拟平稳 Euler 方程古典音速 - 超音速解的存在性

献给李大潜教授 80 华诞

张天佑, 郑玉玺*

Department of Mathematics, The Pennsylvania State University, University Park, PA 16802, USA

E-mail: tuz107@psu.edu, yuz2@psu.edu

收稿日期: 2017-01-23; 接受日期: 2017-03-15; 网络出版日期: 2017-06-09; * 通信作者

摘要 给定音速曲线的位置以及其上相应的流角和速度, 本文构造了自相似平面上二维等熵 Euler 方程的音速 - 超音速解. 这个系统是退化的, 在音速曲线上失去双曲性, 并有奇点产生. 基于这些性质, 本文采用非平凡的坐标变换, 构建了一个具有加权度量的适当的函数空间, 在这个空间下, 可以构造出严格压缩的逼近解序列, 从而证明了解的存在性.

关键词 二维 Euler 方程 音速 - 超音速解 特征分解 加权度量

MSC (2010) 主题分类 35A01, 35A09, 35A20, 35L65

1 引言

等熵流的二维 Euler 方程为

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x + (\rho uv)_y = 0, \\ (\rho v)_t + (\rho uv)_x + (\rho v^2 + p)_y = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\rho(t, x, y)$ 是密度, (u, v) 是速度, $p = A\rho^\gamma$ 是压力, 这里 A 是某个常数, $\gamma > 1$ 是绝热指数.

对于某些特殊类型的 Riemann 问题, 例如, 当四个象限的初始数据都是常数时, 我们希望自相似解仅依赖于 $\xi = \frac{x}{t}$ 和 $\eta = \frac{y}{t}$. 在 (ξ, η) 平面上, 系统 (1.1) 有如下形式:

$$\begin{cases} -\xi\rho_\xi - \eta\rho_\eta + (\rho u)_\xi + (\rho v)_\eta = 0, \\ -\xi(\rho u)_\xi - \eta(\rho u)_\eta + (\rho u^2 + p)_\xi + (\rho uv)_\eta = 0, \\ -\xi(\rho v)_\xi - \eta(\rho v)_\eta + (\rho uv)_\xi + (\rho v^2 + p)_\eta = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

假定流是无旋的, 即 $v_\xi - u_\eta = 0$, 则该系统可写为

$$\begin{cases} (c^2 - (u - \xi)^2)u_\xi - (u - \xi)(v - \eta)(u_\eta + v_\xi) + (c^2 - (v - \eta)^2)v_\eta = 0, \\ v_\xi - u_\eta = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

英文引用格式: Zhang T Y, Zheng Y X. Existence of classical sonic-supersonic solutions for the pseudo steady Euler equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1367–1384, doi: 10.1360/N012017-00019

并加上一个称作 Bernoulli 定律的代数方程

$$\frac{(u-\xi)^2 + (v-\eta)^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} = -\phi, \quad \phi_\xi = u - \xi, \quad \phi_\eta = v - \eta, \quad (1.4)$$

其中 $c = \sqrt{p'(\rho)}$ 是音速, ϕ 称作拟速度势.

系统 (1.3) 和 (1.4) 是混合型并且具有两个特征值

$$\Lambda_{\pm} = \frac{(u-\xi)(v-\eta) \pm c\sqrt{(u-\xi)^2 + (v-\eta)^2 - c^2}}{(u-\xi)^2 - c^2}. \quad (1.5)$$

则 $Q := \sqrt{(u-\xi)^2 + (v-\eta)^2} = c$ 是超音速曲线. 在 $Q > c$ 的超音速区域有两族特征 (families of characteristics). 当 $Q < c$ 时, 流是亚音速的并且系统是椭圆型的.

这个特点可以通过两个前向波和两个后向波相互作用的数值模拟很好地加以刻画 (见图 1). 然而, 严格地构造在数值实验中观察到的解非常困难也非常具有挑战性. 人们需要考虑一些严格的因素, 例如, 超音速区域中波的相互作用、音速曲线上的退化性和解的跨音速骤变等. 关于双曲区域已经有了很好的研究结果. Li 和 Zheng^[1] 及 Li^[2] 考虑了气体向真空的扩张情形, 得到了波作用的一般结果. Li 和 Zheng^[3] 针对具有两个轴对称的大波作用, 构造了一个全局解. 但是这个解规避了亚音速区域, 而且也不是一个跨音速解. Li 和 Zheng^[4] 构造了双曲区域上音速曲线附近的“半双曲”斑点解 (见图 1), 这可能是从外部进入次音速区域的一个关键步骤. Song 等^[5] 得到了半双曲斑点解中音速曲线边界的正则性. 除了受到四个波作用的启发以外, 另一个跨音速解的例子是由 Chen 和 Feldman^[6] 构建的正则震动反映. 由于音速曲线是一个自由边界, 我们可能需要使用迭代的框架来解决它. 在这个过程中, 双曲区域、椭圆区域和音速曲线是纠缠的而且相互影响. 我们将把这个巨大的项目分解成一些小的层次.

