非线性特征值问题的多重网格算法

献给林群教授 80 华诞

谢和虎^{①②③}

① 中国科学院数学与系统科学研究院计算数学与科学工程计算研究所, 北京 100190;

② 中国科学院科学与工程计算国家重点实验室, 北京 100190;

③ 中国科学院国家数学与交叉科学研究中心, 北京 100190

E-mail: hhxie@lsec.cc.ac.cn

收稿日期: 2014-09-16; 接受日期: 2015-04-28

国家自然科学基金 (批准号: 91330202, 11371026, 11001259 和 11031006)、中国科学院国家数学与交叉科学研究中心和中国科学院数学与系统科学研究院院长基金资助项目

摘要 本文介绍两种求解非线性特征值问题的多重网格算法. 这种类型的多重网格算法是多重校正方法和求解边值问题的多重网格算法相结合而得到的. 在这种多重网格算法中, 求解特征值问题被转化成一序列有限元空间上的边值问题的求解和在最低维空间下的非线性特征值的求解. 由于采用了具有最优复杂度的多重网格算法来求解其中的边值问题, 非线性特征值问题的多重网格算法可以大大提高求解的整体效率. 这里求解边值问题的多重网格算法也可以被其他高效的求解算法代替而设计出新的求解非线性特征值问题的高效算法.

关键词 非线性特征值问题 多重网格算法 有限元方法 多重校正

MSC (2010) 主题分类 65N30, 65N25, 65L15, 65B99

1 引言

求解大规模线性和非线性特征值问题已经成了现代科学研究与实际工程领域的基本问题之一. 本文主要讨论的是非线性特征值问题 (参见文献 [1–8]). 虽然目前已经有了大量求解边值问题的高效算法, 但是求解大规模的特征值问题依然不是一件容易的事情. 多重网格方法和其他一些高效的预条件子提供了求解边值问题的最优算法. 这些算法所得解的误差阶可以达到有限元离散的最优误差阶, 但是计算量可以达到自由度的线性量级. 关于多重网格算法和多水平方法的文章有文献 [9–16] 以及在这些文献中所引用的其他文献.

校正算法经常用来求解复杂问题, 如非对称正定问题、非线性问题和特征值问题等. 关于校正算法可以参见文献 [17–20]. 文献 [18] 给出了求解二阶椭圆特征值问题的协调有限元两空间方法. 文献 [20] 给出了求解二阶椭圆特征值问题的协调有限元两网格方法. 发展至今, 出现了较多的校正算法, 如求解非对称正定、非线性方程和特征值问题等的两空间和两网格方法 (参见文献 [21–28] 及在这些文献中所引用的其他文献等).

这些两空间和两网格方法基本上可概括为两步.

算法 1.1 两空间或两网格算法.

第 1 步 在低维空间中求解一个复杂的问题;

第 2 步 增大求解空间, 然后利用第 1 步得到的解来构造一个简单的问题, 求解这个简单的问题就得到了一个比第 1 步具有更高精度的解.

上面的算法由于没有在高维空间中求解初始的原问题, 代之以求解相对简单的问题, 这样就减少了总体的计算量. 那么, 在执行第 2 步之后所得到的解是否可以继续进行校正呢? 通过对特征值问题的具体分析可以发现, 由于没有在高维空间求解特征值问题, 所得到的校正解往往不具有直接求解的性质, 这样导致不能进行持续地校正.

最近, 我们提出了一种求解特征值问题的多重校正方法 (参见文献 [29–33]). 所谓的多重校正算法就是把需要在最细网格上的特征值求解转换成在一个网格序列上边值问题的求解和在最粗网格上特征值问题的求解. 通过这样的方式可以把特征值求解的主体转化成边值问题的计算. 我们知道边值问题已经发展出很好的求解算法了, 所以, 通过多重校正的方式可以提高特征值求解的总体效率. 当然, 多重校正的思想是把特征值的求解转化成边值问题的求解, 所以, 很多其他求解边值问题的高效算法都可以用来设计出求解特征值问题的高效算法, 如 BPX (Bramble-Pasciad-Xu) 多水平预条件子、代数多重网格和区域分解方法等. 另外, 在最粗网格上特征值问题求解算法的选择也是自由的. 本文的目的是, 利用多重校正算法的思想给出求解非线性特征值问题的多重网格算法, 也是把非线性特征值问题的求解转化成一系边值问题的求解和低维空间上的非线性特征值问题的求解. 同样利用多重网格方法来求解这些边值问题以达到提高非线性特征值问题求解的整体效率. 当然, 这里也将给出所设计的非线性特征值问题多重网格算法误差和计算量的估计, 通过分析可以发现, 这里提出的算法为了得到最优的误差阶只需要几乎线性的复杂度. 简单来说, 本文的多重网格算法可以描述如下.

算法 1.2 多重校正算法.

第 1 步 在一个初始的空间下求解一个小规模的非线性特征值问题;

第 2 步 在加密的网格上用多重网格方法求解一个线性边值问题;

第 3 步 在一个最粗的空间下求解一个非线性特征值问题, 然后回到第 2 步进行下一次迭代.

由于主要是用多重网格算法去求解边值问题, 所以, 多重网格的高效性就可以导致非线性特征值问题求解的高效性.

本文的结构如下: 第 2 节介绍非线性特征值问题的有限元离散方法; 第 3 和 4 节分别介绍基于不动点迭代和 Newton 迭代的单步校正算法; 第 5 节介绍一种基于第 3 和 4 节定义的单步校正算法的多重网格方法; 第 6 节将用来分析多重校正算法的计算量; 最后给出一些总结和相关的展望.

2 非线性特征值问题的有限元离散

本节介绍本文所用到的一些符号和非线性特征值问题的有限元离散方法, 当然也会给出本文将要用到的一些误差估计假设.

