正则图的邻强边染色和全染色

张忠辅^{①②}, Douglas R. WOODALL^③, 姚兵^②, 陈祥恩^②, 李敬文^{①*}, 卞量^④

① 兰州交通大学应用数学研究所, 兰州 730070

② 西北师范大学数学与信息科学学院, 兰州 730070

③ School of Mathematical Sciences, University of Nottingham, Nottingham, NG7 2RD, UK

④ 曲阜师范大学运筹研究所, 曲阜 273165

* E-mail: leejwcn@yahoo.com.cn

收稿日期: 2008-03-24; 接受日期: 2008-07-16

国家自然科学基金 (批准号: 10771091) 资助项目

摘要 如果 k -正则图 G 不含 5-圈的分支, 则猜测 $\chi'_{\text{as}}(G) = \chi_t(G)$. 证明这个猜想对很多图类都成立, 例如: 第 1 类型图、2-正则图、3-正则图、 $(|V(G)| - 2)$ -正则图、二部图、完全等多部图、 k -方体以及一些特殊的联图类等.

关键词 图 正则图 全染色 邻强边染色

MSC(2000) 主题分类 05C15, 68R10

1 引言及定义

若无特别声明, 本文涉及的图均为无向、简单、有限图, 且所论及的每一个着色皆是正常的 (即图中任意两个相邻顶点, 或两条相邻边, 或有着关联关系的一个顶点和一条边均有着不同的色). 若一个图 $G = (V, E)$ 的某个着色至多用 k 种不同的颜色, 则称这个着色为 k -着色. 为简便起见, 以下用集合速写 $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$ 表示一个 k -着色 f 的色集合, 也会用到另一个集合速写 $[s, t] = \{s, s+1, \dots, t\}$ ($t > s \geq 1$), 这里 k, s, t 皆为自然数. 图 G 的一个顶点或一条边 x 在 f 下所着的色记为 $f(x)$, 即 $f(x) \in [k]$.

图 $G = (V, E)$ 的一个 k -全着色 τ 是并集 $V \cup E$ 到色集合 $[k]$ 上的一个映射, 使得对任意 2 个元素 $x, y \in V \cup E$, 总有 $\tau(x) \neq \tau(y)$. 图 G 的全色数 $\chi_t(G)$ 是一个最小的正整数 k , 使得图 G 有一个 k -全着色.

设映射 $\sigma: E \rightarrow [k]$ 是图 $G = (V, E)$ 的一个 k -边着色. 对每一个顶点 $v \in V$, 与 v 相邻的顶点集记为 $N(v) = \{u \mid u \in V, uv \in E\}$. 记号 $C_\sigma(v)$ 表示所有与 v 关联的边在 σ 下所着的色, 即 $C_\sigma(v) = \{\sigma(uv) \mid u \in N(v)\}$, 从而, 记集合 $\overline{C}_\sigma(v) = [k] \setminus C_\sigma(v)$ 包含了所有不出现在与 v 关联的边上的色. 称图 G 的一个 k -边着色 σ 是邻强 k -边着色, 如果对每一条边 $uv \in E$, 总有 $C_\sigma(u) \neq C_\sigma(v)$, 以下简称 σ 为图 G 的一个 k -ASEC. 图 G 的邻强边色数记为 $\chi'_{\text{as}}(G)$, 使得图 G 的任意一个 k -ASEC 满足 $k \geq \chi'_{\text{as}}(G)$. 如果图 G 有一个同构于 K_2 的分支, 则规定 $\chi'_{\text{as}}(G) = \infty$.

下表给出了几个常见图类有关于 $\Delta(G)$ 和 $\chi_t(G)$ 以及 $\chi'_{as}(G)$ 这 3 个数的解释^[1]:

G	$\Delta(G)$	$\chi_t(G)$	$\chi'_{as}(G)$
P_5	2	3	3
C_5	2	4	5
$C_5 + \text{悬挂边}$	3	4	3
$C_5 + \text{弦}$	3	4	4
$K_{r,s} (r > s \geq 1)$	r	$r+1$	r
$K_{r,r} (r \geq 2)$	r	$r+2$	$r+2$

其中 $\Delta(G)$ 是图 G 的最大度; P_n 和 C_n 分别表示 n 个顶点的路和圈; $K_{r,s}$ 表示完全二部分图. 这里的“ $C_5 + \text{悬挂边}$ ”表示圈 C_5 上一个顶点与一个一度顶点相邻, “ $C_5 + \text{弦}$ ”则是指圈 C_5 上 2 个不相邻的顶点之间连接了一条边, 而不是图的运算.

