超材料电磁波有限元模拟中的相关问题

献给林群教授 80 华诞

黄云清^①, 李继春^{②*}

^① 湘潭大学数学与计算科学学院, 湘潭 411105;

^② Department of Mathematical Sciences, University of Nevada Las Vegas, Las Vegas 89154-4020, USA

E-mail: huangyq@xtu.edu.cn, jichun@unlv.nevada.edu

收稿日期: 2014-09-02; 接受日期: 2014-11-26; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11271310 和 11031006) 资助项目

摘要 超材料是指一种人工合成的纳米电磁材料, 它的介电常数和磁导率对某些波频段会同时为负, 从而导致其折射率为负. 超材料研究的兴起始于 2000 年, 在过去的十多年一直是多个学科的研究热点. 本文侧重介绍电磁波在超材料中传播所涉及的模型方程以及如何用有限元方法求解. 本文是对过去十年来计算数学在此领域工作的一个总结. 最后提出一些值得继续探讨的问题.

关键词 超材料 Maxwell 方程 有限元

MSC (2010) 主题分类 65N30, 35L15, 78-08

1 超材料简介

超材料是指一种人工合成的具有独特性质的电磁材料. 这里关心的是介电常数 ϵ 和磁导率 μ 同时为负的新型电磁材料. 超材料首次由物理学家 Smith 等人^[1] 在 2000 年成功合成制造. 他们的材料由两部分组成, 一部分是由无数方型铜分裂环协振器组成的, 另一部分是由嵌在光纤玻璃板上的圆型铜线组成的. 仔细设计分裂环的宽度和间距等可导致很强的磁共振, 从而导致对某些波频率 μ 为负. 仔细调节铜线的间距和半径可导致对某些波频率 ϵ 为负. 若能使 μ 和 ϵ 对某些波频率同时为负, 我们就得到了双负超材料. 值得指出的是, 双负超材料的研究始于 1968 年苏联物理学家 Veselago^[2]. 在这篇重要的文献中, 他首先指出了 ϵ 和 μ 同时为负会导致折射率 $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ 为负, 并且波在这种材料中传播时是朝着波源方向传播的 (注意在普通介质中, 波是从波源向外传播的), 即波在超材料中是反向传播的. 遗憾的是, Veselago 的工作一直到 2000 年 Smith 等人成功构造出这种超材料才被引起关注, 原因是自然界不存在这种天然物质. 随后, 在 2001 年, 这种双负超材料的有效折射率被物理实验证实为负 (参见文献 [3]). 另一促进超材料被广泛研究的动力来自于 Pendry 的用超材料构造完美聚焦镜的文献 [4]. 按照 Solymar 和 Shamoina 的说法 (参见文献 [5, 第 317 页]), 这 4 篇奠基性文献造就了超材料这门新型子学科.

从 2000 年起, 超材料的奇异特性一直吸引着各个学科的研究者加入到超材料研发与应用的队伍中. 短短十多年, 超材料的研究进展迅猛, 性能越来越好的超材料不断推出, 应用波段覆盖射频、微波、

太赫兹波、远红外和近红外等共横跨 8 个数量级. 潜在的应用范围涉及电子产品、电信、传感、雷达、纳米光刻技术、具有超级分辨率的医疗成像、数据存储、电磁波和声波隐形装置, 详细资料可参见文献 [6–8], 下面将侧重介绍超材料电磁场有限元模拟涉及的一些最新进展和存在的相关问题. 更多细节可参见近期专著 [9].

2 超材料电磁场模拟中的控制方程

为描述电磁波传播, 我们要求解 Maxwell 方程组

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

其中 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ 和 $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ 分别为电场和磁场强度, $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ 和 $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ 分别为电和磁流量密度. 假设时域变量 $u(\mathbf{x}, t)$ 和频域变量 $\hat{u}(\mathbf{x})$ 满足关系式

$$u(\mathbf{x}, t) = \hat{u}(\mathbf{x})e^{i\omega t}. \quad (2.3)$$

将 (2.3) 代入 (2.1) 和 (2.2), 我们得到频域上的 Maxwell 方程组

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = -i\omega \hat{\mathbf{B}}, \quad \nabla \times \hat{\mathbf{H}} = i\omega \hat{\mathbf{D}}. \quad (2.4)$$

考虑线性电磁材料, 变量 $\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{D}}$ 和 $\hat{\mathbf{B}}$ 须满足本构方程

$$\hat{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{P}} \equiv \epsilon \hat{\mathbf{E}}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \mu_0 \hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{M}} \equiv \mu \hat{\mathbf{H}}, \quad (2.5)$$

其中 $\hat{\mathbf{P}}$ 和 $\hat{\mathbf{M}}$ 分别为诱导的电极化和磁化场, ϵ_0 和 μ_0 分别为空气中的介电常数和磁导率.

描述超材料常用的模型有 Drude 模型和 Lorentz 模型. 在频域空间, Drude 模型可表示为

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - i\Gamma_e)} \right), \quad (2.6)$$

$$\mu(\omega) = \mu_0 \mu_r = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_{pm}^2}{\omega(\omega - i\Gamma_m)} \right), \quad (2.7)$$

其中 ω_{pe} 和 ω_{pm} 分别为电和磁等离子频率, Γ_e 和 Γ_m 分别为电和磁耗散频率, ω 为入射波频率. 选取 $\Gamma_e = \Gamma_m = 0$, $\omega_{pe} = \omega_{pm} = \sqrt{2}\omega$, 我们可得到负折射率 $n = -\sqrt{\epsilon_r \mu_r} = -1$.

将 (2.6) 代入到 $\hat{\mathbf{P}} = (\epsilon - \epsilon_0)\hat{\mathbf{E}}$, 得到 $-(\omega^2 - i\omega\Gamma_e)\hat{\mathbf{P}} = \epsilon_0\omega_{pe}^2\hat{\mathbf{E}}$, 转化到时域空间, 此方程可写为

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \Gamma_e \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \epsilon_0\omega_{pe}^2 \mathbf{E}. \quad (2.8)$$

类似地, 将 (2.7) 代入到 $\hat{\mathbf{M}} = (\mu - \mu_0)\hat{\mathbf{H}}$, 我们可得

$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2} + \Gamma_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \mu_0\omega_{pm}^2 \mathbf{H}. \quad (2.9)$$

为方便数学处理, 我们引进所谓的诱导电、磁流 $\mathbf{J}$ 和 $\mathbf{K}$ 如下:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad \mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}. \quad (2.10)$$

将 (2.10) 代入 (2.8) 和 (2.9), 我们最终得到用 Drude 模型描述电磁波在超材料中传播的控制方程组为

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}, \quad (2.11)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{K}, \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{\Gamma_e}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \mathbf{J} = \mathbf{E}, \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{\mu_0 \omega_{pm}^2} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} + \frac{\Gamma_m}{\mu_0 \omega_{pm}^2} \mathbf{K} = \mathbf{H}. \quad (2.14)$$

为保证方程组 (2.11)–(2.14) 的完备性, 我们进一步假设 (2.11)–(2.14) 满足初始条件

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{J}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{K}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{K}_0(\mathbf{x}),$$

及 PEC (perfectly conducting boundary condition) 边界条件

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \quad (2.15)$$

另一著名的模型是 Lorentz 模型, 在频域中可表示为

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{e0}^2 - j\Gamma_e \omega} \right), \quad \mu(\omega) = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_{pm}^2}{\omega^2 - \omega_{m0}^2 - j\Gamma_m \omega} \right), \quad (2.16)$$