图 1 Euler 方程两个前向波和两个后向波的相互作用, 这里 $\gamma = 1.4$, 压力 $p_1 = 0.444$, 密度 $\rho_1 = 1.0$, $\rho_2 = 0.5197$, 速度 $u_1 = v_1 = 0.00$, $T = 0.25$. 轮廓曲线是拟 Mach 曲线, 其中最外面的标记为 +1.0 的曲线是音速曲线. 边界上的黑色曲线和浅色的短曲线都是特征. 黑色曲线和短的浅色特征曲线相交的四个区域都是半双曲区域^[7]

本文考虑等熵无旋系统 (1.3) 和 (1.9). 我们将采用特征方法, 构造从音速曲线指向双曲区域的解. 换句话说, 我们通过音速曲线上的给值来构造半双曲区域内的解 (见图 1), 这可能是构造跨音速解的非常重要的一个步骤. 我们主要的存在性定理如下表述:

定理 1 给定一个光滑曲线 $\Gamma: \eta = f(\xi)$ 满足 $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$, 分配一个流方向 $\sigma_0(\xi) = \sigma(\xi, f(\xi))$, 即

$$\tan \sigma = \frac{v - \eta}{u - \xi},$$

在其上假定 $f, \sigma_0 \in C^{2, \frac{2}{3}}([\xi_1, \xi_2])$. 我们进一步通过下式分配 Γ 上的流速度 $Q_0(\xi)$:

$$Q'_0 = \frac{d}{d\xi} Q(\xi, f(\xi)) = -\mu^2 (\cos \sigma_0 + f' \sin \sigma_0), \quad Q_0(\xi_1, f(\xi_1)) = Q_{01} > 0.$$

假定 σ_0 和 σ'_0 满足

$$\begin{aligned} \cos \sigma_0 + f' \sin \sigma_0 &\geq \nu > 0, \\ f' \cos \sigma_0 + Q_0 \sigma'_0 - \sin \sigma_0 &\leq -\hat{\nu} < 0, \end{aligned}$$

则 Euler 系统 (1.3) 和 (1.4) 在音速曲线 Γ 的一侧附近具有一个连续可微的超音速解, 并且在 Γ 上满足

$$u = \xi + Q_0 \cos \sigma_0, \quad v = \eta + Q_0 \sin \sigma_0, \quad c = Q_0.$$

本文余下的内容安排如下. 第 2 节首先综述各类状态变量之间的一些基本关系以及特征分解方面的知识. 第 3 节提出问题 3 的存在性. 为解决音速曲线上的退化问题, 第 4 节引入一个新的变量集合来区分主要的奇点项. 第 5 节写出了新的平面上高阶项的方程, 并构造了一个具有加权度量的合适的函数空间. 这些技术在我们之前的文献 [8, 9] 中都曾经应用过. 第 6 节通过压缩映射原理以及连续模来证明新的平面上解的存在性. 最后一节将其变换回 (ξ, η) 平面. 至此, 我们即完成了定理 1 的证明.

2 基本知识

2.1 各种各样的关系

流中各种各样的角非常便于我们的分析, 因而我们列举如下. 称 $\sigma \in [-\pi, \pi)$ 为流角, 并且

$$\cos \sigma = \frac{u - \xi}{Q}, \quad \sin \sigma = \frac{v - \eta}{Q}, \quad \tan \sigma = \frac{v - \eta}{u - \xi}. \quad (2.1)$$

令 $\omega \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 为拟 Mach 角:

$$\sin \omega = \frac{c}{Q}, \quad \cos \omega = \frac{\sqrt{Q^2 - c^2}}{Q}, \quad (2.2)$$

因而, 在音速曲线上有 $\omega = \frac{\pi}{2}$. 定义角

$$\alpha := \sigma + \omega, \quad \beta := \sigma - \omega. \quad (2.3)$$

容易验证

$$\tan \alpha = \Lambda_+, \quad \tan \beta = \Lambda_-. \quad (2.4)$$

所以, α 和 β 对应于正向和负向特征的倾斜角.