显然有 $\chi_t(G) \geq \Delta(G) + 1$ 和 $\chi'_{as}(G) \geq \Delta(G)$. 易知, 给图 G 添加边将会造成它的邻强边色数 χ'_{as} 减少. 然而, 给图 G 添加边的做法并不能够保证全色数 χ_t 一定会单调减少, 或者 χ_t 一定会单调增多. 但是, 下面将看到全色数 χ_t 和邻强边色数 χ'_{as} 之间存在着一定的联系和十分相像的猜测.

猜想 1 (全着色猜想)^[2-6] 对任意图 G , 总有

$$\chi_t(G) \leq \Delta(G) + 2.$$

猜想 2^[1] 对每一个不含同构于 K_2 或 C_5 分支的图 G , 则有

$$\chi'_{as}(G) \leq \Delta(G) + 2.$$

类似地, 有邻点可区别全染色等猜想^[7-10]. 关于平面图的全色数的结果可见文献^[11]. 结合上述两个猜想, 我们便得到下面的两个猜想:

猜想 3 对每一个不含同构于 K_2 或 C_5 分支的图 G , 有

$$\chi'_{as}(G) \leq \chi_t(G).$$

猜想 4 对每一个不含同构于 C_5 分支的 k -正则图 G ($k \geq 2$), 有

$$\chi'_{as}(G) = \chi_t(G).$$

十分清楚, 对连通图证明上述猜想就足够了.

定理 1 (a) 猜想 1 和 2 意味着猜想 4.

(b) 猜想 1 和 3 隐含了猜想 2.

(c) 猜想 2 和 4 隐含了猜想 1.

证明 由于结论 (a) 是下面推论 3 的一个直接结果, 且结论 (b) 又是显然的, 故仅需证明结论 (c).

如果 $\Delta(G) \leq 2$, 则猜想 1 正确, 因而设 $\Delta(G) = k \geq 3$. Behzad^[3] 指出: 存在一个 k -正则图 H , 使得 $G \subseteq H$. 于是,

$$\chi_t(G) \leq \chi_t(H) = \chi'_{as}(H) \leq \Delta(H) + 2 = \Delta(G) + 2,$$

注意到, 在上面式子中的第 1 个不等式和第 2 个等式分别是猜想 4 和 2, 结论 (c) 得证.

定理 2 设 $G = (V, E)$ 是 k -正则图, 其中 $k \geq 2$, 则 $\chi_t(G) \geq k + 1$, $\chi'_{as}(G) \geq k + 1$ 和 $\chi_t(G) = k + 1$ 当且仅当 $\chi'_{as}(G) = k + 1$.

证明 当图 G 是 k -正则图时, 不等式 $\chi_t(G) \geq k+1$ 和 $\chi'_{as}(G) \geq k+1$ 是显然的.

先证充分性. 假设 $\sigma: E \rightarrow [k+1]$ 是 G 的一个 $(k+1)$ -ASEC. 注意到图 G 的每一个顶点 v 的相邻边色集合 $C_\sigma(v) = \{\sigma(uv) \mid u \in N(v)\}$ 是唯一的, 且 $|C_\sigma(v)| = k$ 以及 $|\overline{C}_\sigma(v)| = 1$. 再由 ASEC 的定义, σ 给出 G 的一个 $(k+1)$ -全着色.

其次证明必要性. 设 $\tau: V \cup E \rightarrow [k+1]$ 是 G 的一个 $(k+1)$ -全着色, 则 G 有一个边着色 σ , 使得对任意一条边 $uv \in E(G)$, 有 $\sigma(uv) = \tau(uv)$. 因为顶点 u 和 v 是相邻的, 故有 $\tau(u) \neq \tau(v)$, 从而得 $C_\sigma(u) = [k+1] \setminus \{\tau(u)\} \neq [k+1] \setminus \{\tau(v)\} = C_\sigma(v)$. 这说明 σ 是 G 的一个 $(k+1)$ -ASEC. 证毕.