其中 $\omega_{pe}, \omega_{pm}, \Gamma_e$ 和 Γ_m 均与 Drude 模型一样, ω_{e0} 和 ω_{m0} 分别为电和磁共振频率. 经以上同样变化, 我们可得, 用 Lorentz 模型描述电磁波在超材料中传播的控制方程组为

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}, \quad (2.17)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{K}, \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{\Gamma_e}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \mathbf{J} = \mathbf{E} - \frac{\omega_{e0}^2}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \mathbf{P}, \quad (2.19)$$

$$\frac{\omega_{e0}^2}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\omega_{e0}^2}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \mathbf{J}, \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{\mu_0 \omega_{pm}^2} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} + \frac{\Gamma_m}{\mu_0 \omega_{pm}^2} \mathbf{K} = \mathbf{H} - \frac{\omega_{m0}^2}{\mu_0 \omega_{pm}^2} \mathbf{M}, \quad (2.21)$$

$$\frac{\omega_{m0}^2}{\mu_0 \omega_{pm}^2} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \frac{\omega_{m0}^2}{\mu_0 \omega_{pm}^2} \mathbf{K}. \quad (2.22)$$

注意, 为数学分析方便, 我们特将方程 (2.20) 和 (2.22) 写成如此形式.

同样地, 为保证 (2.17)–(2.22) 的完备性, 我们进一步假设 (2.17)–(2.22) 满足初始条件

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{J}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{P}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{P}_0(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{K}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{K}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{M}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{M}_0(\mathbf{x}),$$

及 PEC 边界条件 (2.15).

利用 Laplace 变换, 我们可证明 Drude 模型 (2.11)–(2.14) 和 Lorentz 模型 (2.17)–(2.22) 存在唯一解 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \in H_0(\text{curl}; \Omega)$ 和 $\mathbf{H} \in H(\text{curl}; \Omega)$, 其中 Sobolev 空间

$$H(\text{curl}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^3 : \nabla \times \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^3\},$$

$$H_0(\text{curl}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in H(\text{curl}; \Omega) : \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}\},$$

并赋予范数 $\|\mathbf{u}\|_{H(\text{curl}; \Omega)} = (\|\mathbf{u}\|_0^2 + \|\nabla \times \mathbf{u}\|_0^2)^{1/2}$, 这里 $\|\cdot\|_0$ 表示通常的 L_2 范数, $\nabla \times$ 为旋度算子.

将方程 (2.11)–(2.14) 分别乘以 $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$, 并在 Ω 上积分, 利用分步积分公式及 PEC 边界条件, 我们很容易得到如下的稳定性估计.

定理 1 模型方程 (2.11)–(2.15) 的解 $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ 满足以下估计:

$$\begin{aligned} & \epsilon_0 \|\mathbf{E}(t)\|_0^2 + \mu_0 \|\mathbf{H}(t)\|_0^2 + \frac{1}{\mu_0 \omega_{pm}^2} \|\mathbf{K}(t)\|_0^2 + \frac{1}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \|\mathbf{J}(t)\|_0^2 \\ & \leq \epsilon_0 \|\mathbf{E}(0)\|_0^2 + \mu_0 \|\mathbf{H}(0)\|_0^2 + \frac{1}{\mu_0 \omega_{pm}^2} \|\mathbf{K}(0)\|_0^2 + \frac{1}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \|\mathbf{J}(0)\|_0^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

类似地, 将方程 (2.17)–(2.22) 分别乘以 $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{J}, \mathbf{P}, \mathbf{K}, \mathbf{M}$, 然后在 Ω 上积分, 我们很容易得到如下的稳定性估计.

定理 2 模型方程 (2.17)–(2.22) 的解 $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathbf{P}, \mathbf{M})$ 满足以下估计:

$$\begin{aligned} & \epsilon_0 \|\mathbf{E}(t)\|_0^2 + \mu_0 \|\mathbf{H}(t)\|_0^2 + \frac{1}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \|\mathbf{J}(t)\|_0^2 + \frac{1}{\mu_0 \omega_{pm}^2} \|\mathbf{K}(t)\|_0^2 + \frac{\omega_{e0}^2}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \|\mathbf{P}(t)\|_0^2 + \frac{\omega_{m0}^2}{\mu_0 \omega_{pm}^2} \|\mathbf{M}(t)\|_0^2 \\ & \leq \epsilon_0 \|\mathbf{E}(0)\|_0^2 + \mu_0 \|\mathbf{H}(0)\|_0^2 + \frac{1}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \|\mathbf{J}(0)\|_0^2 + \frac{1}{\mu_0 \omega_{pm}^2} \|\mathbf{K}(0)\|_0^2 + \frac{\omega_{e0}^2}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \|\mathbf{P}(0)\|_0^2 + \frac{\omega_{m0}^2}{\mu_0 \omega_{pm}^2} \|\mathbf{M}(0)\|_0^2. \end{aligned}$$

3 数值方法及反向波模拟

3.1 几个基本有限元格式

为构造有限元格式, 我们假设区域 Ω 可用一族正规四面体 (或立方块) 网格 T_h 剖分, 网格大小记为 h . 取决于解的正则性, 我们可用适当的面和棱有限元. 四面体网格的面和棱有限元空间可取为, 对任意整数 $l \geq 1$,

$$\mathbf{U}_h = \{\mathbf{u}_h \in H(\text{div}; \Omega) : \mathbf{u}_h|_K \in (p_{l-1})^3 \oplus \tilde{p}_{l-1} \mathbf{x}, \forall K \in T_h\}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v}_h \in H(\text{curl}; \Omega) : \mathbf{v}_h|_K \in (p_{l-1})^3 \oplus S_l, \forall K \in T_h\}, \quad (3.2)$$

其中 $S_l = \{\tilde{\mathbf{p}} \in (\tilde{p}_l)^3, \mathbf{x} \cdot \tilde{\mathbf{p}} = 0\}$. 而立方块网格上的面和棱单元空间可取为

$$\mathbf{U}_h = \{\mathbf{u}_h \in H(\text{div}; \Omega) : \mathbf{u}_h|_K \in Q_{l,l-1,l-1} \times Q_{l-1,l,l-1} \times Q_{l-1,l-1,l}, \forall K \in T_h\},$$

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v}_h \in H(\text{curl}; \Omega) : \mathbf{v}_h|_K \in Q_{l-1,l,l} \times Q_{l,l-1,l} \times Q_{l,l,l-1}, \forall K \in T_h\}.$$

与通常记号一样, $\tilde{p}_k$ 表示 k 次齐次多项式空间, $Q_{i,j,k}$ 表示关于变量 x, y, z 分别为小于或等于 i, j, k 次的多项式空间. 为强加边界条件 $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$, 我们引进 $\mathbf{V}_h$ 的子空间 $\mathbf{V}_h^0 = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h : \mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}\}$.

