由三叶形纽结得到的三维流形的不变量*

李邦河

李起升

(中国科学院系统科学研究所, 北京 100080) (河南大学数学系, 开封 475001)

Chariya Peterson

(Department of Mathematics, Northwestern University, Evanston, IL 60206 USA)

关键词 纽结 三维流形 不变量

关于 Witten 不变量, 已有不少研究, 可参见文献[1~9]. Freed 和 Gompf^[8]及 Neil^[10]曾对若干三维流形 Witten 不变量 $\tau_r(M)$ 用计算机进行了近似的数值计算. 本文给出所有由三叶结作整系数换球术得出的三维流形的不变量 $\Theta_p(M, A)$ 的计算公式(定理 1), 并通过计算机对 $p \leq 13$ 进行符号计算, 得到了几个有意思的结论. 文中的记号是标准的, 可参见文献[3, 6, 9], 不另说明.

若记 L_n 和 R_n 分别是由左手和右手标架为 n 的三叶结作换球术得到的三维流形, 则 L_{-n} 和 R_n 是反向同胚的, 于是 $\Theta_p(R_n, A) \cong \Theta_p(L_{-n}, A)$, 因此只需计算 $\Theta_p(L_n, A)$. 记

$$K_m = \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \cdots \bigcirc \bigcirc$$

是 m 分支的标架全为零的链环, 则有

$$\text{引理 1}^{[7]} \quad \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_m} \rangle_{K_m} = e_{i_1}(\lambda_{i_2}) \cdots e_{i_{m-1}}(\lambda_{i_m}) \langle e_{i_m} \rangle$$

其中 $\lambda_j = -A^{2j+2} - A^{-2j-2}$.

$$\text{引理 2} \quad e_i e_j = \sum_{k=0}^{\min\{i, j\}} e_{i+j-2k}.$$

$$\text{证 因为 } e_i = (-1)^i \frac{y^{i+1} - y^{-i-1}}{y - y^{-1}} = (-1)^i \sum_{k=0}^i y^{i-2k},$$

所以

$$e_i e_j = (-1)^{i+j} \left(\sum_{k=0}^{i+j} y^{i+j-2k} + \sum_{k=0}^{i+j-2} y^{i+j-2-2k} + \cdots + \sum_{k=0}^{i+j-2\min\{i, j\}} y^{i+j-2\min\{i, j\}-2k} \right) = \sum_{k=0}^{\min\{i, j\}} e_{i+j-2k}.$$

1994-03-28 收稿, 1996-07-10 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目

定理 1 对 $p \geq 3$

$$\Theta_p(L_n, A) = \begin{cases} \frac{1}{(2p)^4} (I + II) (A^5 - A)^4 \left(\sum_{i=0}^{2p-1} (-1)^i A^{-i^2} \right)^4, & \text{若 } n > 0, \\ \frac{1}{(2p)^3} (I + II) (A^5 - A)^3 \left(\sum_{i=0}^{2p-1} (-1)^i A^{-i^2} \right)^3, & \text{若 } n = 0, \\ \frac{1}{(2p)^4} (I + II) (A^5 - A)^3 (A^{-5} - A^{-1}) \times \\ \left(\sum_{i=0}^{2p-1} (-1)^i A^{-i^2} \right)^3 \left(\sum_{i=0}^{2p-1} (-1)^i A^{i^2} \right), & \text{若 } n < 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} I &= \sum_{m, l, i=0}^q \sum_{k=0}^i (-1)^{mn+l} A^{(n+6)(m^2+2m)+2(i^2+2i)+3(l^2+2l)} \times \\ &\quad (A^2 - A^{-2})^{-5} (A^{2(2i-2k+1)} - A^{-2(2i-2k+1)})^{-1} \times \\ &\quad (A^{2m+2} - A^{-2m-2}) (A^{2l+2} - A^{-2l-2}) (A^{2i+2} - A^{-2i-2})^2 \times \\ &\quad (A^{2(m+1)(2i-2k+1)} - A^{-2(m+1)(2i-2k+1)}) \times \\ &\quad (A^{2(l+1)(2i-2k+1)} - A^{-2(l+1)(2i-2k+1)}), \\ II &= 2 \sum_{m, i=0}^q \sum_{0 \leq i < j \leq q} \sum_{k=0}^i (-1)^{mn+l+i+j} A^{(n+6)(m^2+2m)+(i^2+2i)+(j^2+2j)+3(l^2+2l)} \times \\ &\quad (A^2 - A^{-2})^{-5} (A^{2(i+j-2k+1)} - A^{-2(i+j-2k+1)})^{-1} \times \\ &\quad (A^{2m+2} - A^{-2m-2}) (A^{2l+2} - A^{-2l-2}) \times \\ &\quad (A^{2i+2} - A^{-2i-2}) (A^{2j+2} - A^{-2j-2}) \times \\ &\quad (A^{2(m+1)(i+j-2k+1)} - A^{-2(m+1)(i+j-2k+1)}) \times \\ &\quad (A^{2(l+1)(i+j-2k+1)} - A^{-2(l+1)(i+j-2k+1)}). \end{aligned}$$