推论 3 对每一个 k -正则图 G , 且它使猜想 1 和 2 皆成立, 即有 $\chi_t(G) \leq k+2$ 和 $\chi'_{as}(G) \leq k+2$, 则猜想 4 成立.

当 $r \geq k+2$ 时, 关于 k -正则图 G 的 r -全着色和 r -ASECs 之间就没有像定理 2 所描述的等式, 下面的定理 5 就给出了一个解释.

本文的其余部分是关于一些图类进行猜想 4 成立的验证.

2 图的分类

为方便起见, 如果图 G 满足 $\chi_t(G) = \Delta(G) + 1$, 则称 G 为第 1 类型图. k -立方图 Q_k 的每一个顶点均表示成 n 维数组 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, 其中 $a_i = 0$ 或 $a_i = 1$ ($1 \leq i \leq n$). k -立方图 Q_k 的 2 个顶点 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 和 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ 相邻当且仅当除一个坐标 j 外, 均有 $a_i = b_i$, $i \neq j$, $1 \leq i \leq n$.

下面的定理包括了几个显然或已有的结论:

定理 4 对下列正则图类, 猜想 4 成立:

- (i) 第 1 类型图; (ii) 2-正则图; (iii) 3-正则图;
- (iv) 二部分图; (v) 完全等多部分图; (vi) k -立方图.

证明 (i) 由定理 2, 知第 1 类型图使猜想 4 成立.

(ii) n 个顶点圈 C_n 的 2 次幂 C_n^2 是给 C_n 的两个顶点连一条边, 如果这两个顶点的距离不大于 2. 不难看出

$$\chi(C_n^2) = \begin{cases} 5, & \text{若 } n = 5, \\ 3, & \text{若 } n \equiv 0 \pmod{3}, \\ 4, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 $\chi(G)$ 是图 G 的正常色数. 易见 $\chi_t(C_n) = \chi(C_{2n}^2)$ 和 $\chi'_{as}(C_n) = \chi(C_n^2)$, 除去 $n = 5$, 均有 $\chi_t(C_n) = \chi'_{as}(C_n)$. 这就证明了连通的 2-正则图, 也就是全体 2-正则图使得猜想 4 成立.

(iii) 注意到, Rosenfeld^[12] 和 Vijayaditya^[13] 均证得 $\chi_t(G) \leq 5$ ($\Delta(G) = 3$), 并且 Balister 等^[14] 证实 $\chi'_{as}(G) \leq 5$ ($\Delta(G) = 3$). 根据推论 3, 猜想 4 对 3-正则图成立.

(iv) König^[15] 证明了每一个二部分图 G 是 $\Delta(G)$ -边可着色的, 从而有 $\chi_t(G) \leq \Delta(G) + 2$. 对二部分图 G , Balister 等^[14] 证明了 $\chi'_{as}(G) \leq \Delta(G) + 2$, 根据推论 3, 猜想 4 对每一个二部分图为真.

(v) 令 $K(r, n)$ 表示一个完全等多部分图, 即 $K(r, n)$ 的 r 个部分顶点集的每一个均有 n

个顶点. Bermond^[16] 证明了如下的结论:

$$\chi_t(K(r, n)) = \begin{cases} \Delta(K(r, n)) + 2, & \text{若 } r = 2, \text{ 或 } r \text{ 为偶数以及 } n \text{ 是奇数,} \\ \Delta(K(r, n)) + 1, & \text{其他.} \end{cases}$$

Černý 等^[17, 18] 证明了 $\chi'_{as}(K(r, n)) \leq \Delta(K(r, n)) + 2$ 对任意情形均成立. 其实, 他们还证明了: $\Delta(K(r, n)) + 2$ 种色足以保证 $K(r, n)$ 有一个正常边着色 σ , 使得对任意两个顶点 u 和 v , 总有 $C_\sigma(u) \neq C_\sigma(v)$, 而并不计较这两个顶点是否相邻. 依照推论 3, 猜想 4 对每一个完全等多部分图 $K(r, n)$ 为真.