首先, 对 Drude 模型 (2.11)–(2.15) 构造一个 Crank-Nicolson 混合有限元格式, 对任意 $k = 1, 2, \dots, M$, 求解 $\mathbf{E}_h^k \in \mathbf{V}_h^0$, $\mathbf{J}_h^k \in \mathbf{V}_h$, $\mathbf{H}_h^k, \mathbf{K}_h^k \in \mathbf{U}_h$ 以使

$$\epsilon_0(\delta_\tau \mathbf{E}_h^k, \phi_h) - (\overline{\mathbf{H}}_h^k, \nabla \times \phi_h) + (\overline{\mathbf{J}}_h^k, \phi_h) = 0, \quad (3.3)$$

$$\mu_0(\delta_\tau \mathbf{H}_h^k, \psi_h) + (\nabla \times \overline{\mathbf{E}}_h^k, \psi_h) + (\overline{\mathbf{K}}_h^k, \psi_h) = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2}(\delta_\tau \mathbf{J}_h^k, \tilde{\phi}_h) + \frac{\Gamma_e}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2}(\overline{\mathbf{J}}_h^k, \tilde{\phi}_h) = (\overline{\mathbf{E}}_h^k, \tilde{\phi}_h), \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{\mu_0 \omega_{pm}^2} (\delta_\tau \mathbf{K}_h^k, \tilde{\psi}_h) + \frac{\Gamma_m}{\mu_0 \omega_{pm}^2} (\bar{\mathbf{K}}_h^k, \tilde{\psi}_h) = (\bar{\mathbf{H}}_h^k, \tilde{\psi}_h), \quad (3.6)$$

对任意 $\phi_h \in \mathbf{V}_h^0$, $\psi_h \in \mathbf{U}_h$, $\tilde{\phi}_h \in \mathbf{V}_h$, $\tilde{\psi}_h \in \mathbf{U}_h$ 都成立, 并满足初始逼近

$$\mathbf{E}_h^0(\mathbf{x}) = \Pi_h \mathbf{E}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{H}_h^0(\mathbf{x}) = P_h \mathbf{H}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{J}_h^0(\mathbf{x}) = \Pi_h \mathbf{J}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{K}_h^0(\mathbf{x}) = P_h \mathbf{K}_0(\mathbf{x}),$$

其中 P_h 为到 $\mathbf{U}_h$ 空间的 L^2 投影算子, Π_h 为 $\mathbf{V}_h$ 空间上的 Nédélec 插值算子. 同时引进了 $k + \frac{1}{2}$ 时间层的中心和平均算子: 设 τ 为时间步长, $\delta_\tau u^k = (u^k - u^{k-1})/\tau$, $\bar{u}^k = (u^k + u^{k-1})/2$.

首先可见, (3.5) 和 (3.6) 等价于

$$\mathbf{J}_h^k = \frac{\epsilon_0 \omega_{pe}^2}{2\tau^{-1} + \Gamma_e} (\mathbf{E}_h^k + \mathbf{E}_h^{k-1}) + \frac{2\tau^{-1} - \Gamma_e}{2\tau^{-1} + \Gamma_e} \mathbf{J}_h^{k-1}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{K}_h^k = \frac{\mu_0 \omega_{pm}^2}{2\tau^{-1} + \Gamma_m} (\mathbf{H}_h^k + \mathbf{H}_h^{k-1}) + \frac{2\tau^{-1} - \Gamma_m}{2\tau^{-1} + \Gamma_m} \mathbf{K}_h^{k-1}. \quad (3.8)$$

将 (3.7) 和 (3.8) 分别代入 (3.3) 和 (3.4) 中, 可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2\epsilon_0}{\tau} + \frac{\epsilon_0 \omega_{pe}^2}{2\tau^{-1} + \Gamma_e} \right) (\mathbf{E}_h^k, \phi_h) - (\mathbf{H}_h^k, \nabla \times \phi_h) \\ &= -\frac{4\tau^{-1}}{2\tau^{-1} + \Gamma_e} (\mathbf{J}_h^{k-1}, \phi_h) + \left(\frac{2\epsilon_0}{\tau} - \frac{\epsilon_0 \omega_{pe}^2}{2\tau^{-1} + \Gamma_e} \right) (\mathbf{E}_h^{k-1}, \phi_h) + (\mathbf{H}_h^{k-1}, \nabla \times \phi_h), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2\mu_0}{\tau} + \frac{\mu_0 \omega_{pm}^2}{2\tau^{-1} + \Gamma_m} \right) (\mathbf{H}_h^k, \psi_h) + (\nabla \times \mathbf{E}_h^k, \psi_h) \\ &= -\frac{4\tau^{-1}}{2\tau^{-1} + \Gamma_m} (\mathbf{K}_h^{k-1}, \psi_h) + \left(\frac{2\mu_0}{\tau} - \frac{\mu_0 \omega_{pm}^2}{2\tau^{-1} + \Gamma_m} \right) (\mathbf{H}_h^{k-1}, \psi_h) - (\nabla \times \mathbf{E}_h^{k-1}, \psi_h). \end{aligned} \quad (3.10)$$

因此, 为求解方程组 (3.3)–(3.6), 我们只须先求解方程组 (3.9)–(3.10) 得到 $\mathbf{E}_h^k$ 和 $\mathbf{H}_h^k$, 然后利用 (3.7) 和 (3.8) 得到 $\mathbf{J}_h^k$ 和 $\mathbf{K}_h^k$.

值得指出的是, 格式 (3.3)–(3.6) 的解满足与连续情形下一样的稳定性.

定理 3 [10] 格式 (3.3)–(3.6) 的解满足

$$\begin{aligned} & \epsilon_0 \|\mathbf{E}_h^k\|_0^2 + \mu_0 \|\mathbf{H}_h^k\|_0^2 + \frac{1}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \|\mathbf{J}_h^k\|_0^2 + \frac{1}{\mu_0 \omega_{pm}^2} \|\mathbf{K}_h^k\|_0^2 \\ & \leq \epsilon_0 \|\mathbf{E}_h^0\|_0^2 + \mu_0 \|\mathbf{H}_h^0\|_0^2 + \frac{1}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \|\mathbf{J}_h^0\|_0^2 + \frac{1}{\mu_0 \omega_{pm}^2} \|\mathbf{K}_h^0\|_0^2. \end{aligned}$$

而且, 格式 (3.3)–(3.6) 的解满足以下最优误差估计 (证明参见文献 [10]).

定理 4 假设 $(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^n)$ 和 $(\mathbf{E}_h^n, \mathbf{H}_h^n)$ 分别记为 $t = t_n$ 时刻 Drude 模型的真解和有限元格式 (3.3)–(3.6) 的解. 若真解满足以下正则性条件:

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}, \mathbf{K} \in (L^2(0, T; (H^l(\Omega))^3))^3, \\ & \mathbf{E}, \mathbf{J} \in L^\infty(0, T; H^l(\text{curl}; \Omega)), \quad \mathbf{E}_t, \mathbf{J}_t \in (L^2(0, T; H^l(\text{curl}; \Omega)))^3, \\ & \mathbf{H}_{tt}, \mathbf{E}_{tt}, \mathbf{K}_{tt}, \mathbf{J}_{tt}, \nabla \times \mathbf{H}_{tt}, \nabla \times \mathbf{E}_{tt} \in (L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3))^3, \end{aligned}$$

则存在不依赖时间步长 τ 和网格大小 h 的常数 $C = C(T, \epsilon_0, \mu_0, \omega_{pe}, \omega_{pm}, \Gamma_e, \Gamma_m, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{K}, \mathbf{L})$, 以下最优估计成立,

$$\max_{1 \leq n \leq M} (\|\mathbf{E}^n - \mathbf{E}_h^n\|_0 + \|\mathbf{H}^n - \mathbf{H}_h^n\|_0 + \|\mathbf{J}^n - \mathbf{J}_h^n\|_0 + \|\mathbf{K}^n - \mathbf{K}_h^n\|_0) \leq C(\tau^2 + h^l),$$

其中 $l \geq 1$ 为有限元空间 $\mathbf{U}_h$ 和 $\mathbf{V}_h$ 中基函数的阶.

