. 证明细节略.

引理15 下列规则在系统 GC2t 中可允许:

$$\begin{array}{c} \frac{xR_F y, y : A, x : FA, Nx, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x : FA, Nx, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (LF)}, \quad \frac{Nx, \Gamma \Rightarrow \Delta, x : FA}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : FA} \text{ (RF1)}, \\ \frac{Nx, \Gamma \Rightarrow \Delta, xR_F y}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : FA} \quad \frac{Nx, \Gamma \Rightarrow \Delta, y : A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : FA} \text{ (RF2)}, \\ \frac{xR_P y, y : A, x : PA, Nx, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x : PA, Nx, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (LP)}, \quad \frac{Nx, \Gamma \Rightarrow \Delta, x : PA}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : PA} \text{ (RP1)}, \\ \frac{Nx, \Gamma \Rightarrow \Delta, xR_P y}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : PA} \quad \frac{Nx, \Gamma \Rightarrow \Delta, y : A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : PA} \text{ (RP2)}, \\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : A}{x : \neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (L}\perp\text{)}, \quad \frac{x : A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : \neg A} \text{ (R}\neg\text{)}, \quad \frac{}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : \top} \text{ (R}\top\text{)}.\end{array}$$

注意: 在规则 (LF) 和 (LP) 中, 变量 y 是特征变量.

证明 根据联结词的定义易证. 证明细节略.

引理16 $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow x : G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$ 并且 $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow x : H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$.

证明 只证第 1 个矢列式. 第 2 个类似. 令 $\Gamma = xR_F y, Nx, x : G(A \rightarrow B), x : GA$. 推导如下:

$$\begin{array}{c} \frac{y : A, \Gamma \Rightarrow y : B, y : A \quad y : B, y : A, \Gamma \Rightarrow y : B}{y : A \rightarrow B, y : A, \Gamma \Rightarrow y : B} \text{ (L}\rightarrow\text{)} \\ \frac{}{y : A, \Gamma \Rightarrow y : B} \text{ (LG2)} \\ \frac{Nx, x : G(A \rightarrow B), x : GA \Rightarrow Nx}{\frac{Nx, x : G(A \rightarrow B), x : GA \Rightarrow x : GB}{x : G(A \rightarrow B), x : GA \Rightarrow x : GB} \text{ (LG1)} \quad \frac{x : G(A \rightarrow B), x : GA \Rightarrow x : GB}{x : G(A \rightarrow B) \Rightarrow x : (GA \rightarrow GB)} \text{ (R}\rightarrow\text{)} \quad \frac{x : G(A \rightarrow B) \Rightarrow x : (GA \rightarrow GB)}{\Rightarrow x : G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)} \text{ (R}\rightarrow\text{)}} \text{ (RG)}\end{array}$$

引理17 $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow x : G\top \rightarrow (A \rightarrow GPA)$ 并且 $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow x : H\top \rightarrow (A \rightarrow HFA)$.

证明 下面只给出第 1 个矢列式的推导. 第 2 个类似. 令 $\Gamma = xR_Fy, Nx, x : G\top, x : A$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{Nx, yR_Px, Ny, \Gamma \Rightarrow yR_Px \quad Ny, yR_Px, Ny, \Gamma \Rightarrow x : A}{yR_Px, Ny, \Gamma \Rightarrow y : PA} \text{(RP2)} \\
 \frac{yR_Px, Ny, \Gamma \Rightarrow y : PA}{Ny, \Gamma \Rightarrow y : PA} \text{(R}_F\text{)} \\
 \frac{Nx, x : G\top, x : A \Rightarrow Nx \quad Ny, \Gamma \Rightarrow y : PA}{\Gamma \Rightarrow y : PA} \text{(RP1)} \\
 \frac{Nx, x : G\top, x : A \Rightarrow Nx \quad \Gamma \Rightarrow y : PA}{Nx, x : G\top, x : A \Rightarrow x : GPA} \text{(RG)} \\
 \frac{x : G\top, x : A \Rightarrow x : GPA}{x : G\top \Rightarrow x : (A \rightarrow GPA)} \text{(LG1)} \\
 \frac{x : G\top \Rightarrow x : (A \rightarrow GPA)}{\Rightarrow x : G\top \rightarrow x : (A \rightarrow GPA)} \text{(R}\rightarrow\text{)}
 \end{array}$$

引理18 $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow x : G\top \leftrightarrow H\top$.