这里 $q = \left[\frac{p-1}{2} \right] - 1$.

证 应用 Kirby 演算可得到

因此对 $p \geq 3$

$$\Theta_p(L_n) = \frac{\langle \Omega_p, \Omega_p, \Omega_p, \Omega_p \rangle_{L'_n}}{\langle t(\Omega_p) \rangle_{b_+(L'_n)} \langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle_{b_-(L'_n)}} =$$

$$\frac{\langle t^{n+6}(\Omega_p), (t(\Omega_p))^2, t^3(\Omega_p) \rangle_{k_3}}{\langle t(\Omega_p) \rangle^{b_+(L'_n)} \langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle^{b_-(L'_n)}}.$$

令 $q = \left[\frac{p-1}{2} \right] - 1$, 则 $\Omega_p = \sum_{i=0}^q \langle e_i \rangle e_i$, $t^j(\Omega_p) = \sum_{i=0}^q \mu_i^j \langle e_i \rangle e_i$. 由引理 2,

$$\begin{aligned} (t(\Omega_p))^2 &= \sum_{i,j=0}^q \mu_i \mu_j \langle e_i \rangle \langle e_j \rangle e_i e_j = \\ &= \sum_{i=0}^q \mu_i^2 \langle e_i \rangle^2 e_i^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq q} \mu_i \mu_j \langle e_i \rangle \langle e_j \rangle e_i e_j = \\ &= \sum_{i=0}^q \sum_{k=0}^i \mu_i^2 \langle e_i \rangle^2 e_{2i-2k} + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq q} \sum_{k=0}^i \mu_i \mu_j \langle e_i \rangle \langle e_j \rangle e_{i+j-2k}, \\ \langle t^{n+6}(\Omega_p), (t(\Omega_p))^2, t^3(\Omega_p) \rangle_{k_3} &= \\ &= \left\langle \sum_{i=0}^q \mu_i^{n+6} \langle e_i \rangle e_i, \sum_{i=0}^q \sum_{k=0}^i \mu_i \mu_j \langle e_i \rangle \langle e_j \rangle e_{i+j-2k}, \sum_{i=0}^q \mu_i^3 \langle e_i \rangle e_i \right\rangle_{K_3} + \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^q \mu_i^{n+b} \langle e_i \rangle e_i, 2 \sum_{0 \leq i < j \leq q} \sum_{k=0}^i \mu_i \mu_j \langle e_i \rangle \langle e_j \rangle e_{i+j-2k}, \sum_{i=1}^q \mu_i^3 \langle e_i \rangle e_i \right\rangle_{K_3} + \\ &= \sum_{m,i,i=0}^q \sum_{k=0}^i \mu_m^{n+6} \mu_i^2 \mu_l^3 \langle e_m \rangle \langle e_i \rangle^2 \langle e_l \rangle \langle e_m, e_{2i-2k}, e_l \rangle_{K_3} + \\ &= 2 \sum_{m,l=0}^q \sum_{0 \leq i < j \leq q} \sum_{k=0}^i \mu_m^{n+6} \mu_i \mu_j \mu_l^3 \langle e_m \rangle \langle e_i \rangle \langle e_j \rangle \langle e_l \rangle \langle e_m, e_{i+j-2k}, e_l \rangle_{k_3}. \end{aligned}$$