上面给出的 Crank-Nicolson 格式计算量较大, 因每个时间步须求解一个线性方程组. 利用著名的 Yee 格式思想, 我们可构造如下的 leap-frog 格式, 给定适当初逼近 $\mathbf{E}_h^0, \mathbf{K}_h^0, \mathbf{H}_h^{\frac{1}{2}}$ 和 $\mathbf{J}_h^{\frac{1}{2}}$, 对任意 $k = 1, 2, \dots$, 求解 $\mathbf{E}_h^k \in \mathbf{V}_h^0, \mathbf{J}_h^{k+\frac{1}{2}} \in \mathbf{V}_h, \mathbf{H}_h^{k+\frac{1}{2}}, \mathbf{K}_h^k \in \mathbf{U}_h$ 使得

$$\epsilon_0 \left(\frac{\mathbf{E}_h^k - \mathbf{E}_h^{k-1}}{\tau}, \phi_h \right) - (\mathbf{H}_h^{k-\frac{1}{2}}, \nabla \times \phi_h) + (\mathbf{J}_h^{k-\frac{1}{2}}, \phi_h) = 0, \quad (3.11)$$

$$\mu_0 \left(\frac{\mathbf{H}_h^{k+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h^{k-\frac{1}{2}}}{\tau}, \psi_h \right) + (\nabla \times \mathbf{E}_h^k, \psi_h) + (\mathbf{K}_h^k, \psi_h) = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \left(\frac{\mathbf{J}_h^{k+\frac{1}{2}} - \mathbf{J}_h^{k-\frac{1}{2}}}{\tau}, \tilde{\phi}_h \right) + \frac{\Gamma_e}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \left(\frac{\mathbf{J}_h^{k+\frac{1}{2}} + \mathbf{J}_h^{k-\frac{1}{2}}}{2}, \tilde{\phi}_h \right) = (\mathbf{E}_h^k, \tilde{\phi}_h), \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{\mu_0 \omega_{pm}^2} \left(\frac{\mathbf{K}_h^k - \mathbf{K}_h^{k-1}}{\tau}, \tilde{\psi}_h \right) + \frac{\Gamma_m}{\mu_0 \omega_{pm}^2} \left(\frac{\mathbf{K}_h^k + \mathbf{K}_h^{k-1}}{2}, \tilde{\psi}_h \right) = (\mathbf{H}_h^{k-\frac{1}{2}}, \tilde{\psi}_h), \quad (3.14)$$

对任意 $\phi_h \in \mathbf{V}_h^0, \psi_h \in \mathbf{U}_h, \tilde{\phi}_h \in \mathbf{V}_h, \tilde{\psi}_h \in \mathbf{U}_h$ 都满足.

注意 (3.13) 和 (3.14) 可分别简化为

$$\mathbf{J}_h^{k+\frac{1}{2}} = \frac{2\epsilon_0 \omega_{pe}^2}{2\tau^{-1} + \Gamma_e} \mathbf{E}_h^k + \frac{2\tau^{-1} - \Gamma_e}{2\tau^{-1} + \Gamma_e} \mathbf{J}_h^{k-\frac{1}{2}}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{K}_h^k = \frac{2\mu_0 \omega_{pm}^2}{2\tau^{-1} + \Gamma_m} \mathbf{H}_h^{k-\frac{1}{2}} + \frac{2\tau^{-1} - \Gamma_m}{2\tau^{-1} + \Gamma_m} \mathbf{K}_h^{k-1}. \quad (3.16)$$

因此, 上述 leap-frog 格式可按以下步骤执行: 在每个时间步, 首先求解 (3.11) 得到 $\mathbf{E}_h^k$, 再利用 (3.16) 更新 $\mathbf{K}_h^k$ (在并行机上可与 (3.11) 同步进行); 然后再求解 (3.12) 得到 $\mathbf{H}_h^{k+\frac{1}{2}}$, 及用 (3.15) 更新得到 $\mathbf{J}_h^{k+\frac{1}{2}}$ (亦可与 (3.12) 同步进行). 与 Crank-Nicolson 格式相比, leap-frog 格式对求解大型问题更有效, 因无须存储大型系数矩阵和求逆.

对 leap-frog 格式, 可得以下稳定性估计.

定理 5 ^[11] 假设 $C_v = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 表示光在真空的速度, C_{inv} 表示下列标准逆估计中的常数:

$$\|\nabla \times \psi_h\|_0 \leq C_{\text{inv}} h^{-1} \|\psi_h\|_0, \quad \psi_h \in \mathbf{V}_h. \quad (3.17)$$

当时间步长满足约束

$$\tau = \min \left(\frac{h}{2C_{\text{inv}} C_v}, 1 \right), \quad (3.18)$$

则 (3.11)–(3.14) 的解满足稳定性估计:

$$\begin{aligned} & \epsilon_0 \|\mathbf{E}_h^n\|_0^2 + \mu_0 \|\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 + \frac{1}{\mu_0 \omega_{pm}^2} \|\mathbf{K}_h^n\|_0^2 + \frac{1}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \|\mathbf{J}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 \\ & \leq C (\|\mathbf{E}_h^0\|_0^2 + \|\mathbf{H}_h^{\frac{1}{2}}\|_0^2 + \|\mathbf{J}_h^{\frac{1}{2}}\|_0^2 + \|\mathbf{K}_h^0\|_0^2), \quad \forall n \geq 1, \end{aligned}$$

其中常数 $C > 1$, 且不依赖时间步长 τ 和网格大小 h .

若解充分光滑, 对 leap-frog 格式 (3.11)–(3.14), 我们可得如下最优误差估计 (证明参见文献 [11]).

定理 6 假设 $(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^n)$ 和 $(\mathbf{E}_h^n, \mathbf{H}_h^n)$ 分别为 $t = t_n$ 时刻 Drude 模型的解析解和有限元格式 (3.11)–(3.14) 的解. 若解析解满足以下正则性假设:

$$\mathbf{H}, \mathbf{K} \in L^\infty(0, T; (H^l(\Omega))^3), \quad \mathbf{E}, \mathbf{J}, \mathbf{E}_t, \mathbf{J}_t \in L^\infty(0, T; H^l(\text{curl}; \Omega)),$$

$$\mathbf{E}_{tt}, \mathbf{H}_{tt}, \mathbf{J}_{tt}, \mathbf{K}_{tt}, \nabla \times \mathbf{E}_{tt}, \nabla \times \mathbf{H}_{tt} \in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3),$$

则存在不依赖时间步长 τ 和网格大小 h 的常数 $C = C(T, \epsilon_0, \mu_0, \omega_{pe}, \omega_{pm}, \Gamma_e, \Gamma_m, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$, 以下最优估计成立,

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq n} (\|\mathbf{E}^n - \mathbf{E}_h^n\|_0 + \|\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_0 + \|\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{J}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_0 + \|\mathbf{K}^n - \mathbf{K}_h^n\|_0) \\ & \leq C(\tau^2 + h^l) + C(\|\mathbf{E}^0 - \mathbf{E}_h^0\|_0 + \|\mathbf{H}^{\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h^{\frac{1}{2}}\|_0 + \|\mathbf{J}^{\frac{1}{2}} - \mathbf{J}_h^{\frac{1}{2}}\|_0 + \|\mathbf{K}^0 - \mathbf{K}_h^0\|_0), \end{aligned}$$

其中 $l \geq 1$ 为有限元空间 $\mathbf{U}_h$ 和 $\mathbf{V}_h$ 中基函数的阶.

类似地, 我们可对 Lorentz 模型 (2.17)–(2.22) 构造 Crank-Nicolson 和 leapfrog 格式. 间断 Galerkin 方法也已应用到求解超材料 Maxwell 方程, 具体可参见专著 [9].