本文中, 符号 C (带下标或者不带下标) 表示一个正常数, 在不同的地方可能取不同的值. 为了行文简便, 这里将会用到符号 $\lesssim$, $\gtrsim$ 和 $\approx$. 具体而言, $x_1 \lesssim y_1$, $x_2 \gtrsim y_2$ 和 $x_3 \approx y_3$ 分别表示 $x_1 \leq C_1 y_1$, $x_2 \geq c_2 y_2$ 和 $c_3 x_3 \leq y_3 \leq C_3 x_3$, 其中 C_1, c_2, c_3 和 C_3 表示的是与网格尺寸无关的常数. 本文采用标准的 Sobolev 空间 $W^{s,p}(\Omega)$ 和相应的范数、半范数等^[13, 34]. 当 $p = 2$ 时, 设定 $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$

和 $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$, 其中 $v|_{\partial\Omega}$ 是按照迹的意义来理解. 为了简便起见, 设定 $\|\cdot\|_s = \|\cdot\|_{s,2,\Omega}$, 用 $(\cdot, \cdot)$ 表示标准的 $L^2(\Omega)$ 内积.

具体而言, 本文考虑如下的非线性特征值问题, 求 (λ, u) 使其满足如下方程:

$$\begin{cases} -\Delta u + f(u) = \lambda u, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \\ \int_{\Omega} u^2 d\Omega = 1, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 表示一个多边形或多面体的计算区域, $f(u)$ 是一个关于特征函数 u 的非线性函数. 这里假定求解的非线性特征值问题 (2.1) 只有实数特征值.

为简便起见, 之后设定 $V = H_0^1(\Omega)$. 为了利用有限元方法求解非线性特征值问题 (2.1), 定义其相应的特征值问题变分形式, 求 $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times V$ 使其满足 $b(u, u) = 1$ 和如下方程:

$$a(u, v) = \lambda b(u, v), \quad \forall v \in V, \quad (2.2)$$

其中泛函 $a(\cdot, \cdot)$ 和 $b(\cdot, \cdot)$ 定义如下:

$$a(u, v) := \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + f(u)v) d\Omega, \quad b(u, v) := \int_{\Omega} uv d\Omega.$$

现在来介绍特征值问题 (2.2) 的有限元方法. 首先在计算区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) 上产生一个正则剖分, 即把二维区域分解成三角形或四边形 (三维区域分解成四面体或六面体). 用 h_K 表示单元 $K \in \mathcal{T}_h$ 的尺寸, h 表示网格 $\mathcal{T}_h$ 中所有单元的最大尺寸. 基于所定义的网格 $\mathcal{T}_h$, 构造相应的线性有限元空间 $V_h \subset V$. 为了进行多重网格迭代, 本文设定一个尺寸为 H 的粗网格, 并在其上建立相应的线性有限元空间 V_H , 这个空间是后面所用到的所有空间的一个子集.

基于所构造的有限元空间 V_h , 定义非线性特征值问题的有限元离散, 求 $(\bar{\lambda}_h, \bar{u}_h) \in \mathbb{R} \times V_h$ 使其满足 $b(\bar{u}_h, \bar{u}_h) = 1$ 和如下方程:

$$a(\bar{u}_h, v_h) = \bar{\lambda}_h b(\bar{u}_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.3)$$

为了给出有限元离散误差的估计, 定义 $\delta_h(u)$ 如下:

$$\delta_h(u) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1. \quad (2.4)$$

为了一般化, 本文设计的多重网格算法只基于下面的假设. 首先给出如下关于特征对逼近 $(\bar{\lambda}_h, \bar{u}_h)$ 的误差估计的一些假设 (参见文献 [35, 36]).

假设 A1 离散特征值问题 (2.3) 的解 $(\bar{\lambda}_h, \bar{u}_h)$ 有如下的误差估计:

$$\|u - \bar{u}_h\|_1 \lesssim \delta_h(u), \quad (2.5)$$

$$|\lambda - \bar{\lambda}_h| + \|u - \bar{u}_h\|_0 \lesssim \eta_a(V_h) \|u - \bar{u}_h\|_1, \quad (2.6)$$

其中 $\eta_a(V_h)$ 是依赖于有限元空间 V_h 的一个量且有如下性质:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \eta_a(V_h) = 0, \quad \eta_a(\tilde{V}_h) \leq \eta_a(V_h), \quad \text{若 } V_h \subset \tilde{V}_h \subset V. \quad (2.7)$$

假设 A2 设 V^h 是有限元空间 V_h 的一个子空间. 令 (λ^h, u^h) 满足 $b(u^h, u^h) = 1$ 且是如下离散非线性特征值问题的解,

$$a(u^h, v^h) = \lambda^h b(u^h, v^h), \quad \forall v^h \in V^h, \quad (2.8)$$

则如下的误差估计成立,

$$\|\bar{u}_h - u^h\|_1 \lesssim \delta_h(\bar{u}_h), \quad (2.9)$$

$$|\bar{\lambda}_h - \lambda^h| + \|\bar{u}_h - u^h\|_0 \lesssim \eta_a(V^h) \|\bar{u}_h - u^h\|_1, \quad (2.10)$$

其中

$$\delta_h(\bar{u}_h) := \inf_{v^h \in V^h} \|\bar{u}_h - v^h\|_1. \quad (2.11)$$

为了设计和分析基于不动点迭代和 Newton 迭代的多重网格算法, 分别需要如下关于非线性函数 $f(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ 的假设.

假设 B 函数 $f(\cdot)$ 有如下估计:

$$|(f(w) - f(v), \psi)| \lesssim \|w - v\|_0 \|\psi\|_1, \quad \forall w \in V, \quad v \in V, \quad \psi \in V. \quad (2.12)$$

假设 C 函数 $f(\cdot)$ 有如下估计:

$$|(f(w) - f(v) - f_v(v)(w - v), \psi)| \lesssim \|w - v\|_0 \|\psi\|_1, \quad \forall w \in V, \quad v \in V, \quad \psi \in V. \quad (2.13)$$

关于具体问题中非线性函数 $f(\cdot)$ 更多性质的讨论, 请参见文献 [8, 35, 37–39] 和其相关的参考文献.

3 由不动点迭代定义的单步校正算法

本节将介绍一种基于不动点迭代的单步校正方法. 这种校正算法可以用来提高给定特征对的逼近精度. 整个校正步包含在一个更细有限元空间上边值问题的求解和在最粗空间上非线性特征值问题的求解.