(vi) 在文献 [19] 中, Zhao 和 Zhang 证得

$$\chi_t(Q_k) = \begin{cases} \Delta(Q_2) + 2 = 4, & \text{若 } k = 2, \\ \Delta(Q_k) + 1 = k + 1, & \text{若 } k \geq 3. \end{cases}$$

因为 $Q_2 = C_4$, 则由 (ii) 知, Q_2 使得猜想 4 成立. 又由 $\chi_t(Q_k) = \Delta(Q_k) + 1$ ($k \geq 3$), 根据定理 2, 每一个 k -立方图 Q_k 均使得猜想 4 成立.

更加仔细地检查完全二部分图的情形将是有益的. 令完全二部分图 $K_{n,n}$ ($n \geq 2$) 的顶点二部分集分别是 U 和 W . 显然, $\chi_t(K_{n,n}) \geq n + 2$. 不难找到 $K_{n,n}$ 的一个 $(n + 2)$ -全着色, 给 U 的所有顶点着一种色, W 的所有顶点着另一种色, 剩余的 n 种色正常地分配给 $K_{n,n}$ 的边. 然而, 此时的 n -边着色 σ 却不再是完全二部分图 $K_{n,n}$ 的邻强边着色, 因为任意两个 $C_\sigma(v)$ 和 $C_\sigma(u)$ 有着相同的元素! 但是, 可以构造 $K_{n,n}$ 的一个邻强 $(n + 2)$ -边着色 $f: E(G) \rightarrow [n + 2]$. 令 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_{n+1}\}$ 和 $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, 则定义 $f(u_i w_j) \equiv i + j \pmod{n + 2}$. 对每一个 i , 易算出 $\overline{C}_f(u_i) \equiv \{i - 1, i\}$ 和 $\overline{C}_f(w_i) \equiv \{i - 2, i\} \pmod{n + 2}$. 显然, 当 $n = 2$, 这个边着色 f 是一个 4-ASEC, 可以将它扩展到 $K_{2,2}$ 的一个 4-全着色. 但对 $n \geq 3$, 这个边着色 f 却不可以拓展成为 $K_{n,n}$ 的一个 $(n + 2)$ -全着色. 如果 n 是偶数, 则有 $K_{n,n}$ 的一个 $(n + 2)$ -ASEC, 可以拓展成为 $K_{n,n}$ 的一个 $(n + 2)$ -全着色. 对 $K_{n,n}$ 的 $\frac{1}{2}n$ 个不交的拷贝 $K_{2,2}$ 使用上面关于 $K_{2,2}$ 的 4-ASEC, 注意到 $K_{n,n}$ 中未着色的边导出一个 $(n - 2)$ -正则二部分图, 然后将剩余的 $n - 2$ 种色按正常着色分配给这个正则二部分图的边. 这个 ASEC 可以拓展成为 $K_{n,n}$ 的一个 $(n + 2)$ -全着色. 当 n 是奇数且 $n \geq 5$, 不清楚是否有 $K_{n,n}$ 的一个 $(n + 2)$ -ASEC, 使得它可以扩展成为 $K_{n,n}$ 的一个 $(n + 2)$ -全着色. 至少对情形 $n = 3$ 是不可能的.

定理 5 $K_{3,3}$ 不含任意可以扩展到 5-全着色的 5-ASEC.

证明 令 $K_{3,3}$ 顶点集二部划分为 $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ 和 $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, 并令 $\sigma: E(K_{3,3}) \rightarrow [5]$ 是它的一个正常 5-边着色. 对每一个 $c \in [5]$, 记号 $t(c)$ 表示包含色 c 的集合 $\overline{C}_\sigma(u_i)$ ($i \in [3]$) 的个数. 于是, 色 c 被使用了 $3 - t(c)$ 次, 它也被 $t(c)$ 个集合 $\overline{C}_\sigma(w_j)$ ($j \in [3]$) 所包含. 如果有 $c = c_1, c_2$, 使得 $t(c) \geq 2$, 显然地, 存在某 $i, j \in [3]$, 使得 $\overline{C}_\sigma(u_i) = \overline{C}_\sigma(w_j) = \{c_1, c_2\}$; 如果有某色 c 使得 $t(c) = 3$, 则集合 $\overline{C}_\sigma(u_i)$ 按某序与集合 $\overline{C}_\sigma(w_j)$ 具有相同的元素; 在其他的情形里, σ 不是 ASEC.