3.2 棱有限元的超收敛

当所求微分方程的解足够光滑并且所用网格非常规则, 所得有限元解的实际误差经常比理论误差要小. 这就是我们通常所说的有限元超收敛, 其研究始于 20 世纪 70 年代初, 至今已得很多有趣的结果, 可参见有限元超收敛专著 [12–15].

相比广泛研究的椭圆、抛物和二阶双曲方程, 对 Maxwell 方程所得的超收敛结果非常有限. 1994 年, Monk [16] 对真空 Maxwell 方程得到了首个超收敛结果. 自 1996 年, 林群及其合作者们运用所谓的“林 - 积分恒等式技巧” [13, 15, 17, 18] 对 Maxwell 方程得到了一系列超收敛结果 (参见文献 [19–22]). 最近, 我们对超材料 Maxwell 方程也得到了超收敛结果 (参见文献 [23, 24]). 下面简述一下我们得到的结果.

对 Crank-Nicolson 格式 (3.3)–(3.6), 我们可证明有限元解和解析解插值的误差在立方体网格情形下有高一阶超逼近.

定理 7 [23] 假设 $(\mathbf{E}^m, \mathbf{H}^m, \mathbf{J}^m, \mathbf{K}^m)$ 和 $(\mathbf{E}_h^m, \mathbf{H}_h^m, \mathbf{J}_h^m, \mathbf{K}_h^m)$ 分别为 $t = t_m$ 时刻 Drude 模型的解析解和有限元格式 (3.3)–(3.6) 的解. 若解析解满足以下正则性条件:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t, \mathbf{J}_t, \mathbf{J} & \in L^\infty(0, T; (H^{l+1}(\Omega))^3), \quad \mathbf{E} \in L^\infty(0, T; (H^{l+2}(\Omega))^3), \\ \mathbf{E}_{tt}, \mathbf{H}_{tt}, \mathbf{J}_{tt}, \mathbf{K}_{tt}, \nabla \times \mathbf{E}_{tt}, \nabla \times \mathbf{H}_{tt} & \in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3), \end{aligned}$$

则存在不依赖时间步长 τ 和网格大小 h , 但线性依赖 T 的正常数 C 使得以下超逼近成立,

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq m \leq M} (\|\Pi_h \mathbf{E}^m - \mathbf{E}_h^m\|_0 + \|P_h \mathbf{H}^m - \mathbf{H}_h^m\|_0 + \|\Pi_h \mathbf{J}^m - \mathbf{J}_h^m\|_0 + \|P_h \mathbf{K}^m - \mathbf{K}_h^m\|_0) \\ & \leq Ch^{l+1} (\|\mathbf{E}_t\|_{L^\infty(0, T; (H^{k+1}(\Omega))^3)} + \|\mathbf{J}\|_{L^\infty(0, T; (H^{k+1}(\Omega))^3)} + \|\mathbf{E}\|_{L^\infty(0, T; (H^{k+2}(\Omega))^3)} \\ & \quad + \|\mathbf{J}_t\|_{L^\infty(0, T; (H^{k+1}(\Omega))^3)} + C\tau^2 (\|\nabla \times \mathbf{H}_{tt}\|_{L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)} + \|\mathbf{J}_{tt}\|_{L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)} \\ & \quad + \|\nabla \times \mathbf{E}_{tt}\|_{L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)} + \|\mathbf{K}_{tt}\|_{L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)} + \|\mathbf{E}_{tt}\|_{L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)} \\ & \quad + \|\mathbf{H}_{tt}\|_{L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)}), \end{aligned}$$

其中 $l \geq 1$ 为有限元空间 $\mathbf{U}_h$ 和 $\mathbf{V}_h$ 中基函数的阶.

以上超逼近的分析依赖以下两个基本结果.

引理 1 [20, 引理 3.1] 对任一立方体单元 K 和任一函数 $\mathbf{E} \in (H^{l+2}(K))^3$, 以下估计成立,

$$\int_K \nabla \times (\mathbf{E} - \Pi_h \mathbf{E}) \cdot \psi_h dx dy dz = O(h^{l+1}) \|\mathbf{E}\|_{l+2, K} \|\psi_h\|_{0, K}, \quad \forall \psi_h|_K \in \mathbf{U}_h(K).$$

引理 2 [20, 引理 3.2] 对任一立方体单元 K 和任一函数 $\mathbf{E} \in (H^{l+1}(K))^3$, 以下估计成立,

$$\int_K (\mathbf{E} - \Pi_h \mathbf{E}) \cdot \phi_h dx dy dz = O(h^{l+1}) \|\mathbf{E}\|_{l+1,K} \|\phi_h\|_{0,K}, \quad \forall \phi_h|_K \in \mathbf{V}_h(K).$$

对最低阶立方体棱元 (即在空间 $\mathbf{U}_h$ 和 $\mathbf{V}_h$ 中取 $l = 1$), 我们可证明在离散 l_2 范数下的全局超收敛 [23, 24].

定理 8 设 $\mathbf{x}_c^K = (x_c, y_c, z_c)$ 为立方体单元 $K = [x_c - h_x, x_c + h_x] \times [y_c - h_y, y_c + h_y] \times [z_c - h_z, z_c + h_z]$ 的中心, 并设 $(\mathbf{E}^m, \mathbf{H}^m)$ 和 $(\mathbf{E}_h^m, \mathbf{H}_h^m)$ 分别为 $t = t_m$ 时刻 Drude 模型的解析解和有限元格式 (3.3)–(3.6) 的解. 则当定理 7 (取 $l = 1$) 条件成立时, 如下超收敛成立,

$$\max_{1 \leq m \leq M} (\|\mathbf{E}^m - \mathbf{E}_h^m\|_{l_2} + \|\mathbf{H}^m - \mathbf{H}_h^m\|_{l_2}) \leq C(\tau^2 + h^2),$$

这里引进记号 $\|u\|_{l_2} = (\sum_e |u(\mathbf{x}_c^K)|^2 \cdot |K|)^{\frac{1}{2}}$, 且 $|K|$ 为单元 K 的体积.

若进一步假设在 L^2 范数下, $\Pi_h \mathbf{E} - \mathbf{E}^h$ 和 $P_h \mathbf{H} - \mathbf{H}^h$ 几乎均匀分布, 即满足

$$\int_K |\Pi_h \mathbf{E}^m - \mathbf{E}_h^m|^2 dK \leq \frac{C}{N} \int_{\Omega} |\Pi_h \mathbf{E}^m - \mathbf{E}_h^m|^2 dK, \quad (3.19)$$

$$\int_K |P_h \mathbf{H}^m - \mathbf{H}_h^m|^2 dK \leq \frac{C}{N} \int_{\Omega} |P_h \mathbf{H}^m - \mathbf{H}_h^m|^2 dK, \quad (3.20)$$

其中 N 表示 Ω 上的单元总数, 则对拟一致网格在单元中心存在逐点超收敛:

$$|(\mathbf{E} - \mathbf{E}^h)(x_c, y_c)| + |(\mathbf{H} - \mathbf{H}^h)(x_c, y_c)| \leq Ch^2. \quad (3.21)$$

逐点超收敛的证明是基于 Nédélec 插值在单元中心的超收敛性质.