假设已经获得特征对逼近 $(\lambda_{h_k}, u_{h_k}) \in \mathbb{R} \times V_{h_k}$. 现在来介绍可以提高特征对 (λ_{h_k}, u_{h_k}) 精度的校正算法. 令 $V_{h_{k+1}} \subset V$ 为一个更细的有限元空间, 使得包含关系 $V_{h_k} \subset V_{h_{k+1}}$ 成立. 基于这个更细的有限元空间, 我们定义如下的校正步.

算法 3.1 基于不动点迭代的单步校正算法.

第 1 步 定义如下边值问题, 求 $\hat{u}_{h_{k+1}} \in V_{h_{k+1}}$ 使其满足如下方程:

$$(\nabla \hat{u}_{h_{k+1}}, \nabla v_{h_{k+1}}) = \lambda_{h_k} b(u_{h_k}, v_{h_{k+1}}) - (f(u_{h_k}), v_{h_{k+1}}), \quad \forall v_{h_{k+1}} \in V_{h_{k+1}}. \quad (3.1)$$

用多重网格算法求解这个方程获得一个逼近解 $\tilde{u}_{h_{k+1}} \in V_{h_{k+1}}$ 且有误差

$$\|\hat{u}_{h_{k+1}} - \tilde{u}_{h_{k+1}}\|_1 \leq C \eta_a(V_{h_k}) \delta_{h_k}(u).$$

第 2 步 定义一个新的有限维空间 $V_{H,h_{k+1}} = V_H + \text{span}\{\tilde{u}_{h_{k+1}}\}$. 求解如下的非线性特征值问题, 求 $(\lambda_{h_{k+1}}, u_{h_{k+1}}) \in \mathbb{R} \times V_{H,h_{k+1}}$ 使其满足 $b(u_{h_{k+1}}, u_{h_{k+1}}) = 1$ 和如下方程:

$$a(u_{h_{k+1}}, v_{H,h_{k+1}}) = \lambda_{h_{k+1}} b(u_{h_{k+1}}, v_{H,h_{k+1}}), \quad \forall v_{H,h_{k+1}} \in V_{H,h_{k+1}}. \quad (3.2)$$

用如下符号表示上面定义的校正算法,

$$(\lambda_{h_{k+1}}, u_{h_{k+1}}) = \text{Correction}(V_H, \lambda_{h_k}, u_{h_k}, V_{h_{k+1}}),$$

其中 V_H 表示校正算法中用到的最粗的有限元空间, λ_{h_k} 和 u_{h_k} 分别表示给定的特征值和特征函数逼近, $V_{h_{k+1}}$ 表示计算所在的更细的有限元空间, $(\lambda_{h_{k+1}}, u_{h_{k+1}})$ 表示校正算法的输出量.

下面给出上面所定义的校正算法的误差分析.

定理 3.1 如果假设 A1、A2 和 B 成立, 由校正算法 3.1 所得到的特征对逼近 $(\lambda_{h_{k+1}}, u_{h_{k+1}}) \in \mathbb{R} \times V_{h_{k+1}}$ 和在 $V_{h_{k+1}}$ 中直接求解所得特征对 $(\bar{\lambda}_{h_{k+1}}, \bar{u}_{h_{k+1}})$ 有如下误差估计:

$$\|\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_{k+1}}\|_1 \lesssim \varepsilon_{h_{k+1}}(u), \quad (3.3)$$

$$|\bar{\lambda}_{h_{k+1}} - \lambda_{h_{k+1}}| + \|\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_{k+1}}\|_0 \lesssim \eta_a(V_H) \|\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_{k+1}}\|_1, \quad (3.4)$$

$$|(f(\bar{u}_{h_{k+1}}) - f(u_{h_{k+1}}), v)| \lesssim \eta_a(V_H) \|\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_{k+1}}\|_1 \|v\|_1, \quad \forall v \in V, \quad (3.5)$$

其中 $\varepsilon_{h_{k+1}}(u) := \eta_a(V_{h_k}) \delta_{h_k}(u) + \|\bar{u}_{h_k} - u_{h_k}\|_0 + |\bar{\lambda}_{h_k} - \lambda_{h_k}|$.

证明 由问题 (2.3) 和 (3.1), 对任意的 $v_{h_{k+1}} \in V_{h_{k+1}}$, 如下的估计成立,

$$\begin{aligned} & (\nabla(\bar{u}_{h_{k+1}} - \hat{u}_{h_{k+1}}), \nabla v_{h_{k+1}}) \\ &= b(\bar{\lambda}_{h_{k+1}} \bar{u}_{h_{k+1}} - \lambda_{h_k} u_{h_k}, v_{h_{k+1}}) + (f(u_{h_k}) - f(\bar{u}_{h_{k+1}}), v_{h_{k+1}}) \\ &\lesssim (|\bar{\lambda}_{h_{k+1}} - \lambda_{h_k}| + \|\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_k}\|_0) \|v_{h_{k+1}}\|_1 \\ &\lesssim (|\bar{\lambda}_{h_{k+1}} - \bar{\lambda}_{h_k}| + |\bar{\lambda}_{h_k} - \lambda_{h_k}| + \|\bar{u}_{h_{k+1}} - \bar{u}_{h_k}\|_0 + \|\bar{u}_{h_k} - u_{h_k}\|_0) \|v_{h_{k+1}}\|_1 \\ &\lesssim (\eta_a(V_{h_k}) \delta_{h_k}(u) + \|\bar{u}_{h_k} - u_{h_k}\|_0 + |\bar{\lambda}_{h_k} - \lambda_{h_k}|) \|v_{h_{k+1}}\|_1. \end{aligned}$$

则依据上式可得

$$\|\bar{u}_{h_{k+1}} - \hat{u}_{h_{k+1}}\|_1 \lesssim \eta_a(V_{h_k}) \delta_{h_k}(u) + \|\bar{u}_{h_k} - u_{h_k}\|_0 + |\bar{\lambda}_{h_k} - \lambda_{h_k}|. \quad (3.6)$$

从 (3.6) 和多重网格求解的精度 $\|\hat{u}_{h_{k+1}} - \tilde{u}_{h_{k+1}}\|_1 \lesssim \eta_a(V_{h_k}) \delta_{h_k}(u)$ 可以得到如下的估计:

$$\|\bar{u}_{h_{k+1}} - \tilde{u}_{h_{k+1}}\|_1 \lesssim \eta_a(V_{h_k}) \delta_{h_k}(u) + \|\bar{u}_{h_k} - u_{h_k}\|_0 + |\bar{\lambda}_{h_k} - \lambda_{h_k}|. \quad (3.7)$$