当 σ 是一个 ASEC 时, 集合 $\overline{C}_\sigma(u_i)$ 必须包含一种色两次, 其余的色各一次. 不失一般性, 可设 $\overline{C}_\sigma(u_1) = \{1, 2\}$, $\overline{C}_\sigma(u_2) = \{1, 3\}$, $\overline{C}_\sigma(u_3) = \{4, 5\}$. 由于这 3 个集合不能够等于集合 $\overline{C}_\sigma(w_j)$ ($1 \leq j \leq 3$) 中的任意一个, 故有 $\overline{C}_\sigma(w_1) = \{1, 4\}$, $\overline{C}_\sigma(w_2) = \{1, 5\}$, $\overline{C}_\sigma(w_3) = \{2, 3\}$. 此时若要将 σ 扩张成一个 5-全着色, 则必须给顶点 u_1 或 u_2 着色 1, 否则就不能够给顶点

w_3 着色; 相似地, 必须给顶点 wu_1 或 w_2 着色 1, 但这是不允许发生的事情.

两个图 H 和 T 的联图记为 $H + T$, 使得 $V(H + T) = V(H) \cup V(T)$, $E(H + T) = E(H) \cup E(T) \cup \{uv \mid u \in V(H), v \in V(T)\}$. 在证明有关联图的结论之前, 我们需要下面的引理.

引理 6 对 $n \geq 2$, 令 $K_{n,n}$ 的两个顶点部分集分别为

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \quad W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}, \quad (1)$$

则存在一个 $(n+2)$ -边着色 $\sigma: E(K_{n,n}) \rightarrow [n+2]$, 使得对每一个 $i \in [n-1]$, 存在 $\overline{C}_\sigma(u_i) = \overline{C}_\sigma(w_i) = \{i, i+1\}$, 并且有 $\overline{C}_\sigma(u_n) = \overline{C}_\sigma(w_n) = \{n, 1\}$.

证明 令 $\overline{j-i}$ 表示 $j-i$ 在模 n 下的值. 在模 n 下 σ 取值于 $[n]$. 我们的 σ 的定义稍微不同于 n 的奇偶性. 如果 n 为奇数, 比如 $n = 2k+1$, 则定义

$$\sigma(u_i w_j) = \begin{cases} 2i - j \pmod{n}, & \text{若 } \overline{j-i} \in [k-1], \\ n+1, & \text{若 } \overline{j-i} = k, \\ n+2, & \text{若 } \overline{j-i} = k+1, \\ 2i - j + 2 \pmod{n}, & \text{若 } \overline{j-i} \in [k+2, n-1] \cup \{0\}. \end{cases}$$

当 n 是偶数时, 即 $n = 2k$, 我们定义

$$\sigma(u_i w_j) = \begin{cases} 2i - j \pmod{n}, & \text{若 } \overline{j-i} \in [k-1], \\ n+1, & \text{若 } \overline{j-i} = k, \\ 2i - j + 1 \pmod{n}, & \text{若 } \overline{j-i} \in [k+1, n-1], \\ n+2, & \text{若 } \overline{j-i} = 0. \end{cases}$$

直接可以验证 σ 关于上述每一种情形具有所要求的性质.

我们考虑匹配和圈的联图.

定理 7 令 $H = (\frac{1}{2}n)K_2 + (\frac{1}{2}n)K_2$, 其中 n 为偶数, 则

$$\chi_t(H) = \chi'_{as}(H) = \begin{cases} \Delta(H) + 2 = 5, & \text{若 } n = 2, \\ \Delta(H) + 1 = n + 2, & \text{若 } n \geq 4. \end{cases}$$

证明 如果 $n = 2$, 则有 $H = K_4$, 且结论由定理 4 中 (v) 即可证得. 下设 $n \geq 4$.

