等谱黎曼流形的注记*

欧阳崇珍

(江西大学数学系, 南昌330047)

关键词 等谱、局部对称、共形平坦、Bochner-Kaehler 流形、等距

设 (M, g) 是紧致连通的黎曼流形. M 上拉普拉斯算子 Δ 有离散谱 $\text{Spec}(M, g) = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots\}$. 如果黎曼流形 $(\bar{M}, \bar{g})$ 和 (M, g) 有相同的谱, 即 $\text{Spec}(\bar{M}, \bar{g}) = \text{Spec}(M, g)$, 则说 $(\bar{M}, \bar{g})$ 和 (M, g) 是等谱的. 谱理论的一个基本问题是等谱的黎曼流形是否等距. 一般情况下这个问题是没有肯定答案的. 第一个例子是 Milnor 给出的两个等谱但不等距的 16 维平环. 本文证明下面两个定理:

定理 1 设 (M, g) 和 $(\bar{M}, \bar{g})$ 是两个紧致连通的局部对称的共形平坦黎曼流形, 若它们是等谱的, 则它们等距.

定理 2 设 (M, J, g) 和 $(\bar{M}, \bar{J}, \bar{g})$ 是两个紧致连通的局部对称的 Bochner-Kaehler 流形, 若它们是等谱的, 则它们全纯等距.

Minakshisundaram 渐近展开 对于紧致连通的黎曼流形 (M, g) , 有 Minakshisundaram 渐近展开

$$\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda_m t} \sim_{t \rightarrow 0} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad (1)$$

其中 n 是 M 的维数, λ_m 是 Δ 的特征值, 系数 a_k 都是 (M, g) 的几何不变量,^[1] 且

$$a_0 = \text{Vol} M = \int_M *1, \quad a_1 = \frac{1}{6} \int_M \tau *1, \quad a_2 = \frac{1}{360} \int_M (5\tau^2 - 2|S|^2 + 2|R|^2) *1, \quad (2)$$

式中 τ, S, R 分别是 (M, g) 的数量曲率、Ricci 张量和曲率张量, $|S|$ 和 $|R|$ 分别表示 S 和 R 的长度.

因此, 我们有

引理 等谱的黎曼流形有相同的维数和相同的渐近展开系数 $a_k, k = 0, 1, 2, \dots$.

定理 1 的证明 由引理, M 和 $\bar{M}$ 有相同的维数 n . 当 $n = 2$ 时, 定理是明显的, 此时 M 和 $\bar{M}$ 有相同的常曲率. 下面假定 $n \geq 3$. 从共形曲率张量为零, 直接算得

$$|R|^2 = \frac{4}{n-2} |S|^2 - \frac{2}{(n-1)(n-2)} \tau^2. \quad (3)$$

(M, g) 是局部对称的, 推出 $\tau, |S|$ 和 $|R|$ 都是常数. 于是 (2) 变成

$$a_0 = \text{Vol} M, \quad a_1 = \frac{\tau}{6} \text{Vol} M, \quad a_2 = \frac{1}{360} \left[\left(5 - \frac{4}{(n-1)(n-2)} \right) \tau^2 \right]$$

1992-04-29 收稿, 1992-11-17 收修改稿.

* 江西省自然科学基金资助项目.

$$+ \left(\frac{8}{n-2} - 2 \right) |S|^2 \text{Vol} M. \quad (4)$$

设 $\bar{\tau}, \bar{S}, \bar{R}, \bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2$ 表示 $(\bar{M}, \bar{g})$ 的相应的量, 则我们有类似于(3)和(4)的关于带横的量的关系式. 根据引理 $\bar{a}_k = a_k$ ($k = 0, 1, 2$), 我们得出

$$\text{Vol} \bar{M} = \text{Vol} M, \quad \bar{\tau} = \tau, \quad |\bar{S}| = |S|, \quad |\bar{R}| = |R|. \quad (5)$$

下面我们用 $S^m(c)$ 表示具有常数截面曲率 c 的 m 维流形. 若 (M, g) 是不可约的, 局部对称推出 (M, g) 是爱因斯坦流形, 共形平坦条件使 $M = S^n(c)$. 若 (M, g) 可约, 则按照 Ficken^[2] 的定理, M 局部为黎曼乘积 $S^1 \times S^{n-1}(c)$ 或 $S^p(c) \times S^{n-p}(-c)$, ($2 \leq p \leq n-2$), 其中 S^1 表示 1 维流形. 因为 M 是紧致连通的, 上述乘积也是整体的. 于是我们的流形 (M, g) 有三种: i) $M = S^n(c)$, ii) $M = S^1 \times S^{n-1}(c)$, iii) $M = S^p(c) \times S^{n-p}(-c)$, $2 \leq p \leq n-2$. 同样, $(\bar{M}, \bar{g})$ 也有三种: i) $\bar{M} = S^n(\bar{c})$, ii) $\bar{M} = S^1 \times S^{n-1}(\bar{c})$, iii) $\bar{M} = S^q(\bar{c}) \times S^{n-q}(-\bar{c})$, $2 \leq q \leq n-2$.