现在来估计特征值问题 (3.2) 的特征对逼近 $(\lambda_{h_{k+1}}, u_{h_{k+1}})$ 的误差. 由假设 A1、A2、B 和有限维空间 $V_{H,h_{k+1}}$ 的构造, 成立如下的误差估计:

$$\|\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_{k+1}}\|_1 \lesssim \inf_{v_{H,h_{k+1}} \in V_{H,h_{k+1}}} \|\bar{u}_{h_{k+1}} - v_{H,h_{k+1}}\|_1 \leq \|\bar{u}_{h_{k+1}} - \tilde{u}_{h_{k+1}}\|_1 \quad (3.8)$$

和

$$|\bar{\lambda}_{h_{k+1}} - \lambda_{h_{k+1}}| + \|\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_{k+1}}\|_0 \lesssim \eta_a(V_{H,h_{k+1}}) \|\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_{k+1}}\|_1, \quad (3.9)$$

$$|(f(\bar{u}_{h_{k+1}}) - f(u_{h_{k+1}}), v)| \lesssim \eta_a(V_{H,h_{k+1}}) \|\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_{k+1}}\|_1 \|v\|_1, \quad \forall v \in V. \quad (3.10)$$

结合 (2.7) 和 (3.7)–(3.10) 可以得到所要证明的结论 (3.3)–(3.5). $\square$

4 由 Newton 迭代定义的单步校正法

本节介绍另一种基于 Newton 迭代所定义的单步校正算法来提高所给特征对逼近的精度. 这种校正步同样包括用多重网格法求解一个辅助线性边值问题和在最粗有限元空间上求解一个非线性特征值问题.

类似地, 假设已有特征对逼近 $(\lambda_{h_k}, u_{h_k}) \in \mathbb{R} \times V_{h_k}$. 令 $V_{h_{k+1}} \subset V$ 是一个比有限元空间 V_{h_k} 更细的有限元空间使得 $V_{h_k} \subset V_{h_{k+1}}$.

在本节定义双线性型 $a_{h_k}(w, v)$ 如下:

$$a_{h_k}(w, v) = (\nabla w, \nabla v) + (f_u(u_{h_k})w, v). \quad (4.1)$$

假设线性算子 $L_u := -\Delta + f_u(u)$ 非奇异并且 u_{h_k} 离 u 足够近使得如下的性质成立 (参见文献 [39, 引理 2.1]),

$$\sup_{0 \neq v_{h_{k+1}} \in V_{h_{k+1}}} \frac{a_{h_k}(w_{h_{k+1}}, v_{h_{k+1}})}{\|v_{h_{k+1}}\|_1} \gtrsim \|w_{h_{k+1}}\|_1, \quad \forall w_{h_{k+1}} \in V_{h_{k+1}}, \quad (4.2)$$

$$|a_{h_k}(w, v)| \lesssim \|w\|_1 \|v\|_1, \quad \forall w \in V, \quad v \in V. \quad (4.3)$$

现在来定义如下基于 Newton 迭代的单步校正算法.

算法 4.1 由 Newton 迭代定义的单步校正法.

第 1 步 定义如下边值问题, 求 $\hat{e}_{h_{k+1}} \in V_{h_{k+1}}$ 满足如下方程:

$$a_{h_k}(\hat{e}_{h_{k+1}}, v_{h_{k+1}}) = \lambda_{h_k} b(u_{h_k}, v_{h_{k+1}}) - (\nabla u_{h_k}, \nabla v_{h_{k+1}}) - (f(u_{h_k}), v_{h_{k+1}}), \quad \forall v_{h_{k+1}} \in V_{h_{k+1}}. \quad (4.4)$$

用多重网格方法^[16, 24] 求解上面的方程得到逼近解 $\tilde{e}_{h_{k+1}} \in V_{h_{k+1}}$ 且具有误差估计

$$\|\hat{e}_{h_{k+1}} - \tilde{e}_{h_{k+1}}\|_1 \leq C\eta_a(V_{h_k})\delta_{h_k}(u).$$

我们定义 $\tilde{u}_{h_{k+1}} = u_{h_k} + \tilde{e}_{h_{k+1}}$.

第 2 步 定义一个新的有限元空间 $V_{H, h_{k+1}} = V_H + \text{span}\{\tilde{u}_{h_{k+1}}\}$ 并且求解如下的非线性特征值问题, 求 $(\lambda_{h_{k+1}}, u_{h_{k+1}}) \in \mathbb{R} \times V_{H, h_{k+1}}$ 使其满足 $b(u_{h_{k+1}}, u_{h_{k+1}}) = 1$ 和如下方程:

$$a(u_{h_{k+1}}, v_{H, h_{k+1}}) = \lambda_{h_{k+1}} b(u_{h_{k+1}}, v_{H, h_{k+1}}), \quad \forall v_{H, h_{k+1}} \in V_{H, h_{k+1}}. \quad (4.5)$$

也用下面的符号来表示上面定义的校正步如下:

$$(\lambda_{h_{k+1}}, u_{h_{k+1}}) = \text{Correction}(V_H, \lambda_{h_k}, u_{h_k}, V_{h_{k+1}}).$$

定理 4.1 如果假设 A1、A2、C 和条件 (4.2) 成立, 则校正算法 4.1 得到的特征对逼近 $(\lambda_{h_{k+1}}, u_{h_{k+1}}) \in \mathbb{R} \times V_{h_{k+1}}$ 和在 $V_{h_{k+1}}$ 中直接求解所得特征对 $(\bar{\lambda}_{h_{k+1}}, \bar{u}_{h_{k+1}})$ 有如下误差估计:

$$\|\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_{k+1}}\|_1 \lesssim \varepsilon_{h_{k+1}}(u), \quad (4.6)$$

$$|\bar{\lambda}_{h_{k+1}} - \lambda_{h_{k+1}}| + \|\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_{k+1}}\|_0 \lesssim \eta_a(V_H) \|\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_{k+1}}\|_1, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & |(f(\bar{u}_{h_{k+1}}) - f(u_{h_{k+1}}) - f_u(u_{h_{k+1}})(\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_{k+1}}), v)| \\ & \lesssim \eta_a(V_H) \|\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_{k+1}}\|_1 \|v\|_1, \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (4.8)$$