令 F 和 F' 是 $(\frac{1}{2}n)K_2$ 在 H 中的拷贝, 再令 $U = V(F)$ 和 $W = V(F')$, 则有 $K = U + W \cong K_{n,n}$. 定义一个 $(n+2)$ -边着色 $\sigma: E(K) \rightarrow [n+2]$ 如下: 令

$$E(F) = \{u_n u_1, u_2 u_3, u_4 u_5, \dots, u_{n-2} u_{n-1}\}, \quad (2)$$

$$E(H) = \{w_1 w_2, w_3 w_4, w_5 w_6, \dots, w_{n-1} w_n\},$$

对每一个 $i \in [n]$, 把色 i 着给

$$\begin{cases} \text{顶点 } u_{i-1} \text{ 和 } u_i \text{ 以及边 } w_{i-1} w_i, & \text{如果 } i \text{ 是偶数,} \\ \text{顶点 } w_{i-1} \text{ 和 } w_i \text{ 以及边 } u_{i-1} u_i, & \text{如果 } i \text{ 是奇数,} \end{cases} \quad (3)$$

其中下标取模 n . 不难看出, 这正是 H 的一个 $(n+2)$ -全着色. 注意到 $\Delta(H) = n+1$, 根据定理 2, 结论得证.

定理 8 令 $G = C_n + C_n$, 则有

$$\chi_t(G) = \chi'_{as}(G) = \begin{cases} \Delta(G) + 1 = n + 3, & \text{若 } n \text{ 为偶数,} \\ \Delta(G) + 2 = n + 4, & \text{若 } n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

证明 首先考虑 n 为偶数的情形, 显然有 $n \geq 4$. 在定理 7 中已经给出 $H = (\frac{1}{2}n)K_2 + (\frac{1}{2}n)K_2$ 的一个 $(n+2)$ -全着色 σ , 下面使用定理 7 中对 H 的顶点的描述, 见式 (2). 对 $i \in [n]$, 若 i 为偶数, 给 H 添加边 $u_i u_{i+3}$; 当 i 为奇数时, 给 H 添加边 $w_i w_{i+3}$, 从而形成 $G = C_n + C_n$. 给这些新添加的边着新色 $n+3$, 从而得到 G 的一个 $(n+3)$ -全着色, 根据定理 2, 结论得证.

其次证明 n 为奇数的结论. 设 G 中 C_n 的两个拷贝分别是 F 和 F' , 并令 $U = V(F)$ 和 $W = V(F')$, 从而有 $K = U + W \cong K_{n,n}$. 显然有 $\chi_t(G) \geq n+4$, 这是因为 G 的一个 $(n+3)$ -全着色中的每一种色均出现在顶点 v 上 (在顶点 v 上或是与 v 关联的边上), 也就是说每一种色被偶数个顶点所使用, 即是 U 的所有顶点, 或者是 W 的所有顶点. 但这是不可能的, 因为 $|U| = |W| = n$ 是奇数. 下面证明 $\chi_t(G) \leq n+4$ 和 $\chi'_{as}(G) \leq n+4$.

若 $n=3$, 则 $G \cong K_6$, 由定理 4 的 (v), 即得结论, 故下设 $n \geq 5$. 设 $\sigma: E(K) \rightarrow [n+2]$ 是引理 6 中定义的 $(n+2)$ -边着色. 使用引理 6 中对 U 和 W 的描述, 见式 (1). 对于 $i \in [n-1]$, 当 i 是奇数, 添加着有色 i 的边 $u_{i-1} u_i$, 当 i 是偶数, 添加着有色 i 的边 $w_{i-1} w_i \pmod{n}$. 然后添加着有色 $n+3$ 的边 $u_{n-1} u_n$ 和着有色 $n+4$ 的边 $w_{n-1} w_n$; 对每一个偶数 i ($2 \leq i \leq n-5$), 添加着有色 $n+4$ 的边 $u_i u_{i+3}$, 还有着有色 $n+4$ 的边 $u_{n-3} u_1$ 和 $u_{n-1} u_3$. 对每一个奇数 i ($1 \leq i \leq n-6$), 添加着有色 $n+3$ 的边 $w_i w_{i+3}$, 以及着有色 $n+3$ 的边 $w_{n-4} w_n$ 和 $w_{n-2} w_2$. 最终, 得到一个具有 $(n+4)$ -ASEC 的 $G = C_n + C_n$, 且有

$$\overline{C}_{\sigma^+}(u_i) = \begin{cases} \{i, n+3\}, & 2 \leq i \leq n-3, i \text{ 为偶数,} \\ \{i+1, n+3\}, & 1 \leq i \leq n-2, i \text{ 为奇数,} \\ \{n-1, n\}, & i = n-1, \\ \{n, n+4\}, & i = n, \end{cases}$$