由文献[7]知 $e_i(\lambda_j) = (-1)^i \frac{A^{2(i+1)(j+1)} - A^{-2(i+1)(j+1)}}{A^{2(j+1)} - A^{-2(j+1)}}$, 因此, 利用引理 1 及下面的两个事实即可得到定理 1. 第一, 因为 L'_n 是由 L_n 通过加上 3 个标架是 1 的平凡纽结得来的, 所以

$$b_+(L'_n) = \begin{cases} 4, & \text{如果 } n > 0, \\ 3, & \text{如果 } n = 0, \\ 3, & \text{如果 } n < 0. \end{cases} \quad b_-(L'_n) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } n > 0, \\ 0, & \text{如果 } n = 0, \\ 1, & \text{如果 } n < 0. \end{cases}$$

第二, 由文献[6]中的引理 6.6 和 6.7 可知

$$\langle t(\Omega_p) \rangle^{-1} = \frac{(A^5 - A)}{2p} \sum_{i=0}^{2p-1} (-1)^i A^{-i^2}, \quad \langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle^{-1} = \frac{(A^{-5} - A^{-1})}{2p} \sum_{i=0}^{2p-1} (-1)^i A^{i^2}.$$

由公式(1)可以看出 $\Theta_p(L_n)$ 在 $n > 0$ 或 $n < 0$ 时有周期性, 且当 p 是奇(偶)数时, 其周期是 $p(2p)$, 即

$$\Theta_p(L_n) = \begin{cases} \Theta_p(L_{n+\epsilon p}), & \text{对 } n > 0, \\ \Theta_p(L_{n-\epsilon p}), & \text{对 } n < 0. \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\epsilon = \begin{cases} 1, & \text{当 } p \text{ 是奇数时,} \\ 2, & \text{当 } p \text{ 是偶数时,} \end{cases}$ 又因为文献[6]中引理 6.6 和 6.7 意味着

$\langle t(\Omega_p) \rangle / \langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle = -A^{-6-p(p-1)/2}$, 因此

$$\Theta_p(L_0) = \Theta_p(L_{\epsilon p}) \frac{A^{-3}}{A^2 - A^{-2}} \sum_{i=0}^p (-1)^i A^{-i^2}, \quad (3)$$

$$\Theta_p(L_{-\epsilon p}) = -\Theta_p(L_{\epsilon p})A^{-6-p(p-1)/2}, \quad (4)$$

$$\Theta_p(L_n) = -\Theta_p(L_{n+\epsilon p})A^{-6-p(p-1)/2}, \quad \text{对 } -\epsilon p < n < 0. \quad (5)$$

由(2)~(5)式可知,只需对 $0 < n \leq \epsilon p$ 的情形进行计算.用计算机语言“Mathematica”的计算步骤为:①利用定理 1 得到关于 A, A^{-1} 的多项式;②利用 $A^{-1} = A^{2p-1}$ 将其转化为 A 的多项式 P ;③将 P 除以第 $2p$ 个分圆多项式,取其余项.

我们对 $p \leq 13$ 的所有情况进行了运算.对 $\Theta_5(L_n)$ 及其共轭,其结果也可由手算得到.

从表 1 可得到以下结果:

表 1 $\Theta_5(L_n)$ 和 $\overline{\Theta_5(L_n)}$

结论 1 如果 $n > 0, m < 0$, 则 $\Theta_5(L_m) \neq \Theta_5(L_0) \neq \Theta_5(L_n)$.