其中

$$\varepsilon_{h_{k+1}}(u) := \eta_a(V_{h_k})\delta_{h_k}(u) + \|\bar{u}_{h_k} - u_{h_k}\|_0 + |\bar{\lambda}_{h_k} - \lambda_{h_k}|.$$

证明 由问题 (2.3) 和 (4.4) 可得如下的估计对任意的 $v_{h_{k+1}} \in V_{h_{k+1}}$ 成立,

$$\begin{aligned} & a_{h_k}(\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_k} - \hat{e}_{h_{k+1}}, v_{h_{k+1}}) \\ &= a_{h_k}(\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_k}, v_{h_{k+1}}) - b(\lambda_{h_k} u_{h_k}, v_{h_{k+1}}) + (\nabla u_{h_k}, \nabla v_{h_{k+1}}) + (f(u_{h_k}), v_{h_{k+1}}) \\ &= (\nabla \bar{u}_{h_{k+1}}, \nabla v_{h_{k+1}}) + (f_u(u_{h_k})(\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_k}), v_{h_{k+1}}) - b(\lambda_{h_k} u_{h_k}, v_{h_{k+1}}) + (f(u_{h_k}), v_{h_{k+1}}) \\ &= (f(u_{h_k}) - f(\bar{u}_{h_{k+1}}) + f_u(u_{h_k})(\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_k}), v_{h_{k+1}}) + b(\bar{\lambda}_{h_{k+1}} \bar{u}_{h_{k+1}} - \lambda_{h_k} u_{h_k}, v_{h_{k+1}}) \\ &\lesssim (\|\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_k}\|_0 + |\bar{\lambda}_{h_{k+1}} - \lambda_{h_k}|) \|v_{h_{k+1}}\|_1 \\ &\lesssim (\|\bar{u}_{h_{k+1}} - \bar{u}_{h_k}\|_0 + \|\bar{u}_{h_k} - u_{h_k}\|_0 + |\bar{\lambda}_{h_{k+1}} - \bar{\lambda}_{h_k}| + |\bar{\lambda}_{h_k} - \lambda_{h_k}|) \|v_{h_{k+1}}\|_1 \\ &\lesssim (\eta_a(V_{h_k})\delta_{h_k}(u) + \|\bar{u}_{h_k} - u_{h_k}\|_0 + |\bar{\lambda}_{h_k} - \lambda_{h_k}|) \|v_{h_{k+1}}\|_1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

结合 (4.2) 和 (4.9) 可以导致如下的估计:

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_k} - \hat{e}_{h_{k+1}}\|_1 &\lesssim \sup_{0 \neq v_{h_{k+1}} \in V_{h_{k+1}}} \frac{a_{h_k}(\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_k} - \hat{e}_{h_{k+1}}, v_{h_{k+1}})}{\|v_{h_{k+1}}\|_1} \\ &\lesssim \eta_a(V_{h_k})\delta_{h_k}(u) + \|\bar{u}_{h_k} - u_{h_k}\|_0 + |\bar{\lambda}_{h_k} - \lambda_{h_k}|. \end{aligned} \quad (4.10)$$

结合 (4.10) 和多重网格求解的精度 $\|\hat{e}_{h_{k+1}} - \tilde{e}_{h_{k+1}}\|_1 \lesssim \eta_a(V_{h_k})\delta_{h_k}(u)$, 如下的估计成立,

$$\|\bar{u}_{h_{k+1}} - \tilde{u}_{h_{k+1}}\|_1 \lesssim \eta_a(V_{h_k})\delta_{h_k}(u) + \|\bar{u}_{h_k} - u_{h_k}\|_0 + |\bar{\lambda}_{h_k} - \lambda_{h_k}|. \quad (4.11)$$

现在来估计特征值问题 (4.5) 的逼近解 $(\lambda_{h_{k+1}}, u_{h_{k+1}})$ 的误差. 基于假设 A1、A2 和 C, 并结合有限元空间 $V_{H,h_{k+1}}$ 的定义, 可以得到如下估计:

$$\|\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_{k+1}}\|_1 \lesssim \inf_{v_{H,h_{k+1}} \in V_{H,h_{k+1}}} \|\bar{u}_{h_{k+1}} - v_{H,h_{k+1}}\|_1 \leq \|\bar{u}_{h_{k+1}} - \tilde{u}_{h_{k+1}}\|_1 \quad (4.12)$$

和

$$|\bar{\lambda}_{h_{k+1}} - \lambda_{h_{k+1}}| + \|\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_{k+1}}\|_0 \lesssim \eta_a(V_{H,h_{k+1}}) \|\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_{k+1}}\|_1, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} & |(f(\bar{u}_{h_{k+1}}) - f(u_{h_{k+1}}) - f_u(u_{h_{k+1}})(\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_{k+1}}), v)| \\ &\lesssim \eta_a(V_{H,h_{k+1}}) \|\bar{u}_{h_{k+1}} - u_{h_{k+1}}\|_1 \|v\|_1, \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (4.14)$$

结合 (2.7) 和 (4.11)–(4.14), 我们可以得到需要证明的结论 (4.6)–(4.8). $\square$

5 非线性特征值问题的多重网格算法

本节基于前面定义的算法 3.1 和 4.1, 介绍一种求解非线性特征值问题的多重网格方法. 这种多重网格方法可以得到与直接在最细网格上求解非线性特征值问题相同的最优误差阶.

为了进行多重网格计算, 我们在区域 Ω 上定义一系列网格剖分 $\mathcal{T}_{h_1}, \dots, \mathcal{T}_{h_n}$. 首先通过加密最粗网格 $\mathcal{T}_H$ 得到网格 $\mathcal{T}_{h_1}$, 其次之后的每个网格 $\mathcal{T}_{h_k}$ 是由 $\mathcal{T}_{h_{k-1}}$ 通过一次的一致加密 (产生 β^d 个小单元) 得到, 则如下的网格条件成立,

$$h_k \approx \frac{1}{\beta} h_{k-1}, \quad k = 2, \dots, n.$$

在定义的网格序列 $\mathcal{T}_{h_1}, \dots, \mathcal{T}_{h_n}$ 上构造相应的线性有限元空间使其满足如下嵌套关系:

$$V_H \subseteq V_{h_1} \subset V_{h_2} \subset \dots \subset V_{h_n}. \quad (5.1)$$

相应的逼近误差满足如下条件:

$$\delta_{h_k}(u) \approx \frac{1}{\beta} \delta_{h_{k-1}}(u), \quad k = 2, \dots, n. \quad (5.2)$$

下面定义求解非线性特征值问题的多重网格算法.