和

$$\overline{C}_{\sigma^+}(w_i) = \begin{cases} \{i, n+4\}, & 1 \leq i \leq n-2, i \text{ 为奇数,} \\ \{i+1, n+4\}, & 2 \leq i \leq n-3, i \text{ 为偶数,} \\ \{n, n+3\}, & i = n-1, \\ \{n, 1\}, & i = n. \end{cases}$$

此外, 对 i 是偶数, 用色 i 或色 $i+1$ 给顶点 u_i 着色; 对 i 是奇数, 用色 i 或色 $i+1$ 给顶点 w_i 着色; 给顶点 u_n 着色 $n+4$, 给顶点 w_n 着色 1, 因而得到具有最大度为 $n+2$ 的图 G 的一个 $(n+4)$ -全着色, 根据推论 3, 我们证得 $\chi_t(G) = n+4$ 以及 $\chi'_{as}(G) = n+4$.

为了证明最后有关 $(|V(G)|-2)$ -正则图的结论, 我们要用到下面的引理.

引理 9 设 n 是偶整数且 $n \geq 6$, 则完全图 K_n 有一个完美匹配 M 和一个 $(n-1)$ -边着色, 使得 M 中的所有的边均着有不同的色.

证明 令完全图 K_n 的顶点集为 $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. 使用 K_n (n 为偶数) 的一个正常 $(n-1)$ -边着色, 使得对每一个 $i \in [n-1]$, 色 i 着给边 $v_n v_i$ 以及边 $v_{i-j} v_{i+j}$ ($1 \leq j \leq \frac{1}{2}n-1$,

$\bmod n-1$). 我们可以把顶点 $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ 等距地安置在以顶点 v_n 为中心的车轮上, 使得边 $v_n v_i$ 形如车轮的辐条. 当车轮上的弦 $v_r v_s$ ($r \neq n, s \neq n$) 垂直于辐条 $v_n v_i$ 时, 给它们着相同的色, 即平行的弦着同色; 具有相同长度的弦着不同的色. 因而, 两条弦 $v_p v_q$ 和 $v_r v_s$ 着一色 i 当且仅当 $p+q \equiv r+s \equiv 2i \pmod{n-1}$.

设 $n = 2k$, 我们在以下 3 种情形里构造匹配 M :

情形 1. $n \equiv 2 \pmod{4}$, 即 k 是奇数, 则 M 含有边 $v_n v_1, v_2 v_3, v_4 v_5, \dots, v_{n-2} v_{n-1}$. 注意, 边 $v_n v_1$ 着有色 1, 且当 k 是偶数时, 边 $v_k v_{k+1}$ 也着有色 1, 不过此时边 $v_k v_{k+1}$ 不在 M 中, 从而匹配 M 中所有的边皆着有不同的色.

情形 2. $n \equiv 4 \pmod{8}$, 即 $k \equiv 2 \pmod{4}$. 我们使 M 含有边 $v_n v_1, v_{n-2} v_{n-1}$ 以及形如 $v_i v_{i+2}$ 和 $v_{i+1} v_{i+3}$ 的边 ($i = 2, 6, \dots, n-6$). 注意, 边 $v_n v_1$ 着有色 1, 且边 $v_{n-1} v_2$ 也着有色 1, 不过此时它不在 M 中. 边 $v_{n-2} v_{n-1}$ 与边 $v_{k-2} v_k$ (此时它不在 M 中) 着有相同的色 $k \equiv 2 \pmod{4}$. 所以, 匹配 M 中不存在两条着有相同色的边.

情形 3. $n \equiv 0 \pmod{8}$, 即 $k \equiv 0 \pmod{4}$. 我们使 M 含有边 $v_n v_1, v_{n-3} v_{n-1}, v_{n-2} v_2, v_{k-1} v_k$ 以及全体形如 $v_i v_{i+2}$ 和 $v_{i+1} v_{i+3}$ 的边 ($i = 3, 7, \dots, k-5, k+1, k+5, \dots, n-7$). 注意, 边 $v_{k-1} v_k$ 和边 $v_{n-2} v_1$ (此时它不在 M 中) 着有相同的色; 边 $v_{n-2} v_2$ 和边 $v_{k-1} v_{k+1}$ (此时它不在 M 中) 着有相同的色. 故匹配 M 的全体边均着有不同的色.