证明 根据定义, $\Rightarrow x : G\top \leftrightarrow H\top$ 是 $\Rightarrow x : (G\top \rightarrow H\top) \wedge (H\top \rightarrow G\top)$ 的缩写. 只需证 $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow x : G\top \rightarrow H\top$ 并且 $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow x : H\top \rightarrow G\top$. 下面给出第 1 个矢列式的证明. 第 2 个证明类似.

$$\begin{array}{c}
 \frac{Nx, x : G\top \Rightarrow Nx \quad xR_Py, Nx, x : G\top \Rightarrow y : \top}{Nx, x : G\top \Rightarrow x : H\top} \text{(RH)} \\
 \frac{Nx, x : G\top \Rightarrow x : H\top}{x : G\top \Rightarrow x : H\top} \text{(LG1)} \\
 \frac{x : G\top \Rightarrow x : H\top}{\Rightarrow x : G\top \rightarrow H\top} \text{(R}\rightarrow\text{)}
 \end{array}$$

引理19 如果 $\vdash_{\text{GC2t}} x : A \rightarrow B$, 那么 $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow x : GA \rightarrow GB$.

证明 设 $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow x : A \rightarrow B$. 根据引理 9, 有 $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow y : A \rightarrow B$, 其中 $y \neq x$. 根据规则的可逆性可得, $\vdash_{\text{GC2t}} y : A \Rightarrow y : B$. 构造 $\Rightarrow x : GA \rightarrow GB$ 的推导如下:

$$\begin{array}{c}
 \frac{y : A \Rightarrow y : B}{y : A, xR_Fy, Nx, x : GA \Rightarrow y : B} \text{(W*)} \\
 \frac{Nx, x : GA \Rightarrow Nx \quad y : A, xR_Fy, Nx, x : GA \Rightarrow y : B}{xR_Fy, Nx, x : GA \Rightarrow y : B} \text{(LG2)} \\
 \frac{Nx, x : GA \Rightarrow Nx \quad xR_Fy, Nx, x : GA \Rightarrow y : B}{Nx, x : GA \Rightarrow x : GB} \text{(RG)} \\
 \frac{Nx, x : GA \Rightarrow x : GB}{x : GA \Rightarrow x : GB} \text{(LG1)} \\
 \frac{x : GA \Rightarrow x : GB}{\Rightarrow x : GA \rightarrow GB} \text{(R}\rightarrow\text{)}
 \end{array}$$

其中 (W*) 表示弱化规则的多次使用.

引理20 如果 $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow x : A \rightarrow B$, 那么 $\vdash_{\text{GC2t}} x : HA \rightarrow HB$.

证明 与引理 19 证明类似.

引理21 如果 $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow x : A$ 并且 $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow x : A \rightarrow B$, 那么 $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow x : B$.

证明 设 $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow x : A$ 并且 $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow x : A \rightarrow B$. 由规则的可逆性得, $\vdash_{\text{GC2t}} x : A \Rightarrow x : B$. 由切割规则得, $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow x : B$.

定理3 如果 $\vdash_{\text{HC2t}} A$, 那么 $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow x : A$.

证明 对公式 A 的证明长度进行归纳. 根据引理 16~21 可得.

定理4 (完全性) 对任意变量 x 和公式 A , 如果 $\models \Rightarrow x : A$, 那么 $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow x : A$.

证明 设 $\models \Rightarrow x : A$. 由引理 13 得, $\models A$. 由系统 HC2t 的完全性得, $\vdash_{\text{HC2t}} A$. 由定理 3 得, $\vdash_{\text{GC2t}} \Rightarrow x : A$.

6 GC2t 中推导的可判定性和证明搜索

前面证明了 GC2t 系统的切割消除定理和完全性. 这说明系统 GC2t 是非正规时序逻辑 C2t 的系统. 现在来看这个系统中可推导性的判定问题.

定理5 (可判定性) 任意矢列式 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在系统 GC2t 中可推导性是可判定的.

证明 只要证明以 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 结尾的有穷推导树状图只有有穷多个. 从 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 开始进行证明搜索, 写下所有能得到的 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的规则实例. 以此类推, 每次都对最后一个规则的前提写下所有的能够得到该前提的规则实例. 在所有的规则中, 除了时序算子规则 (LG1)、(LG2)、(LH1)、(LH2) 以外, 其他规则中出现的公式的复杂度都在减少. 如果在证明搜索过程中, 一个矢列式不能用除了弱化规则以外的任何规则得到, 如果它不是公理或规则 (L $\perp$) 的结论, 那么终止证明搜索; 如果在证明搜索中, 运用 4 条规则 (LG1)、(LG2)、(LH1)、(LH2) 之一, 得到相同的矢列式 (出现规则的循环使用), 也停止证明搜索. 这 4 条规则应用只会产生有穷多个前提. 因此, 每个证明搜索树结构都会停止. 当矢列式 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的证明搜索终止时, 如果存在一个推导树, 它所有叶节点都是公理或 (L $\perp$) 的结论, 那么它可推导; 否则, 它不可推导.