计算各种 (M, g) 的 τ 和 $|S|^2$ ($(\bar{M}, \bar{g})$ 的 $\bar{\tau}$ 和 $|\bar{S}|^2$):

$$\text{i) } \tau = n(n-1)c, \quad |S|^2 = \frac{\tau^2}{n};$$

$$\text{ii) } \tau = (n-1)(n-2)c, \quad |S|^2 = \frac{\tau^2}{n-1};$$

$$\text{iii) } \tau = -(n-1)(n-2p)c, \quad |S|^2 = \begin{cases} \frac{n(n-1)^2 - (3n-4)p(n-p)}{(n-1)^2(n-2p)^2} \tau^2, & n \neq 2p \text{ 时}, \\ 2p(p-1)^2 c^2, & n = 2p \text{ 时}. \end{cases}$$

因此(5)推出, $M = S^n(c)$ 时, $\bar{M} = S^n(c)$; $M = S^1 \times S^{n-1}(c)$ 时, $\bar{M} = S^1 \times S^{n-1}(c)$; $M = S^p(c) \times S^{n-p}(-c)$ 时, $\bar{M} = S^p(c) \times S^{n-p}(-c)$. 于是 (M, g) 和 $(\bar{M}, \bar{g})$ 等距, 定理 1 得证.

定理 2 的证明 Bochner 曲率张量为零的 Kaehler 流形称为 Bochner-Kaehler 流形. 设 (M, J, g) 是复 n 维 Kaehler 流形, Bochner 曲率张量 B 在标准正交基 $e_1, \dots, e_n, e_1^* = J e_1, \dots, e_n^* = J e_n$ 下分量为

$$\begin{aligned} B_{ijkl} = & R_{ijkl} - \frac{1}{2(n+2)} \left(S_{ik} \delta_{jl} - S_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} S_{jl} - \delta_{il} S_{jk} + J_{ik} \sum_{m=1}^n S_{jm} J_{ml} \right. \\ & - J_{il} \sum_{m=1}^n S_{jm} J_{mk} + J_{jl} \sum_{m=1}^n S_{im} J_{mk} - J_{jk} \sum_{m=1}^n S_{im} J_{ml} + 2J_{ij} \sum_{m=1}^n S_{km} J_{ml} \\ & \left. + 2J_{kl} \sum_{m=1}^n S_{im} J_{mj} \right) + \frac{\tau}{4(n+1)(n+2)} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk} + J_{ik} J_{jl} \\ & - J_{il} J_{jk} + 2J_{ij} J_{kl}). \end{aligned} \quad (6)$$

由此和 $B = 0$ 算得

$$|R|^2 = \frac{8}{n+1} |S|^2 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \tau^2. \quad (7)$$

类似定理 1 的证明, 在定理 2 的条件下, 同样得到 (5) 式.

用 $M^m(c)$ 表示具有常全纯截面曲率 c 的复 m 维 Kaehler 流形. 按照文献[3]的定理, 现在我们有

$M = M^*(c)$ 或 $M^p(c) \times M^{n-p}(-c)$, $1 \leq p \leq n-1$;

$\bar{M} = M^*(\bar{c})$ 或 $M^q(\bar{c}) \times M^{n-q}(-\bar{c})$, $1 \leq q \leq n-1$.

对于 $M^*(c)$, 有 $\tau = n(n+1)c$, $|S|^2 = \frac{\tau^2}{2n}$; 对于 $M^p(c) \times M^{n-p}(-c)$, 有

$$\tau = -(n+1)(n-2p)c, \quad |S|^2 = \begin{cases} \frac{n(n+1)^2 - (3n+4)p(n-p)}{2(n+1)^2(n-2p)^2} \tau^2, & n \neq 2p \text{ 时}, \\ p(p+1)^2 c^2, & n = 2p \text{ 时}. \end{cases}$$

由此和(5)式得, $M = M^*(c)$ 时, $\bar{M} = M^*(c)$; $M = M^p(c) \times M^{n-p}(-c)$ 时, $\bar{M} = M^p(c) \times M^{n-p}(-c)$. 因此, M 与 $\bar{M}$ 全纯等距, 定理 2 得证.

注 Wu^[4] 引进 α -等谱的概念. 两个黎曼流形 (M, g) 和 $(\bar{M}, \bar{g})$ 的谱若满足

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} |\lambda_m - \lambda_{\bar{m}}| m^{-\alpha} = c < +\infty,$$

则称它们是 α -等谱的. 当 $\alpha = -\frac{4}{n}$ 时 (n 是 M 和 $\bar{M}$ 的维数, $n \geq 4$), α -等谱的流形有相同的渐近展开的前三项系数 a_0, a_1 和 a_2 . 按照我们的证明, 定理 1 和 2 可分别改进为:

i) $n \geq 4$ 时, 两个 $(-\frac{4}{n})$ -等谱的紧致连通的局部对称的 n 维共形平坦黎曼流形相互等距.

ii) $n \geq 2$ 时, 两个 $(-\frac{2}{n})$ -等谱的紧致连通的局部对称的复 n 维 Bochner-Kaehler 流形全纯等距.

参 考 文 献

- [1] Berger, M., Gauduchon, P., Mazet, E., *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*, Springer-Verlag, 1971.
- [2] Ficken, F. A., *Ann. Math.*, 1939, 40: 892—913.
- [3] 欧阳崇珍、黎镇琦, 数学年刊, 1990, All: 547—552.
- [4] Wu, J. Y., *Indiana Univ. Math. J.*, 1990, 39: 1373—1381.