算法 5.1 特征值多重网格算法.

第 1 步 构造有限元空间序列 $V_{h_1}, V_{h_2}, \dots, V_{h_n}$ 使得 (5.1) 和 (5.2) 成立.

第 2 步 求解如下非线性特征值问题, 求 $(\lambda_{h_1}, u_{h_1}) \in \mathbb{R} \times V_{h_1}$ 使其满足 $b(u_{h_1}, u_{h_1}) = 1$ 和如下方程:

$$a(u_{h_1}, v_{h_1}) = \lambda_{h_1} b(u_{h_1}, v_{h_1}), \quad \forall v_{h_1} \in V_{h_1}. \quad (5.3)$$

第 3 步 对 $k = 1, \dots, n-1$ 做循环. 执行由算法 3.1 或 4.1 定义的单步校正算法

$$(\lambda_{h_{k+1}}, u_{h_{k+1}}) = \text{Correction}(V_H, \lambda_{h_k}, u_{h_k}, V_{h_{k+1}}), \quad (5.4)$$

得到一个新的特征对逼近 $(\lambda_{h_{k+1}}, u_{h_{k+1}}) \in \mathbb{R} \times V_{h_{k+1}}$. 循环结束.

最后得到了一个定义在最细网格 $\mathcal{T}_{h_n}$ 上的特征对逼近 $(\lambda_{h_n}, u_{h_n}) \in \mathbb{R} \times V_{h_n}$.

上面定义的多重网格算法有如下的误差估计.

定理 5.1 在算法 5.1 中, 若采用单步校正算法 3.1, 我们假设定理 3.1 的条件成立; 若采用单步校正算法 4.1, 我们假设定理 4.1 的条件成立. 当条件 $C\beta^2\eta_a(V_H) < 1$ (C 为隐藏在不等式中的相关常数) 成立时, 执行多重网格算法 5.1 所得到的特征对逼近 (λ_{h_n}, u_{h_n}) 有如下误差估计:

$$\|\bar{u}_{h_n} - u_{h_n}\|_1 \lesssim \beta^2 \eta_a(V_{h_n}) \delta_{h_n}(u), \quad (5.5)$$

$$|\bar{\lambda}_{h_n} - \lambda_{h_n}| + \|\bar{u}_{h_n} - u_{h_n}\|_0 \lesssim \eta_a(V_{h_n}) \delta_{h_n}(u). \quad (5.6)$$

证明 这里只给出采用单步校正算法 3.1 所定义的多重网格算法误差估计. 由单步校正算法 4.1 定义的多重网格算法的估计可以类似给出.

由算法 5.1 的定义可以知道 $\bar{u}_{h_1} = u_{h_1}$, $\bar{\lambda}_{h_1} = \lambda_{h_1}$, 则当 $k = 2$ 时, 由定理 3.1 和算法 5.1 可知如下估计成立,

$$\|\bar{u}_{h_2} - u_{h_2}\|_1 \lesssim \eta_a(V_{h_1}) \delta_{h_1}(u), \quad (5.7)$$

$$|\bar{\lambda}_{h_2} - \lambda_{h_2}| + \|\bar{u}_{h_2} - u_{h_2}\|_0 \lesssim \eta_a(V_H) \|\bar{u}_{h_2} - u_{h_2}\|_1 \leq \eta_a(V_H) \eta_a(V_{h_1}) \delta_{h_1}(u), \quad (5.8)$$

$$|(f(\bar{u}_{h_2}) - f(u_{h_2}), v)| \lesssim \eta_a(V_H) \|\bar{u}_{h_2} - u_{h_2}\|_1 \|v\|_1 \lesssim \eta_a(V_H) \eta_a(V_{h_1}) \delta_{h_1}(u) \|v\|_1, \quad \forall v \in V. \quad (5.9)$$

结合定理 3.1 的结论、(5.2)、(5.7)–(5.9) 和递归讨论可以得到最后的特征函数逼近 u_{h_n} 有如下误差估计:

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_{h_n} - u_{h_n}\|_1 &\lesssim \eta_a(V_{h_{n-1}}) \delta_{h_{n-1}}(u) + \|\bar{u}_{h_{n-1}} - u_{h_{n-1}}\|_0 + |\bar{\lambda}_{h_{n-1}} - \lambda_{h_{n-1}}| \\ &\lesssim \eta_a(V_{h_{n-1}}) \delta_{h_{n-1}}(u) + \eta_a(V_H) \|\bar{u}_{h_{n-1}} - u_{h_{n-1}}\|_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \eta_a(V_{h_{n-1}})\delta_{h_{n-1}}(u) + \eta_a(V_H)\eta_a(V_{h_{n-2}})\delta_{h_{n-2}}(u) + \eta_a^2(V_H)\|\bar{u}_{h_{n-2}} - u_{h_{n-2}}\|_1 \\
&\lesssim \sum_{k=1}^{n-1} (\eta_a(V_H))^{n-k-1} \eta_a(V_{h_k})\delta_{h_k}(u) \\
&\lesssim \left(\sum_{k=1}^{n-1} (\beta^2 \eta_a(V_H))^{n-k-1} \right) \beta^2 \eta_a(V_{h_n})\delta_{h_n}(u) \\
&\lesssim \frac{1}{1 - \beta^2 \eta_a(V_H)} \beta^2 \eta_a(V_{h_n})\delta_{h_n}(u) \lesssim \beta^2 \eta_a(V_{h_n})\delta_{h_n}(u).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

这就是所要证明的结论 (5.5). 类似于定理 3 的证明同样可以得到 (5.6). $\square$

注 5.1 由误差估计 (5.5) 和 (5.6) 可以知道, 这里给出的多重网格算法得到的特征函数逼近与直接求解非线性特征值问题得到的特征函数逼近之间在 $H^1(\Omega)$ 模的意义下有超逼近性质, 并且多重网格得到的特征函数与直接求解的特征函数逼近的 $L^2(\Omega)$ 模的误差相同. 特征值的逼近也有相同的误差估计.