结论 2 对所有整数 n, L_n 没有反定向的自同胚.

Gordon 指出这是一个已知的、但并不容易证明的事实.

结论 3 如果 $n, m > 0$ (或 $n, m < 0$), 则 $\Theta_5(L_n) = \Theta_5(L_m)$ 的充要条件是 $n \equiv m \pmod{5}$.

从我们对 $6 \leq p \leq 13$ 的计算结果(见表 2 ~8), 还可得到

结论 4 如果 $n, m > 0$ (或 $n, m < 0$) 则 $\Theta_7(L_n) = \Theta_7(L_m) \Leftrightarrow n \equiv m \pmod{7}$; $\Theta_8(L_n) = \Theta_8(L_m) \Leftrightarrow n \equiv m \pmod{16}$;

$\Theta_9(L_n) = \Theta_9(L_m) \Leftrightarrow n \equiv m \pmod{9}$; $\Theta_{11}(L_n) = \Theta_{11}(L_m) \Leftrightarrow n \equiv m \pmod{11}$;

$\Theta_{13}(L_n) = \Theta_{13}(L_m) \Leftrightarrow n \equiv m \pmod{13}$;

结论 1, 3, 4 蕴含着 $\Theta_5, \Theta_7, \Theta_8, \Theta_9, \Theta_{11}$ 和 Θ_{13} 可区分 $2 \times 5 \times 7 \times 16 \times 9 \times 11 \times 13 + 1 (= 1441441)$ 个拓扑类.

表 2 $\Theta_p(L_0)$

p	$\Theta_p(L_0)$
3	1
4	1
5	$-1 + 3A - A^2$
6	2
7	0
8	0
9	$3 + 3A - 9A^2 - 6A^3 + 3A^4 + 9A^5$
10	$-2 + 2A^2 + 6A^6$
11	$-4 - 5A + 5A^2 + 4A^3 - 6A^5 + 3A^6 + 9A^7 + 3A^8 - 6A^9$
12	$12A^4$
13	0
14	0
15	$-15 - 30A + 30A^3 + 15A^4 - 15A^5 - 15A^6$
16	$-8 + 8A^8 + 16A^{12}$
17	$-22 + 9A + 5A^2 - 3A^3 - 15A^4 + 15A^5 + 3A^6 - 5A^7 - 9A^8 + 22A^9 - 6A^{11} - 4A^{12} + 30A^{13} - 4A^{14} - 6A^{15}$
18	$-6 + 6A^4 + 12A^6 + 18A^8 + 6A^{10}$
19	0
20	0
21	$42 + 21A - 63A^2 - 84A^3 + 21A^4 + 63A^5 - 84A^7 - 42A^8 + 42A^9 + 42A^{10}$
22	$-20 + 2A^2 - 12A^4 + 6A^6 - 6A^8 + 12A^{10} - 2A^{12} + 20A^{14} + 30A^{18}$

表 3 $\overline{\Theta_p(L_0)}$

p	$\overline{\Theta_p(L_0)}$
3	1
4	1
5	$2 - 3A + 3A^2 - 2A^3$
6	2
7	0
8	0
9	$-3 - 9A + 3A^2 + 6A^3 - 6A^5$
10	$-2A^2 - 4A^4 - 2A^6$
11	$-9 + 5A + A^2 + 2A^3 - 14A^4 + 2A^5 + A^6 + 5A^7 - 9A^8$
12	$12 - 12A^4$
13	0
14	0
15	$15 + 15A - 15A^2 - 45A^3 - 30A^4 + 15A^5 + 30A^6 + 15A^7$
16	$-8 - 16A^4 - 8A^8$
17	$-13 - 9A + 15A^2 - 5A^3 - 21A^4 - 5A^5 + 15A^6 - 9A^7 - 13A^8 + 14A^{10} - 12A^{11} - 6A^{12} + 6A^{13} + 12A^{14} - 14A^{15}$
18	$6 + 6A^2 - 12A^6 - 12A^8 - 18A^{10}$
19	0
20	0
21	$-42 - 21A + 43A^2 + 21A^3 - 63A^4 - 42A^5 + 21A^6 + 63A^7 - 42A^9 + 42A^{11}$
22	$-18 - 2A^2 - 28A^4 - 2A^6 - 18A^8 - 10A^{12} - 4A^{14} - 4A^{16} + 10A^{18}$