由 (2.1) 和 (2.2), 我们应用这些角来将速度表述如下:

$$\begin{aligned} u - \xi &= Q \cos \sigma = \frac{c \cos \sigma}{\sin \omega}, \\ v - \eta &= Q \sin \sigma = \frac{c \sin \sigma}{\sin \omega}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

势能函数的水平曲线 ϕ 称作势能曲线, 与流曲线正交, 而流曲线正是 $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{v-\eta}{u-\xi}$ 的积分曲线. 在音速曲线 $Q = c$ 上, 两个特征值 (1.5) 相同, 因此, 两个特征都成为

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{u-\xi}{v-\eta}.$$

因而, 特征与势能曲线相切, 而且它们在音速曲线上与流曲线正交 (见图 2).

我们引入在特征上、流曲线上和势能线上取导数的记号如下: 当方向是单位向量时, 我们记为 $\bar{\partial}$,

$$\begin{aligned} \partial^\pm &:= \partial_\xi + \Lambda_\pm \partial_\eta, \quad \bar{\partial}^+ := \cos \alpha \partial_\xi + \sin \alpha \partial_\eta, \quad \bar{\partial}^- := \cos \beta \partial_\xi + \sin \beta \partial_\eta, \\ \partial^0 &:= (u - \xi) \partial_\xi + (v - \eta) \partial_\eta, \quad \bar{\partial}^0 := \cos \sigma \partial_\xi + \sin \sigma \partial_\eta, \\ \bar{\partial}^\perp &:= \sin \sigma \partial_\xi - \cos \sigma \partial_\eta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

因而, 成立

$$\begin{aligned} \bar{\partial}^+ &= \cos \alpha \partial^+, \quad \bar{\partial}^- = \cos \beta \partial^+, \quad \bar{\partial}^0 = \frac{\partial^0}{Q}, \\ \bar{\partial}^+ + \bar{\partial}^- &= 2 \cos \omega \bar{\partial}^0, \quad \bar{\partial}^+ - \bar{\partial}^- = -2 \sin \omega \bar{\partial}^\perp. \end{aligned} \quad (2.7)$$

应用以上记号, 我们可以通过对角化来重写系统 (1.3) 为

$$\bar{\partial}^\pm u + \lambda_\mp \bar{\partial}^\pm v = 0. \quad (2.8)$$

应用 (2.8)、(2.1)、(2.2) 和 Bernoulli's 定律 (1.4), 通过如下命题来用 c 的函数来表示 $(u, v, \sigma, \omega, \alpha, \beta)$ 的不同的方向导数. 为书写方便, 令

$$\mu^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.$$

图 2 音速曲线上的几何

命题 1 (1.3) 和 (1.4) 的光滑解满足

$$\begin{aligned}
 \bar{\partial}^+ u &= \frac{2}{\gamma-1} \sin \beta \bar{\partial}^+ c, \quad \bar{\partial}^- u = -\frac{2 \sin \alpha}{\gamma-1} \bar{\partial}^- c, \\
 \bar{\partial}^+ v &= -\frac{2}{\gamma-1} \cos \beta \bar{\partial}^+ c, \quad \bar{\partial}^- v = \frac{2 \cos \alpha}{\gamma-1} \bar{\partial}^- c, \\
 \bar{\partial}^+ \sigma &= -\frac{\sin 2\omega}{(\gamma-1)c} \bar{\partial}^+ c - \frac{\sin^2 \omega}{c}, \quad \bar{\partial}^- \sigma = \frac{\sin 2\omega}{(\gamma-1)c} \bar{\partial}^- c + \frac{\sin^2 \omega}{c}, \\
 \bar{\partial}^\perp \sigma &= \frac{2 \cos^2 \omega}{(\gamma-1)c} \bar{\partial}^0 c + \frac{\sin \omega}{c}, \quad \bar{\partial}^0 \sigma = \frac{2 \sin^2 \omega}{(\gamma-1)c} \bar{\partial}^\perp c \\
 \bar{\partial}^+ \omega &= -\frac{2\phi(\bar{\partial}^+ c)}{Q^3 \cos \omega} + \frac{c}{Q^2}, \quad \bar{\partial}^- \omega = -\frac{2\phi(\bar{\partial}^- c)}{Q^3 \cos \omega} + \frac{c}{Q^2}, \\
 \bar{\partial}^+ \omega &= -\frac{2\phi(\bar{\partial}^+ c)}{Q^2 \sqrt{Q^2 - c^2}} + \frac{c}{Q^2}, \quad \bar{\partial}^- \omega = -\frac{2\phi(\bar{\partial}^- c)}{Q^2 \sqrt{Q^2 - c^2}} + \frac{c}{Q^2}, \\
 \bar{\partial}^+ \alpha &= \left(\frac{1}{\mu^2 Q \cos \omega} - \frac{4 \cos \omega}{(\gamma-1)Q} \right) \bar{\partial}^+ c, \quad \bar{\partial}^- \alpha = \frac{1}{\mu^2 Q \cos \omega} \bar{\partial}^- c + \frac{2 \sin^2 \omega}{c}, \\
 \bar{\partial}^+ \beta &= -\frac{1}{\mu^2 Q \cos \omega} \bar{\partial}^+ c - \frac{2 \sin^2 \omega}{c}, \quad \bar{\partial}^- \beta = \left(-\frac{1}{\mu^2 Q \cos \omega} + \frac{4 \cos \omega}{(\gamma-1)Q} \right) \bar{\partial}^- c.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