推论 5.1 在定理 5.1 的条件下, 执行多重网格算法 5.1 得到的特征对逼近 (λ_{h_n}, u_{h_n}) 有如下的误差估计:

$$\|u - u_{h_n}\|_1 \lesssim \delta_{h_n}(u), \tag{5.11}$$

$$|\lambda - \lambda_{h_n}| + \|u - u_{h_n}\|_0 \lesssim \eta_a(V_{h_n})\delta_{h_n}(u). \tag{5.12}$$

注 5.2 由误差估计 (5.11) 和 (5.12) 可以知道, 多重网格算法得到的特征对逼近与直接求解非线性特征值问题得到的特征对逼近有相同的误差估计.

6 多重网格算法的计算量估计

本节考察算法 5.1 的计算量. 我们将证明多重网格算法 5.1 可以使得非线性特征值问题求解的计算量在一定条件下与求解线性边值问题的计算量相当.

首先定义在每层线性有限元空间的维数为 $N_k := \dim V_{h_k}$, 则易知如下关系成立,

$$N_k \approx \left(\frac{1}{\beta}\right)^{d(n-k)} N_n, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{6.1}$$

值得注意的是, 算法 3.1 和 4.1 的第 2 步的计算量与通常的线性特征值问题的校正算法不一样 (参见文献 [29, 31–33]), 这里需要求解非线性特征值问题 (3.2) 和 (4.5). 我们通常需要采用迭代算法 (自洽场 (self-consistent field, SCF) 迭代或 Newton 迭代) 来求解非线性特征值问题. 每一次非线性迭代都需要重新组装有限元空间 V_{H, h_k} ($k = 2, \dots, n$) 上的刚度矩阵, 而组装这个矩阵所需要的计算量为 $\mathcal{O}(N_k)$. 幸运的是组装矩阵是很容易进行并行化的, 因为组装矩阵时各进程之间几乎不需要进行数据交换.

定理 6.1 假设采用 m 个计算节点来运行算法 5.1, 在有限元空间 V_H 和 V_{h_1} 上求解线性特征值问题分别需要计算量 $\mathcal{O}(M_H)$ 和 $\mathcal{O}(M_{h_1})$, 在每层有限元空间 V_{h_k} 上, 多重网格求解线性边值问题的计算量为 $\mathcal{O}(N_k)$ ($k = 2, 3, \dots, n$). 令 ϖ 表示求解非线性特征值问题 (3.2) 和 (4.5) 的非线性迭代次数, 则在每个进程上的计算量为

$$\text{Total work} = \mathcal{O}\left(\left(1 + \frac{\varpi}{m}\right)N_n + \varpi M_H \log N_n + \varpi M_{h_1}\right). \tag{6.2}$$

证明 令 W_k 表示在 k 层有限元空间 V_{h_k} 上运行校正步时在每个节点上的计算量, 则由单步校正法的定义, 我们有

$$W_k = \mathcal{O}\left(N_k + \varpi\left(M_H + \frac{N_k}{m}\right)\right), \quad k = 2, \dots, n. \quad (6.3)$$

迭代应用估计 (6.3) 和关系 (6.1) 可以得到在单个计算节点上的总体计算为

$$\begin{aligned} \text{Total work} &= \sum_{k=1}^n W_k = \mathcal{O}\left(\varpi\left(M_{h_1} + \frac{N_1}{m}\right) + \sum_{k=2}^n \left(N_k + \varpi\left(M_H + \frac{N_k}{m}\right)\right)\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{\varpi}{m}\right) N_k + (n-1)\varpi M_H + \varpi M_{h_1}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\beta}\right)^{d(n-k)} \left(1 + \frac{\varpi}{m}\right) N_n + \varpi M_H \log N_n + \varpi M_{h_1}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\left(1 + \frac{\varpi}{m}\right) N_n + \varpi M_H \log N_n + \varpi M_{h_1}\right). \end{aligned} \quad (6.4)$$

则所需结论得证. $\square$

注 6.1 在算法 3.1 和 4.1 的第 2 步求解非线性特征值问题的时候, 由于我们经常有足够好的初始值 $\tilde{u}_{h_{k+1}}$, 所以, 求解非线性特征值问题一般不需要很多的迭代步, 往往只需要几步就可以了. 在这种情形下, 如果再有条件 $M_H \ll N_n$ 和 $M_{h_1} \leq N_n$, 可以得到在所有计算节点上的计算量最多为 $\mathcal{O}(N_n)$.

7 总结与展望

本文介绍了一种求解非线性特征值问题的多重网格算法. 其中的主要思想是, 利用多重校正把非线性特征值问题的求解转化成在一序列有限元空间上线性边值问题的求解和在最粗空间上非线性特征值问题的求解. 这里给出的求解非线性特征值问题的多重网格算法可以应用到一些实际特征值问题的求解中去 (参见文献 [3, 35–37]).

当然也可以把这里求解线性边值问题的多重网格算法换成其他高效的迭代算法, 如代数多重网格算法、子空间校正类算法^[11, 13]和基于区域分解的算法^[40]等. 并且这里的框架也可以与并行计算和自适应加密相结合来设计出求解非线性特征值问题的新算法.

致谢 衷心感谢导师林群院士的指导与帮助, 同时也感谢审稿人的建议.