引理 3 [24] 设 $K = [x_c - h_x, x_c + h_x] \times [y_c - h_y, y_c + h_y] \times [z_c - h_z, z_c + h_z]$ 为任一立方体单元, 其最大边长记为 h , 则对任意函数 $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{2,\infty}(K)$ 及其 Nédélec 插值 $\Pi_K^c \mathbf{u} \in Q_{0,1,1} \times Q_{1,0,1} \times Q_{1,1,0}$, 以下插值误差估计成立,

$$(\mathbf{u} - \Pi_K^c \mathbf{u})(x_c, y_c, z_c) \leq Ch^2. \quad (3.22)$$

类似的超收敛结果也已对最低阶矩形棱单元 [23]、最低阶三角形棱单元 [25] 和最低阶四面体棱单元 [26] 证实. 值得一提的是, 尽管早在 2002 年, Monk [27] 在计算中发现最低阶四面体棱单元具有超收敛现象, 并多次在其书中提到这个未解决难题, 但一直无人给出严格的证明. 最近, 文献 [26] 给出了严格的证明和数值算例. 至于高阶棱单元的超收敛, 据我们所知这方面还是未知的, 有待进一步探索.

3.3 反向波模拟

为了让读者对超材料的特殊性有个感性认识, 这里给出一个数值例子. 文献 [28] 设计并实现了用间断 Galerkin 方法求解超材料 Maxwell 方程. 这里模拟电磁波在超材料中是如何传播的. 模型设计见图 1, 假设矩形区域 $[0, 0.8]m \times [0, 0.6]m$ 为真空区域, 内嵌一个超材料三角区域 (其顶点分别为 $(0.02, 0.005)$, $(0.07, 0.005)$ 和 $(0.02, 0.055)$), 一强加在电场 E_z 上的入射波源位于 $x = 0.004m$ 上, 具体表达式参见文献 [28]. 为防止波反射, 我们在矩形区域四周加上厚度为 $12h$ 的完美匹配层, 这里 $h = 2 \cdot 10^{-4}m$ 为所用网格大小. 图 1 显示了所用网格和所得到的各个时刻的电场 E_z . 此计算网格共包含 24594 个非规则三角形单元、12554 个节点. 所用时间步长为 $\tau = 0.1$ ps, 共运行 7000 步 (在装有

图 1 反向波模拟: 所用网格和电场分量 E_z 分别在 1000, 3000 及 7000 时间步时的解

Intel Core 2 Duo CPU 运行速度 2.93 GHz 和 1.98 GB 内存的台式机上所用 CPU 时间为 1148 秒). 所得结果清楚显示波在超材料中确是反向传播的, 且超材料的折射率确为负, 从而导致波从超材料区域进入空气介质后垂直向上传播.

4 超材料隐身装置设计及模拟

利用变换光学原理并借助超材料设计隐身装置的思想是由 Leonhardt^[29] 和 Pendry 等人^[30] 在 2006 年独立提出的, 随后引发了许多后续工作 (参见文献 [8, 31]). 一个突破性的工作源于 Li 和 Pendry^[32] 构造的所谓“地毯式隐身”, 他们克服了前期隐身装置需要介电常数非常各向异性因而难以实现的困难. 他们只用介电常数为分片常数的超材料就达到隐身的效果. 地毯式隐身最终被物理试验证实: 在微波频段由 Liu 等人^[33] 实现, 对太赫兹波和光波频段也已实现^[34].

按文献 [34, 35], 三角形隐身装置可用齐次各向异性材料得到. 如图 2(a) 所示, 被隐身的区域为最底下的三角形, 它的三个顶点为 $(0, H_1)$, $(-d, 0)$ 和 $(d, 0)$. 用于覆盖隐藏目标的区域是由顶点 $(-d, 0)$, $(0, H_1)$, $(d, 0)$ 和 $(0, H_2)$ 形成的四边形, 其中 $H_2 > H_1 > 0$ 且 $d > 0$. 为达隐身效果, 四边形区域的介电常数和磁导率必须取为 (参见文献 [34])

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{H_2}{H_2 - H_1} & -\frac{H_1 H_2}{(H_2 - H_1)d} \operatorname{sgn}(x) \\ -\frac{H_1 H_2}{(H_2 - H_1)d} \operatorname{sgn}(x) & \frac{H_2 - H_1}{H_2} + \frac{H_2}{H_2 - H_1} \left(\frac{H_1}{d}\right)^2 \end{bmatrix}, \quad \mu = \frac{H_2}{H_2 - H_1},$$

其中 $\operatorname{sgn}(x)$ 为通常的符号函数.

引入记号

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}, \\ p_1 &= \sqrt{\frac{\lambda_2-a}{\lambda_2-\lambda_1}}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{a-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}} \cdot \text{sgn}(x), \\ p_3 &= -\sqrt{\frac{\lambda_2-c}{\lambda_2-\lambda_1}} \cdot \text{sgn}(x), \quad p_4 = \sqrt{\frac{c-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}},\end{aligned}$$

及矩阵

$$M_A = \begin{pmatrix} p_1^2 \lambda_2 + p_2^2 & p_2 p_4 + p_1 p_3 \lambda_2 \\ p_2 p_4 + p_1 p_3 \lambda_2 & p_3^2 \lambda_2 + p_4^2 \end{pmatrix}, \quad M_B = \begin{pmatrix} p_2^2 & p_2 p_4 \\ p_2 p_4 & p_4^2 \end{pmatrix} \omega_p^2,$$

其中 ω_p 为等离子频率.

三角形地毯式隐身的控制方程在文献 [35] 已导出

$$\mathbf{D}_t = \nabla \times \mathbf{H}, \quad (4.1)$$

$$\epsilon_0 \lambda_2 (\mathbf{E}_{t^2} + \omega_p^2 \mathbf{E}) = M_A \mathbf{D}_{t^2} + M_B \mathbf{D}, \quad (4.2)$$

$$\mu_0 \mu H_t = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (4.3)$$

这里使用了二维向量和标量旋转算子如下:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right)', \quad \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y},$$

其中 E_x 和 E_y 分别表示电场 $\mathbf{E}$ 的 x 和 y 分量. 我们进一步假设方程组 (4.1)–(4.3) 满足初始条件

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{D}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}), \quad H(\mathbf{x}, 0) = H_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.4)$$

及 PEC 边界条件, 这里 Ω 表示覆盖隐身目标的区域.

图 2 (a) 地毯式隐身设计图; (b) 数值模拟设计图. “Copyright © 2014 Society for Industrial and Applied Mathematics. Reprinted with permission from [Fig.1, 35]. All rights reserved”

文献 [35] 已证明对任意 $t \in [0, T]$, 模型问题 (4.1)–(4.3) 存在唯一解

$$(\mathbf{E}(\cdot, t), \mathbf{D}(\cdot, t), H(\cdot, t)) \in (H_0(\text{curl}; \Omega))^2 \times H(\text{curl}; \Omega).$$

而且, 我们还证明了下列稳定性结果.

定理 9 [35, 定理 2.3] 对任意 $t \in [0, T]$, 问题 (4.1)–(4.3) 的解 $(\mathbf{D}, \mathbf{E})$ 满足如下估计:

$$\begin{aligned} & (\|\sqrt{M_A} \mathbf{D}_t\|^2 + \|\sqrt{M_B} \mathbf{D}\|^2 + \|\mathbf{E}_{t^2}\|^2 + \|\mathbf{E}_t\|^2 + \|\mathbf{E}\|^2 + \|\sqrt{M_A} \nabla \times \mathbf{E}_t\|^2)(t) \\ & \leq C(\|\sqrt{M_A} \mathbf{D}_t\|^2 + \|\sqrt{M_B} \mathbf{D}\|^2 + \|\mathbf{E}_{t^2}\|^2 + \|\mathbf{E}_t\|^2 + \|\mathbf{E}\|^2 + \|\sqrt{M_A} \nabla \times \mathbf{E}_t\|^2)(0), \end{aligned}$$

其中常数 $C > 0$, 并依赖物理参数 $\epsilon_0, \mu_0, d, H_1, H_2$ 和 ω_p .