我们可以简化 ϕ 并得到

$$\frac{-2\phi}{Q^3 \cos \omega} = \frac{1}{\mu^2 Q \cos \omega} - \frac{2 \cos \omega}{(\gamma-1)Q}, \quad \bar{\partial}^\pm \omega = \left(\frac{1}{\mu^2 Q \cos \omega} - \frac{2 \cos \omega}{(\gamma-1)Q} \right) \bar{\partial}^\pm c + \frac{\sin^2 \omega}{c}. \tag{2.10}$$

如下的转接关系成立.

命题 2 (转接关系) 对于量 $I(x, y)$, 有

$$\partial^- \partial^+ I - \partial^+ \partial^- I = \frac{\partial^- \Lambda_+ - \partial^+ \Lambda_-}{\Lambda_- - \Lambda_+} (\partial^- I - \partial^+ I),$$

以及

$$\bar{\partial}^- \bar{\partial}^+ I - \bar{\partial}^+ \bar{\partial}^- I = \frac{1}{\sin 2\omega} [(\cos 2\omega \bar{\partial}^+ \beta - \bar{\partial}^- \alpha) \bar{\partial}^- I - (\bar{\partial}^+ \beta - \cos 2\omega \bar{\partial}^- \alpha) \bar{\partial}^+ I].$$

2.2 特征分解

命题 3 对于声音速度 c , 令 $R := \frac{\bar{\partial}^+ c}{c}$, $S := \frac{\bar{\partial}^- c}{c}$, 并且有如下的特征分解:

$$\bar{\partial}^+ S = S \left[\frac{1}{2\mu^2 \cos^2 \omega} (R + S) + \frac{4 \cos^2 \omega - \gamma - 3}{(\gamma-1)} R + \frac{\sin(2\omega)}{c} \right], \tag{2.11}$$

$$\bar{\partial}^- R = R \left[\frac{1}{2\mu^2 \cos^2 \omega} (R + S) + \frac{4 \cos^2 \omega - \gamma - 3}{(\gamma-1)} S + \frac{\sin(2\omega)}{c} \right]. \tag{2.12}$$

注意到

$$\frac{1}{2\mu^2 \cos^2 \omega} (R + S) = \frac{\bar{\partial}^0 c}{\mu^2 c \cdot \cos \omega}. \tag{2.13}$$

3 主要问题

假设给定光滑音速曲线 $\Gamma: \eta = f(\xi)$, $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$, 并分配一个光滑的流方向 $\sigma_0(\xi) = \sigma(\xi, f(\xi))$. 我们通过下式来定义音速曲线 Γ 上的流速度 $Q_0(\xi) = Q(\xi, f(\xi))$:

$$\begin{aligned} Q'_0 &= \frac{d}{d\xi} Q(\xi, f(\xi)) = -\mu^2(\cos \sigma_0 + f' \sin \sigma_0), \\ Q_0(\xi_1, f(\xi_1)) &= Q_{01} = c(\xi_1, f(\xi_1)). \end{aligned} \quad (3.1)$$