表 4 $\Theta_6(L_n)$, $\Theta_7(L_n)$ 和 $\Theta_8(L_n)$

n	$\Theta_6(L_n)$	$\Theta_7(L_n)$	$\Theta_8(L_n)$	$\Theta_8(L_{n+8})$
1	-1	$2A - A^2 - A^4 + 2A^5$	-1	1
2	0	$A - A^2 + A^5$	$A^3 + A^5$	$-A^3 + A^5$
3	A^3	$-1 + A + 2A^3 - A^4$	$-A^6$	A^6
4	$1 + A^3$	$-1 + A + A^3 - 2A^4$	$-A + A^5$	$A + A^5$
5		$-A^2 + A^3 + A^5$	A^4	$-A^4$
6		$2 - 2A + A^2 + 2A^4 - A^5$	$A^5 - A^7$	$A^5 + A^7$
7		0	$-A^2$	A^2
8			$2A^5$	0

表 5 $\Theta_9(L_n)$, $\Theta_{11}(L_n)$

n	$\Theta_9(L_n)$	$\Theta_{11}(L_n)$
1	$A - 3A^2 - A^3 + A^4 + 3A^5$	$-2 + 2A - A^4 + A^5 + 2A^7 - A^8 + A^9$
2	$A - A^3 + A^5$	$-2 + 2A^3 - 2A^4 - A^5 + A^6 + 2A^7$
3	$-2 - A + 3A^2 + 2A^3 - 2A^4 - 2A^5$	$-2 + 3A - A^2 - 3A^4 + 3A^5 - 2A^6 - 3A^8 + A^9$
4	$-A - A^2 + A^4$	$-1 + A - A^2 - A^4 + A^5 + A^7 - A^8 + A^9$
5	$2 - A - A^2 - A^3 + 3A^4 + A^5$	$2 + A - 2A^2 - A^3 + A^4 + 2A^5 - A^6 - 2A^7 + 2A^9$
6	$A^2 - A^3 - 2A^4$	$1 - A + A^2 - A^3 + A^4 - A^5 - A^7 + A^8 - A^9$
7	$-1 + A - A^4 + 2A^5$	$-A - 2A^2 + 2A^4 + 2A^8$
8	$-2A + A^3 + A^4$	$-A + A^2 - 2A^4 - A^5 + A^6 - 2A^9$
9	$1 - A + A^2 + A^3 - A^4 - 2A^5$	$2 - 2A + A^2 - 2A^3 + 2A^4 - 2A^5 - A^7 + 2A^8 - 2A^9$
10		$-1 + 2A - A^2 + A^3 - A^4 + A^5 + A^7 - A^8 + A^9$
11		$3 - 3A + 2A^2 - A^3 + 2A^4 - 2A^5 + A^6 - 2A^7 + 3A^8 - 3A^9$

表 6 $\Theta_{10}(L_n)$

n	$\Theta_{10}(L_n)$	$\Theta_{10}(L_8 + n)$
1	$-1 - A^4 + 2A^6$	$-1 - A^2 - A^4$
2	0	0
3	$A - A^7$	$A + A^3 + A^7$
4	$-1 - A - A^2 + A^3 - A^4 + 2A^7$	$1 - 2A - A^2 + A^3 - A^4 - 2A^5 - A^6 + 2A^7$
5	$2 - A^2 + A^4 - A^6$	$A^2 + A^6$
6	0	0
7	$-2A + A^3 - 2A^5 + 2A^7$	$-A^3 - A^5$
8	$A + A^2 + A^6 - A^7$	$-1 + A + A^3 - A^4 + 2A^6 + A^7$
9		$1 - A^2 - A^4 - A^6$
10		0
11		$-A + A^3 + 2A^7$
12		$2 - A^2 - A^3 + A^4 - A^5 - A^6$