参考文献

- 1 Bao W. The nonlinear Schrödinger equation and applications in Bose-Einstein condensation and plasma physics. In: Dynamics in Models of Coarsening, Coagulation, Condensation and Quantization. IMS Lecture Notes Series, vol. 9. Hackensack, NJ: World Scientific, 2007, 141–240
- 2 Bao W, Du Q. Computing the ground state solution of Bose-Einstein condensates by a normalized gradient flow. SIAM J Sci Comput, 2004, 25: 1674–1697
- 3 Chen H, Gong X, Zhou A. Numerical approximations of a nonlinear eigenvalue problem and applications to a density functional model. Math Methods Appl Sci, 2010, 33: 1723–1742
- 4 Kohn W, Sham L. Self-consistent equations including exchange and correlation effects. Phys Rev A, 1965, 140: 4743–4754

- 5 Parr R, Yang W. Density-Functional Theory of Atoms and Molecules. New York: Oxford University Press; Oxford: Clarendon Press, 1994
- 6 Martin R. Electronic Structure: Basic Theory and Practical Methods. London: Cambridge University Press, 2004
- 7 Sulem C, Sulem P. The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-focusing and Wave Collapse. New York: Springer-Verlag, 1999
- 8 Zhou A. Finite element approximation for the electronic ground state solution of molecular system. *Math Methods Appl Sci*, 2007, 30: 429–447
- 9 Bramble J, Zhang X. The Analysis of Multigrid Methods. *Handbook of Numerical Analysis*, vol. 7. Amsterdam: Elsevier, 200, 173–415
- 10 Hiptmair R, Xu J. Nodal auxiliary space preconditioning in $H(\text{curl})$ and $H(\text{div})$ spaces. *SIAM J Numer Anal*, 2007, 45: 2483–2509
- 11 Xu J. Iterative methods by space decomposition and subspace correction. *SIAM Rev*, 1992, 34: 581–613
- 12 Bramble J. Multigrid Methods. *Pitman Research Notes in Mathematics*, vol. 294. New York: John Wiley and Sons, 1993
- 13 Brenner S, Scott L. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. New York: Springer-Verlag, 1994
- 14 Hackbusch W. Multi-grid Methods and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 1985
- 15 McCormick S. Multigrid Methods. *SIAM Frontiers in Applied Mathematics* 3. Philadelphia: SIAM, 1987
- 16 Shaidurov V. Multigrid Methods for Finite Elements. Netherlands: Kluwer Academic Publics, 1995
- 17 林群. 算子方程近似解的一些问题. *应用数学学报*, 1979, 22: 219–230
- 18 林群, 谢干权. 本征值问题的有限元方法的加速. *科学通报*, 1981, 26: 449–452
- 19 Lin Q. Iterative refinement of finite element approximations for elliptic problems. *RAIRO Anal Numer*, 1982, 16: 39–47
- 20 Xu J, Zhou A. A two-grid discretization scheme for eigenvalue problems. *Math Comp*, 2001, 70: 17–25
- 21 Zhou A. Multi-level adaptive corrections in finite dimensional approximations. *J Comput Math*, 2010, 28: 45–54
- 22 Hu X, Cheng X. Acceleration of a two-grid method for eigenvalue problems. *Math Comp*, 2011, 80: 1287–1301
- 23 Luo F, Lin Q, Xie H. Computing the lower and upper bounds of Laplace eigenvalue problem: By combining conforming and nonconforming finite element methods. *Sci China Math*, 2012, 55: 1069–1082
- 24 Xu J. A new class of iterative methods for nonselfadjoint or indefinite problems. *SIAM J Numer Anal*, 1992, 29: 303–319
- 25 Xu J. Two-grid discretization techniques for linear and nonlinear PDEs. *SIAM J Numer Anal*, 1996, 33: 1759–1777
- 26 Xu J, Zhou A. Local and parallel finite element algorithm for eigenvalue problems. *Acta Math Appl Sin Engl Ser*, 2002, 18: 185–200
- 27 Yang Y, Fan X. Generalized Rayleigh quotient and finite element two-grid discretization schemes. *Sci China Ser A*, 2009, 52: 1955–1972
- 28 Yang Y, Bi H. Two-grid finite element discretization schemes based on shifted-inverse power method for elliptic eigenvalue problems. *SIAM J Numer Anal*, 2011, 49: 1602–1624
- 29 Lin Q, Xie H. A multi-level correction scheme for eigenvalue problems. *Math Comp*, 2015, 84: 71–88
- 30 Lin Q, Xie H. A Type of Multigrid Method for Eigenvalue Problem. Research Report of LSEC, 2011, Report No. ICMSEC-2011-06
- 31 Xie H. A type of multilevel method for the Steklov eigenvalue problem. *IMA J Numer Anal*, 2014, 34: 592–608
- 32 Xie H. A Type of Multi-level Correction Method for Eigenvalue Problems by Nonconforming Finite Element Methods. Research Report in ICMSEC, 2012, Report No. ICMSEC-2012-10
- 33 Xie H. A multigrid method for eigenvalue problem. *J Comput Phys*, 2014, 274: 550–561
- 34 Ciarlet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problems. Amsterdam: North-holland, 1978
- 35 Cancès E, Chakir R, Maday Y. Numerical analysis of nonlinear eigenvalue problems. *J Sci Comput*, 2010, 45: 90–117
- 36 Chen H, He L, Zhou A. Finite element approximations of nonlinear eigenvalue problems in quantum physics. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2011, 200: 1846–1865
- 37 Chen H, Gong X, He L, et al. Numerical analysis of finite dimensional approximations of Kohn-Sham models. *Adv Comput Math*, 2013, 38: 225–256
- 38 Zhou A. An analysis of finite-dimensional approximations for the ground state solution of Bose-Einstein condensates. *Nonlinearity*, 2004, 17: 541–550
- 39 Xu J. A novel two-grid method for semilinear elliptic equations. *SIAM J Sci Comput*, 1994, 15: 231–237
- 40 Toselli A, Widlund O. Domain Decomposition Methods: Algorithm and Theory. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2005

A multigrid method for nonlinear eigenvalue problems

XIE HeHu

Abstract A multigrid method is proposed for solving nonlinear eigenvalue problems by the finite element method. With this new scheme, solving nonlinear eigenvalue problem is transformed to a series of solutions of linear boundary value problems on multilevel finite element spaces and a series of nonlinear eigenvalue problems on the coarsest finite dimensional space. The computational work of this new scheme can reach almost the same optimality as the solution of the corresponding linear boundary value problem when stiff and mass matrices are assembled in parallel. Therefore, this type of multilevel correction scheme improves the overfull efficiency for the nonlinear eigenvalue problem solving.

Keywords nonlinear eigenvalue problem, finite element method, multilevel correction, multigrid

MSC(2010) 65N30, 65N25, 65L15, 65B99

doi: 10.1360/N012014-00187