由 Bernoulli 定律, 这条曲线上的势能为

$$\phi(\xi, f(\xi)) = -\frac{Q_{01}^2}{2\mu^2} + \int_{\xi_1}^{\xi} Q_0(\cos \sigma_0 + f' \sin \sigma_0)(s, f(s)) ds. \quad (3.2)$$

在 Γ 上, 随 ξ 变大, ϕ 从 ϕ_1 增长到 ϕ_2 . 同样, 根据 (1.4), 声音的速度由下式决定:

$$c^2(\xi, f(\xi)) = -(\gamma - 1) \left(\phi + \frac{Q_0^2}{2} \right).$$

可以验证, 在整个曲线 Γ 上成立 $Q = c$, 所以, 它是一条音速曲线.

通过音速曲线上给出的数据, 我们得到声音的速度在势能曲线和流曲线上的方向倒数. 首先, 由命题 1, 有

$$\bar{\partial}^\perp \sigma|_{\text{sonic}} = \frac{1}{Q_0}. \quad (3.3)$$

因为分配了流方向, 我们可以计算它在音速曲线上的导数. 因此, 我们可以求解

$$\sigma_\xi|_{\text{sonic}} = \frac{f' + Q_0 \cos \sigma_0 \sigma'_0}{Q_0(\cos \sigma_0 + f' \sin \sigma_0)}, \quad \sigma_\eta|_{\text{sonic}} = \frac{Q_0 \sin \sigma_0 \sigma'_0 - 1}{Q_0(\cos \sigma_0 + f' \sin \sigma_0)}. \quad (3.4)$$

然后, 我们可以将 σ 在流方向上的倒数表示为

$$\bar{\partial}^0 \sigma|_{\text{sonic}} = \frac{f' \cos \sigma_0 + Q_0 \sigma'_0 - \sin \sigma_0}{Q_0(\cos \sigma_0 + f' \sin \sigma_0)}. \quad (3.5)$$

由命题 1, 有

$$\bar{\partial}^\perp c|_{\text{sonic}} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{f' \cos \sigma_0 + Q_0 \sigma'_0 - \sin \sigma_0}{\cos \sigma_0 + f' \sin \sigma_0} =: a_0 \cdot c. \quad (3.6)$$

声音的速度 c 在音速曲线上的导数也由 (3.1) 给出, 继而有

$$\begin{aligned} c_\xi|_{\text{sonic}} &= \frac{\gamma - 1}{2} \frac{f'(f' \cos \sigma_0 + Q_0 \sigma'_0 - \sin \sigma_0)}{(\cos \sigma_0 + f' \sin \sigma_0)^2} - \mu^2 \cos \sigma, \\ c_\eta|_{\text{sonic}} &= -\frac{\gamma - 1}{2} \frac{(f' \cos \sigma_0 + Q_0 \sigma'_0 - \sin \sigma_0)}{(\cos \sigma_0 + f' \sin \sigma_0)^2} - \mu^2 \sin \sigma. \end{aligned} \quad (3.7)$$

所以有

$$\bar{\partial}^0 c|_{\text{sonic}} = \frac{(\gamma - 1)(f' \cos \sigma_0 - \sin \sigma_0)(f' \cos \sigma + Q_0 \sigma'_0 - \sin \sigma_0)}{2(\cos \sigma_0 + f' \sin \sigma_0)^2} - \mu^2 =: a_1 \cdot c^2. \quad (3.8)$$

假定

$$\cos \sigma_0 + f' \sin \sigma_0 \neq 0, \quad (3.9)$$

流方向不垂直于音速曲线. 因而, 在音速点, $\bar{\partial}^\perp$ 或者指向亚音速区域, 或者指向超音速区域.

如果 $\bar{\partial}^\perp(Q^2 - c^2) > 0$, 等价地, $\bar{\partial}^\perp c < 0$, 则由 (3.6) 知, $\cos \sigma_0 + f' \sin \sigma_0$ 与 $f' \cos \sigma_0 + Q_0 \sigma'_0 - \sin \sigma_0$ 符号相反, 则向量 $(\sin \sigma_0, -\cos \sigma_0)$ 指向超音速区域.

反过来, 如果 $\bar{\partial}^\perp c > 0$, 即 $\cos \sigma_0 + f' \sin \sigma_0$ 与 $f' \cos \sigma_0 + Q_0 \sigma'_0 - \sin \sigma_0$ 符号相同, 则它指向亚音速区域.