引入下列差分和平均算子:

$$\begin{aligned} \delta_\tau u^n &= \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau}, \quad \delta_\tau^2 u^n = \frac{u^n - 2u^{n-1} + u^{n-2}}{\tau^2}, \\ \hat{u}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{u^{n+\frac{1}{2}} + u^{n-\frac{1}{2}}}{2}, \quad \check{u}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u^{n+\frac{1}{2}} + 2u^{n-\frac{1}{2}} + u^{n-\frac{3}{2}}}{4} = \frac{\hat{u}^{n+\frac{1}{2}} + \hat{u}^{n-\frac{1}{2}}}{2}, \end{aligned}$$

则可对模型问题 (4.1)–(4.3) 构造如下的 leap-frog 格式, 给定适当初逼近 $H_h^0, \mathbf{D}_h^{-\frac{1}{2}}, \mathbf{D}_h^{-\frac{3}{2}}, \mathbf{E}_h^{-\frac{1}{2}}, \mathbf{E}_h^{-\frac{3}{2}}$, 对任意 $n \geq 0$ 求解 $\mathbf{D}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} \in \mathbf{V}_h^0, H_h^{n+1} \in U_h$ 使得

$$(\delta_\tau \mathbf{D}_h^{n+\frac{1}{2}}, \phi_h) = (H_h^n, \nabla \times \phi_h), \quad (4.5)$$

$$\epsilon_0 \lambda_2 (\delta_\tau^2 \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}}, \varphi_h) + \epsilon_0 \lambda_2 \omega_p^2 (\check{\mathbf{E}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \varphi_h) = (M_A \delta_\tau^2 \mathbf{D}_h^{n+\frac{1}{2}}, \varphi_h) + (M_B \check{\mathbf{D}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \varphi_h), \quad (4.6)$$

$$\mu_0 \mu (\delta_\tau H_h^{n+1}, \psi_h) = -(\nabla \times \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}}, \psi_h), \quad (4.7)$$

对所有 $\phi_h, \varphi_h \in \mathbf{V}_h^0, \psi_h \in U_h$ 都成立, 其中 $\mathbf{V}_h^0$ 表示最低阶的满足 PEC 边界条件的棱有限元空间, U_h 为分片常数有限元空间. 对此格式, 我们可证明下列离散稳定性.

定理 10 [35, 定理 3.2] 假设格式 (4.5)–(4.7) 的解记为 $(\mathbf{D}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}})$, 并记离散能量

$$\begin{aligned} \text{ENG}_n &= \frac{\epsilon_0 \mu_0 \mu \lambda_2 (2 + \omega_p^2)}{4} \|\delta_\tau \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\epsilon_0 \mu_0 \mu \lambda_2 \omega_p^2}{2} \|\hat{\mathbf{E}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{2} \|\sqrt{M_A} \nabla \times \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \|\sqrt{M_A} \delta_\tau \mathbf{D}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{2} \|\sqrt{M_B} \hat{\mathbf{D}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\epsilon_0 \mu_0 \mu \lambda_2}{2} \|\delta_\tau^2 \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{2} \|\sqrt{M_A} \nabla \times \delta_\tau \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2. \end{aligned}$$

对任意 $m \geq 1$ 和充分小的常数 $C_{cfl} > 0$, 若时间步长满足条件

$$\tau \leq C_{cfl} h^2, \quad (4.8)$$

则下列离散稳定性成立,

$$\text{ENG}_m \leq C(\text{ENG}_0 + \|\sqrt{M_A} \nabla \times \mathbf{E}_h^{-\frac{1}{2}}\|^2 + \|\delta_\tau \mathbf{E}_h^{-\frac{1}{2}}\|^2 + \|\sqrt{M_B} \delta_\tau \mathbf{D}_h^{-\frac{1}{2}}\|^2),$$

其中常数 $C > 0$ 依赖于物理参量 $\epsilon_0, \mu_0, d, H_1, H_2$ 和 ω_p , 但不依赖网格大小 h 和时间步长 τ .

下面来看一个数值模拟结果. 选取 $H_1 = 0.05m, H_2 = 0.2m, d = 0.2m$, 及模拟区域 $\Omega = [-0.3, 0.3]m \times [0, 0.3]m$. 对此区域用一致均匀三角形单元剖分, 并取网格大小 $h = 0.00625$. 而围绕 Ω 四周的完美匹配层则用一致均匀矩形单元剖分. 最终用于数值模拟的网格包含 53330 条边、26960 个三角形单元和 6258 个矩形单元. 在数值实验中, 时间步长取为 $\tau = 2 \cdot 10^{-13}$ 秒, 总时间步数为 15000, 即总模拟时间 $T = 3.0$ 纳秒. 我们在 $x = -0.3$ 线上设置平面入射波 $H_z = 0.1 \sin(\omega t)$, 其中 $\omega = 2\pi f$, 且频率 $f = 3.0$ GHz. 图 3 显示了不同时间求得的磁场 H_z . 此图很清楚地显示, 波在通过隐身区域后原来的平面波形依然保持完好, 这使远方的观察者感觉不到中间有目标存在.

图 3 地毯式隐身模拟: 磁场 H_z 在 5000, 7000, 10000 及 15000 时间步的解. “Copyright © 2014 Society for Industrial and Applied Mathematics. Reprinted with permission from [Fig.2, 35]. All rights reserved”

最后想指出, 关于超材料隐身已有很多很好的数学工作 (如文献 [36–41]). 由于大部分是在频域讨论的, 我们在此不详叙述.

5 未解决问题及展望

以上主要回顾了到时域模拟电磁波在超材料中传播得到的模型方程及其如何构造时域有限元进行数值模拟. 用有限元求解涉及超材料的频域 Maxwell 方程也有一些结果 (参见文献 [42, 43]), 但关于模型问题的适定性似乎还有争论, 进一步把此问题搞清楚很有意义. 当用频域有限元模拟电磁波隐身时, 因模型系数非常各向异性且随空间变化, 对此设计快速有效的预条件子和求解器似乎还是一个暂未涉足的领域, 尽管对标准的频域 Maxwell 方程已有很多工作 (参见文献 [44, 45]). 另外, 电磁波隐身模拟最有效的方法应当考虑 hp 自适应有限元法和间断 Galerkin 法, 这方面的研究才刚起步 (参见文献 [28, 46, 47]), 更精确快速的算法有待开发.

总之, 超材料的出现给计算数学提供了很多有趣而又富于挑战的问题. 希望本文能起到抛砖引玉之用, 激发更多计算数学工作者推进这方面的研究.