定理 10 设 G 是一个 n 阶 $(n-2)$ -正则图, 其中 $n \geq 4$, 则有

$$\chi_t(G) = \chi'_{as}(G) = \begin{cases} \Delta(G) + 2 = 4, & \text{若 } n = 4, \\ \Delta(G) + 1 = n - 1, & \text{其他.} \end{cases}$$

证明 显然, n 是偶数, 并且 $G \cong K_n - M$, 这里 M 是 K_n 的一个完美匹配. 如果 $n = 4$, 则 $G \cong C_4$, 根据定理 4 的部分 (ii), 结论得证. 现设 $n \geq 6$.

根据引理 9, 存在完全图 K_n 的一个 $(n-1)$ -边着色, 使得 M 的所有边均着有不同的色. 对于 K_n 的每一个顶点 v , 把 M 中关联于这个顶点的边的色着给 v , 然后删去 M 中所有的边, 我们得到 $K_n - M \cong G$ 的一个 $(n-1)$ -全着色. 依据定理 2, 本定理得证.

致谢 十分感谢审稿人给予我们重要的、有价值的修改意见, 使得本文得到更好的改进.

参考文献

- 1 Zhang Z F, Liu L Z, Wang J F. Adjacent strong edge coloring of graphs. *Appl Math Lett*, **15**: 623–626 (2002)
- 2 Behzad M. Graphs and their chromatic numbers. PhD thesis. Michigan State University, 1965
- 3 Behzad M. The total chromatic number of a graph: A survey. In: Welsh D J A, ed. *Combinatorial Mathematics and its Applications*. London: Academic Press, 1971. 1–8
- 4 Vizing V G. On an estimate of the chromatic class of a p -graph (in Russian). *Metody Diskret Analiz*, **3**: 25–30 (1964)
- 5 Vizing V G. The chromatic class of a multigraph (in Russian). *Kibernetika (Kiev)*, **3**: 29–39 (1965)
- 6 张忠辅, 张建勋, 王建方. 若干图的全染色. 中国科学 A 辑: 数学, **18**(6): 595–600 (1988)
- 7 张忠辅, 陈祥恩, 李敬文, 等. 关于图的邻点可区别全染色. 中国科学 A 辑: 数学, **34**(5): 574–583 (2004)

- 8 张忠辅, 李敬文, 陈祥恩, 等. 图的距离不超过 β 的点可区别全染色. *中国科学 A 辑: 数学*, **36**(10): 1119–1130 (2006)
- 9 张忠辅, 程辉, 姚兵, 等. 图的邻点强可区别全染色. *中国科学 A 辑: 数学*, **37**(9): 1073–1082 (2007)
- 10 Zhang Z F, Qiu P X, Xu B G, et al. Vertex-distinguishing total coloring of graphs. *Ars Comb*, **87**: 33–45 (2008)
- 11 张忠辅, 王建方, 王维凡, 等. 若干平面图的完备色数. *中国科学 A 辑: 数学*, **23**(4): 363–368 (1993)
- 12 Rosenfeld M. On the total coloring of certain graphs. *Israel J Math*, **9**: 396–402 (1971)
- 13 Vijayaditya N. On the total chromatic number of a graph. *J London Math Soc*, **3**(2): 405–408 (1971)
- 14 Balister P N, Györi E, Lehel J, et al. Adjacent vertex distinguishing edge-colorings. *SIAM J Discrete Math*, **21**(1): 237–250 (2007)
- 15 König D. Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre. *Math Ann*, **77**: 453–465 (1916)
- 16 Bermond J C. Nombre chromatique total du graphe r -parti complet. *J London Math Soc*, **9**(2): 279–285 (1974)
- 17 Černý J, Horňák M, Soták R. Observability of a graph. *Math Slovaca*, **46**: 21–31 (1996)
- 18 Horňák M, Soták R. Observability of complete multipartite graphs with equipotent parts. *Ars Combin*, **41**: 289–301 (1995)
- 19 Zhao Q C, Zhang Z F. On the total chromatic number of k -cubes. *J Taiyuan Inst Machinery*, **14**: 292–296 (1993)