我们希望构建从音速曲线到超音速区域的解, 因而, 不失一般性, 假定

$$\cos \sigma_0 + f' \sin \sigma_0 \geq \nu > 0, \quad f' \cos \sigma_0 + Q_0 \sigma'_0 - \sin \sigma_0 \leq -\hat{\nu} < 0. \quad (3.10)$$

所以有

$$\bar{\partial}^\perp c|_{\text{sonic}} \leq -\epsilon < 0, \quad (3.11)$$

其中 ϵ 是正的常数.

注 1 (3.10) 要求音速曲线和流线非正交.

总结以上内容, 我们考虑以下问题:

问题 1 给定一个光滑的音速曲线 $\Gamma: \eta = f(\xi)$, $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$, 其上具有流方向 $\sigma_0(\xi, f(\xi)) = \sigma(\xi, f(\xi))$, 且满足正则性条件 $f, \sigma_0 \in C^{2, \frac{2}{3}}([\xi_1, \xi_2])$. 通过 (3.1) 分配 Γ 上的流速度 Q_0 , 在假设 (3.10) 下, 我们将从音速曲线出发构造指向超音速区域的一个解.

4 一个新的坐标系

在音速曲线上的 Mach 角满足 $\omega = \frac{\pi}{2}$, 因此, 光滑解在音速曲线上有 $R = S$. 命题 3 的特征分解在分析音速曲线附近解的局部行为时有困难, 因为它们包含了 $\frac{R+S}{\cos^2 \omega}$ 这一项、一个 $\frac{0}{0}$ 型的量并且分母 $\cos^2 \omega$ 可能会非常快地下降到零. 为了处理这个奇项的消没效应, 我们采用变量代换的方法. 我们将零项和相应的几何特征 (见图 2) 变换到新的坐标系下, 用以改善超音速区域中因素曲线附近的量度.

作为自相似平面上超音区一个点 (ξ, η) , 定义新坐标

$$\tau = \sqrt{(u - \xi)^2 + (v - \eta)^2 - c^2}, \quad \phi = \phi(\xi, \eta), \quad (4.1)$$

其中 ϕ 是 (1.4) 中的伪势能且 $Q \geq c$. 于是, 音速曲线成为 $t = 0$ 上的一段, 满足 $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$. 这个变形同时也蕴含着

$$\begin{aligned} \bar{\partial}^+ \phi &= \tau, \quad \bar{\partial}^- \phi = \tau, \\ \bar{\partial}^+ \tau &= -\left(1 + \frac{c^2 R}{\mu^2 \tau}\right), \quad \bar{\partial}^- \tau = -\left(1 + \frac{c^2 S}{\mu^2 \tau}\right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

我们在上述方程中应用 Bernoulli 定律来替换

$$\tau^2 = Q^2 - c^2 = -2\phi - \frac{c^2}{\mu^2}. \quad (4.3)$$

注意到 (4.1) 的 Jacobi 行列式是

$$j = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial \xi} & \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{vmatrix} = -\frac{cQ}{\mu^2 t} \cdot \bar{\partial}^\perp c.$$

对于 $t > 0$, Jacobi 行列式总是正的. 当 $t = 0$ 时, 由 (3.2) 可知, 势能在音速曲线上单调增. 因而, (ξ, η) 平面上的 ξ 与 (τ, ϕ) 平面上的 ϕ 的音速曲线参数化之间存在一一对应关系, 可以记为 $\phi_0(\xi) = \phi(\xi, f(\xi))$ 或者 $\phi_0(\xi) = \xi_0(\phi)$, 它是 ϕ_0 的逆.

对于任意连续函数 $I(\xi, \eta)$, 令 $I(\xi, \eta) = \tilde{I}(\tau(\xi, \eta), \phi(\xi, \eta))$, 应用 (4.2), 有

$$\bar{\partial}^\pm I = (\bar{\partial}^\pm \tau) \tilde{I}_\tau + (\bar{\partial}^\pm \phi) \tilde{I}_\phi. \quad (4.4)$$