参考文献

- 1 Smith D R, Padilla W J, Vier D C, et al. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Phys Rev Lett*, 2000, 84: 4184–4187
- 2 Veselago V G. Electrodynamics of substances with simultaneously negative values of sigma and mu. *Sov Phys Usp*, 1968, 10: 509–514
- 3 Shelby R A, Smith D R, Schultz S. Experimental verification of a negative index of refraction. *Science*, 2001, 292: 489–491
- 4 Pendry J B. Negative refraction makes a perfect lens. *Phys Rev Lett*, 2000, 85: 3966–3969
- 5 Solymar L, Shamonina E. *Waves in Metamaterials*. Oxford: Oxford University Press, 2009

- 6 Cai W, Shalaev V. Optical Metamaterials: Fundamentals and Applications. New York: Springer, 2009
- 7 Cui T J, Smith D, Liu R. Metamaterials: Theory, Design, and Applications. New York: Springer, 2009
- 8 Werner D H, Kwon D H. Transformation Electromagnetics and Metamaterials: Fundamental Principles and Applications. New York: Springer, 2013
- 9 Li J, Huang Y. Time-Domain Finite Element Methods for Maxwell's Equations in Metamaterials. Springer Series in Computational Mathematics, vol. 43. New York: Springer, 2013
- 10 Li J, Chen Y, Elander V. Mathematical and numerical study of wave propagation in negative-index materials. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2008, 197: 3976–3987
- 11 Li J. Numerical convergence and physical fidelity analysis for Maxwell's equations in metamaterials. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2009, 198: 3161–3172
- 12 Chen C M, Huang Y. High Accuracy Theory of Finite Element Methods. Changsha: Science Press, 1995
- 13 Lin Q, Yan N. The Construction and Analysis of High Accurate Finite Element Methods. Baoding: Hebei University Press, 1996
- 14 Wahlbin L B. Superconvergence in Galerkin Finite Element Methods. Berlin: Springer, 1995
- 15 Yan N. Superconvergence Analysis and a Posteriori Error Estimation in Finite Element Methods. Beijing: Science Press, 2008
- 16 Monk P. Superconvergence of finite element approximations to Maxwell's equations. Numer Methods Partial Differential Equations, 1994, 10: 793–812
- 17 Lin Q, Li J, Zhou A. A rectangle test for the Stokes equations. In: Prof. of Sys. Sci. & Sys. Engrg. Great Wall: Culture Publish Co, 1991, 240–241
- 18 Lin Q, Yan N, Zhou A. A rectangle test for interpolated finite elements. In: Prof. of Sys. Sci. & Sys. Engrg. Great Wall: Culture Publish Co, 1991, 217–229
- 19 Lin Q, Yan N. Superconvergence of mixed element methods for Maxwell's equations. Gongcheng Shuxue Xuebao, 1996, 13: 1–10
- 20 Lin Q, Yan N. Global superconvergence for Maxwell's equations. Math Comp, 1999, 69: 159–176
- 21 Lin Q, Lin J F. High accuracy approximation of mixed finite element for 2-D Maxwell equations. Acta Math Sci Ser A Chin Ed, 2003, 23: 499–503
- 22 Lin Q, Li J. Superconvergence analysis for Maxwell's equations in dispersive media. Math Comp, 2008, 77: 757–771
- 23 Huang Y, Li J, Lin Q. Superconvergence analysis for time-dependent Maxwell's equations in metamaterials. Numer Methods Partial Differential Equations, 2012, 28: 1794–1816
- 24 Huang Y, Li J, Yang W, et al. Superconvergence of mixed finite element approximations to 3-D Maxwell's equations in metamaterials. J Comput Phys, 2011, 230: 8275–8289
- 25 Huang Y, Li J, Wu C. Averaging for superconvergence: verification and application of 2D edge elements to Maxwell's equations in metamaterials. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2013, 255: 121–132
- 26 Huang Y, Li J, Wu C, et al. Superconvergence analysis for linear tetrahedral edge elements. J Sci Comput, 2015, 62: 122–145
- 27 Monk P. A finite element method for approximating the time-harmonic Maxwell equations. Numer Math, 1992, 63: 243–261
- 28 Li J, Hesthaven Jan S. Analysis and application of the nodal discontinuous Galerkin method for wave propagation in metamaterials. J Comput Phys, 2014, 258: 915–930
- 29 Leonhardt U. Optical conformal mapping. Science, 2006, 312: 1777–1780
- 30 Pendry J B, Schurig D, Smith D R. Controlling electromagnetic fields. Science, 2006, 312: 1780–1782
- 31 Greenleaf A, Kurylev Y, Lassas M, et al. Cloaking devices, electromagnetics wormholes and transformation optics. SIAM Rev, 2009, 51: 3–33
- 32 Li J, Pendry J B. Hiding under the carpet: A new strategy for cloaking. Phys Rev Lett, 2008, 101: 203901
- 33 Liu R, Ji C, Mock J J, et al. Broadband ground-plane cloak. Science, 2009, 323: 366–369
- 34 Chen X, Luo Y, Zhang J, et al. Macroscopic invisibility cloaking of visible light. Nat Commun, doi: 10.1038/ncomms1176, 2011
- 35 Li J, Huang Y, Yang W, et al. Mathematical analysis and time-domain finite element simulation of carpet cloak. SIAM J Appl Math, 2014, 74: 1136–1151
- 36 Li J, Huang Y, Yang W. Well-posedness study and finite element simulation of time-domain cylindrical and elliptical cloaks. Math Comp, 2015, 84: 543–562
- 37 Milton G W, Nicorovici N A P. On the cloaking effects associated with anomalous localized resonance. Proc R Soc Lond Ser A, 2006, 462: 3027–3059

- 38 Kohn R V, Onofrei D, Vogelius M S, et al. Cloaking via change of variables for the Helmholtz equation. *Comm Pure Appl Math*, 2010, 63: 973–1016
- 39 Ammari H, Kang H, Lee H, et al. Enhancement of near cloaking for the full Maxwell equations. *SIAM J Appl Math*, 2013, 73: 2055–2076
- 40 Bao G, Liu H. Nearly cloaking the electromagnetic fields. *SIAM J Appl Math*, 2014, 74: 724–742
- 41 Bao G, Liu H, Zou J. Nearly cloaking the full Maxwell equations: Cloaking active contents with general conducting layers. *J Math Pures Appl*, 2014, 101: 716–733
- 42 Fernandes P, Raffetto M. Well posedness and finite element approximability of time-harmonic electromagnetic boundary value problems involving bianisotropic materials and metamaterials. *Math Models Methods Appl Sci*, 2009, 19: 2299–2335
- 43 Bonnet-Ben Dhia A A, Ciarlet P, Zwölf C M. Two- and three-field formulations for wave transmission between media with opposite sign dielectric constants. *J Comput Appl Math*, 2007, 204: 408–417
- 44 Hu Q, Zou J. Substructuring preconditioners for saddle-point problems arising from Maxwell’s equations in three dimensions. *Math Comp*, 2004, 73: 35–61
- 45 Zhong L, Chen L, Shu S, et al. Convergence and optimality of adaptive edge finite element methods for time-harmonic Maxwell equations. *Math Comp*, 2012, 81: 623–642
- 46 Demkowicz L, Li J. Numerical simulations of cloaking problems using a DPG method. *Comput Mech*, 2013, 51: 661–672
- 47 Scheid C, Lanteri S. Convergence of a discontinuous Galerkin scheme for the mixed time domain Maxwell’s equations in dispersive media. *IMA J Numer Anal*, 2013, 33: 432–459

Some computational problems in electromagnetic wave simulations with metamaterials

HUANG YunQing & LI JiChun

Abstract Metamaterial is an artificially made nano electromagnetic material, whose permittivity and permeability can be both negative for some frequencies. Hence the reflective index of metamaterial is negative. The study of metamaterial started from the beginning of 2000, and has been one of the hottest research topics in the past decade. We focus on introducing those modeling equations appeared in simulating wave propagation in metamaterials and developing effective finite element methods for solving them. This paper is a short survey of the works carried out in the computational mathematics community in the past ten years. In the end, we mention some open problems that worth further study.

Keywords metamaterial, Maxwell equations, finite element methods

MSC(2010) 65N30, 35L15, 78-08

doi: 10.1360/N012014-00170