在证明可判定性的过程中, 实际上描述了一个证明搜索算法. 根据这个算法, 从任何矢列式 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 出发, 都可以判定它是否是可证的. 例如, 矢列式 $\Rightarrow x : GT$ 不可推导. 按证明搜索算法, 从 $\Rightarrow x : GT$ 出发, 能够得到它的规则有两种情况: (1) $\Rightarrow x : GT$ 是通过弱化规则 (RW) 从矢列式 $\Rightarrow$ 得到的. 此时证明搜索停止, 但 $\Rightarrow$ 不是公理, 也不是规则 (L $\perp$) 的结论. (2) $\Rightarrow x : GT$ 是通过规则 (RG) 从 $\Rightarrow Nx$ 和 $xR_Fy \Rightarrow y : \top$ 得到的. 继续进行证明搜索. 对于 $\Rightarrow Nx$, 它只能通过弱化规则 (RW) 从 $\Rightarrow$ 得到. 因此 $\Rightarrow Nx$ 是不可推导的. 所以 $\Rightarrow x : GT$ 不可推导. 根据矢列式 $\Rightarrow x : GT$ 不可推导可知, GT 在系统 HC2t 中不可证.

参考文献

- 1 Pnueli A. The temporal logic of programs. In: Proceedings of the 18th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, Providence, 1977. 46–67
- 2 Øhrstrøm P, Hasle P. Temporal Logic: From Ancient Ideas to Artificial Intelligence. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. 334–365
- 3 He P, Tang Z S. NL: a loose natural deduction system of temporal logic. J Softw, 1993, 4: 51–55 [何锴, 唐稚松. NL: 松弛时序逻辑自然推理系统. 软件学报, 1993, 4: 51–55]
- 4 Ben K R, Chen H W, Wang B S. PTL sequent calculus system. Sci China Ser A, 1994, 24: 1092–1098 [贲可荣, 陈火旺, 王兵山. 命题时态逻辑矢列式演算系统. 中国科学 A 辑, 1994, 24: 1092–1098]
- 5 Clark E M, Emerson E A. Design and synthesis of synchronization skeletons using branching time temporal logic. In: Kozen D, ed. Logic of Programs, LNCS 131. Berlin: Springer-Verlag, 1982. 52–71
- 6 Burgess J. Basic tense logic. In: Gabbay D M, Guenther F, eds. Handbook of Philosophical Logic (Volume 2). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1984. 89–133
- 7 Hodkinson I, Reynolds M. Temporal logic. In: Blackburn P, Bentham J V, Wolter F, eds. Handbook of Modal Logic. Amsterdam: Elsevier, 2007. 655–720
- 8 Blackburn P, Rijke M, Venema Y. Modal Logic. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 190–259
- 9 Lemmon E J. Algebraic semantics for modal logics. I. J Symb Logic, 1966, 31: 46–65
- 10 Negri S. Proof analysis in modal logic. J Philos Logic, 2005, 34: 507–544
- 11 Bonnette N, Goré R. A labelled sequent system for tense logic Kt. In: Antoniou G, Slaney J, eds. Advanced Topics in Artificial Intelligence: 11th Australian Joint Conference on Artificial Intelligence. Berlin: Springer, 1998. 71–82
- 12 Kracht M. Power and weakness of the modal display calculus. In: Wansing H, eds. Proof Theory of Modal Logic. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. 93–121
- 13 Negri S, Plato J. Structural Proof Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 47–60

Sequent calculus for minimal non-normal temporal logic

Minghui MA¹, Shanxia WANG^{1,3} & Huiwen DENG^{1,2*}

1. *Institute for Logic and Intelligence, Southwest University, Chongqing 400715, China;*

2. *School of Computer and Information Science, Southwest University, Chongqing 400715, China;*

3. *School of Computer and Information Engineering, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China*

*Corresponding author. E-mail: huiwend@swu.edu.cn

Abstract The minimal non-normal modal logic C2 is temporalized, and the minimal non-normal temporal logic C2t is obtained. The Hilbert-style axiomatic system HC2t, which is sound and complete, is established for C2t. The logic C2t is more general than the minimal temporal logic Kt. The proof theory of C2t is approached by introducing the labelled sequent calculus GC2t. The calculus GC2t is sound and complete, and involves cut elimination. The decidability of GC2t is obtained, and the proof search can be performed in GC2t.

Keywords non-normal temporal logic, axiomatic system, sequent calculus, completeness, decidability

Minghui MA was born in 1984. He obtained his Ph.D. degree in logic from Tsinghua University, Beijing, in 2011. Currently, he is an associate professor at Southwest University. His research interests include modal logic, logic in computer science, algebraic logic, and proof theory.

Shanxia WANG was born in 1980. Currently, he is a Ph.D. candidate at the Institute of Logic and Intelligence, Southwest University, Chongqing. His research interests include modal logic and logic in computer science.

Huiwen DENG was born in 1964. He obtained a Ph.D. degree in Mathematics from Sichuan University, Chengdu, in 1998. Currently, he is a professor and a doctoral supervisor at the School of Computer and Information Science, Southwest University, Chongqing. His present research interests include modern logic, cryptographic protocol analysis, and computational intelligence.