因而, 在新的平面上, 方程 (2.11) 和 (2.12) 变为

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\tau - \frac{\mu^2 \tau^2}{c^2 \tilde{R} + \mu^2 \tau} \tilde{S}_\phi &= \tilde{S} \left[-\frac{Q^2}{2(c^2 \tilde{R} + \mu^2 \tau)} \frac{\tilde{R} + \tilde{S}}{\tau} - \frac{(4 \cos^2 \omega - \gamma - 3) \tau \tilde{R}}{(\gamma + 1) c^2 \tilde{R} + (\gamma - 1) \tau} - \frac{\mu^2 \tau (\sin 2\omega)}{c(\mu^2 \tau + c^2 \tilde{R})} \right], \\ \tilde{R}_\tau - \frac{\mu^2 \tau^2}{c^2 \tilde{S} + \mu^2 \tau} \tilde{R}_\phi &= \tilde{R} \left[-\frac{Q^2}{2(c^2 \tilde{S} + \mu^2 \tau)} \frac{\tilde{R} + \tilde{S}}{\tau} - \frac{(4 \cos^2 \omega - \gamma - 3) \tau \tilde{S}}{(\gamma + 1) c^2 \tilde{S} + (\gamma - 1) \tau} - \frac{\mu^2 \tau (\sin 2\omega)}{c(\mu^2 \tau + c^2 \tilde{S})} \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

系统 (4.5) 在 (τ, ϕ) 平面内也是一个闭系统, 因为 Q 和 c 可以简单地表示成

$$Q^2 = -2\mu^2 \phi + (1 - \mu^2) \tau^2, \quad c^2 = -\mu^2 (2\phi + \tau^2), \quad (4.6)$$

同样地对于 $\cos \omega$ 和 $\sin 2\omega$ 也可表示为 τ 和 ϕ 的函数.

4.1 边界条件的非正式讨论

为避免符号混淆, 我们仍然在 (τ, ϕ) 平面上使用 (3.6) 和 (3.8) 中定义的 a_0 和 a_1 . 由定义 (2.6) 和 (2.3), 有

$$\tilde{R}|_{\tau=0} = \frac{\bar{\partial}^+ c}{c} \Big|_{\text{sonic}} = -\frac{\bar{\partial}^\perp c}{c} \Big|_{\text{sonic}} =: -a_0(\phi), \quad \tilde{S}|_{\tau=0} = \frac{\bar{\partial}^- c}{c} \Big|_{\text{sonic}} = \frac{\bar{\partial}^\perp c}{c} \Big|_{\text{sonic}} =: a_0(\phi), \quad (4.7)$$

以及

$$a_0 \leq -\epsilon < 0. \quad (4.8)$$

应用 (2.7)、(4.4) 和 (4.2), 有

$$\bar{\partial}^\perp = \frac{\bar{\partial}^+ - \bar{\partial}^-}{-2 \sin \omega} = \frac{(\bar{\partial}^+ \tau - \bar{\partial}^- \tau) \cdot \partial_\tau}{-2 \sin \omega} = -\frac{c \bar{\partial}^\perp c}{\mu^2 \tau} \cdot \partial_\tau. \quad (4.9)$$

因而, (4.9) 作用在 R 和 S 上, 所以有

$$\tilde{R}_\tau = -\frac{\mu^2 \tau}{c \bar{\partial}^\perp c} \bar{\partial}^\perp R, \quad \tilde{S}_\tau = -\frac{\mu^2 \tau}{c \bar{\partial}^\perp c} \bar{\partial}^\perp S. \quad (4.10)$$

回顾 (2.6) 和 (2.3), 则由于 $\omega = \pi/2$, 容易得到在音速曲线上成立 $\bar{\partial}^- = \bar{\partial}^\perp = -\bar{\partial}^+$. 因而, 在 (4.10) 中将 $\bar{\partial}^\perp R$ 换成 $\bar{\partial}^- R$, 将 $\bar{\partial}^\perp S$ 换成 $\bar{\partial}^+ S$, 并使用命题 3, 我们有

$$\tilde{R}_\tau|_{\tau=0} = \tilde{S}_\tau|_{\tau=0} = \frac{\bar{\partial}^0 c}{c^2} \Big|_{\text{sonic}} =: a_1(\phi). \quad (4.11)$$

问题 1 转化成寻找 (τ, ϕ) 平面上的解.

问题 2 对于 (τ, ϕ) 平面上的闭系统 (4.5), 考虑线段 $\{\tau = 0, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\}$ 上的边界条件 (4.7) 和 (4.11), 假定 (4.8) 及 a_0 和 a_1 在 $[\phi_1, \phi_2]$ 上是 $C^{1, \frac{2}{3}}$ 的, 我们寻找扩张到区域 $\tau > 0$ 上的解.