表 7 $\Theta_{12}(L_n)$

n	$\Theta_{12}(L_n)$	$\Theta_{12}(L_6 + n)$	$\Theta_{12}(L_{12} + n)$	$\Theta_{12}(L_{18} + n)$
1	1	1	1	1
2	$-1 + 3A^6$	2	$-1 - 3A^6$	-4
3	$1 - 2A^4$	$1 - 2A^4$	$1 - 2A^4$	$1 - 2A^4$
4	-2	$1 + 3A^6$	4	$1 - 3A^6$
5	-1	-1	-1	-1
6	$1 - 2A^4 - 3A^6$	$-2 - 2A^4$	$1 - 2A^4 + 3A^6$	$4 - 2A^4$

表 8 $\Theta_{13}(L_n)$

n	$\Theta_{12}(L_n)$
1	$1 + A^4 - A^6$
2	$3A - 2A^2 + A^3 + 2A^5 - 2A^6 + 3A^7 + 2A^9 - 3A^{10} + 3A^{11}$
3	$2 - A + A^2 + A^4 - A^5 + A^8 - A^9 - A^{11}$
4	$A - A^2 + A^4 + A^5 - 2A^6 + A^8 - A^{10} - A^{11}$
5	$2 - 2A + A^2 + A^3 + 2A^4 - 2A^5 + 3A^6 - A^7 - 2A^9 + 3A^{10} - A^{11}$
6	$-A^3 - A^7$
7	$2 - 4A + 2A^2 + A^4 - 4A^5 + 3A^6 - 3A^9 + 4A^{10} - A^{11}$
8	$A + A^5 - A^6 + A^9 - A^{10}$
9	$-2A - A^5 - 2A^8 + 2A^{10}$
10	$-2 + 3A - A^2 - 3A^4 + 3A^5 - 2A^6 - 2A^8 + 3A^9 - 2A^{10} + A^{11}$
11	$A^2 - A^3 - A^4 - A^5 + A^6 - A^7 - A^9 - A^{10} - A^{11}$
12	$-3 + 2A - A^2 - 2A^4 + A^5 - A^6 + 3A^9 - A^{10}$
13	0

参 考 文 献

- 1 Witten E. Quantum field theory and the Jones polynomial. *Comm Math Phys*, 1989, 121: 351~399
- 2 Reshetikhin N Yu, Turaev V G. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Invent Math*, 1991, 103: 547~597
- 3 Kirby R, Melvin P. The 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for $sl(2, \mathbb{C})$. *Invent Math*, 1991, 105: 473~545
- 4 Lickorish W B R. Invariant for 3-manifolds from the combinatorics of the Jones polynomial. *Pacific J Math*, 1991, 149: 337~347
- 5 Lickorish W B R. Three-manifolds and the Temperley-Lieb algebra. *Math Ann*, 1991, 290: 657~670
- 6 Blanchet C, Habegger N, Masbaum G *et al.* Three-manifold invariants derived from the Kauffman bracket. *Topology*, 1992, 31: 685~699
- 7 李起升, 李邦河. 透空镜空间的不变量 $\theta_p(L(s, q))$. *科学通报*, 1993, 38(7): 580~583
- 8 Freed D S, Gompf R E. Computer calculation of Witten's 3-manifold invariants. *Comm Math Phys*, 1995, 141: 79~117
- 9 Li B H. Relations among Chern-Simons-Witten-Jones invariants. *Science in China, Ser A*, 1995, 38: 129~146
- 10 Neil J R. Combinatorial calculation of the Variants normalization of the Witten invariants for 3-manifolds. *J of Knot Theory and Its Ramifications*, 1992, 1: 407~449