5 (τ, ϕ) 平面上高阶项的方程

在边界条件 (4.7) 和 (4.11) 下, (τ, ϕ) 平面上音速曲线附近关于 τ 展开, 我们可以得到 $\bar{R}$ 和 $\bar{S}$ 的高阶项满足的方程, 即令

$$\bar{R}(\tau, \phi) = \tilde{R}(\tau, \phi) + a_0(\phi) - a_1(\phi)\tau, \quad \bar{S}(\tau, \phi) = \tilde{S}(\tau, \phi) - a_0(\phi) - a_1(\phi)\tau, \quad (5.1)$$

而且它们满足方程

$$\begin{aligned} \bar{R}_\tau - \frac{\mu^2 \tau^2}{c^2 \bar{S} + \mu^2 \tau} \bar{R}_\phi &= \frac{1}{2} \frac{\bar{R} + \bar{S}}{\tau} - z_1 \cdot \left(\frac{\bar{R} + \bar{S}}{\tau} + 2a_1 \right) + b_1(\bar{R}, \bar{S}) + c_1(\bar{R}, \bar{S}), \\ \bar{S}_\tau - \frac{\mu^2 \tau^2}{c^2 \bar{R} + \mu^2 \tau} \bar{S}_\phi &= \frac{1}{2} \frac{\bar{R} + \bar{S}}{\tau} - z_2 \cdot \left(\frac{\bar{R} + \bar{S}}{\tau} + 2a_1 \right) + b_2(\bar{R}, \bar{S}) + c_2(\bar{R}, \bar{S}), \end{aligned} \quad (5.2)$$

其中

$$\begin{aligned} z_1(\bar{R}, \bar{S}) &= \frac{\tilde{R}Q^2}{2(c^2 \tilde{S} + \mu^2 \tau)} + \frac{1}{2}, \quad z_2(\bar{R}, \bar{S}) = \frac{\tilde{S}Q^2}{2(c^2 \tilde{R} + \mu^2 \tau)} + \frac{1}{2}, \\ b_1 &= \tilde{R} \left[\frac{4 \cos^2 \omega - \gamma - 3}{\gamma - 1} \cdot \frac{\lambda_1}{\tau} \cdot \tilde{S} + \frac{2\lambda_1}{Q^2} \right], \quad c_1 = \lambda_1(a'_0 - a'_1 \tau), \\ b_2 &= \tilde{S} \left[\frac{4 \cos^2 \omega - \gamma - 3}{\gamma - 1} \cdot \frac{\lambda_2}{\tau} \cdot \tilde{R} + \frac{2\lambda_2}{Q^2} \right], \quad c_2 = \lambda_2(-a'_0 - a'_1 \tau), \end{aligned} \quad (5.3)$$

这里 λ_i ($i = 1, 2$) 是系统 (5.2) 的两个特征值, 且

$$\lambda_1(\bar{R}, \bar{S}) = -\frac{\mu^2 \tau^2}{c^2(a_0 + a_1 \tau + \bar{S}) + \mu^2 \tau}, \quad \lambda_2(\bar{R}, \bar{S}) = -\frac{\mu^2 \tau^2}{c^2(-a_0 + a_1 \tau + \bar{R}) + \mu^2 \tau}. \quad (5.4)$$

系统 (5.2) 关于 (t, ϕ) 平面上的 $\bar{R}$ 和 $\bar{S}$ 是一个闭系统. 为了让方程看起来更简洁, 我们保持 $\tilde{S}$ 和 $\tilde{R}$, 并且它们很容易通过 (5.1) 相互转换. 新变量的边界条件是

$$\bar{R}(0, \phi) = \bar{S}(0, \phi) = 0, \quad \bar{R}_\tau(0, \phi) = \bar{S}_\tau(0, \phi) = 0, \quad \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2. \quad (5.5)$$

问题 2 与如下的问题 3 等价:

问题 3 在 (τ, ϕ) 平面上的区域 $\tau > 0$ 中构造满足边界条件 (5.5) 的系统 (5.2) 的解.

穿过点 $(\xi, \eta) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ 联系与函数 $\bar{R}$ 和 $\bar{S}$ 的特征曲线是如下的积分曲线:

$$\frac{d\phi_i}{d\tau} = \lambda_i(\bar{R}, \bar{S}), \quad \phi(\xi) = \eta, \quad i = 1, 2, \quad (5.6)$$

记为 $C_i(\bar{R}, \bar{S})$.

令闭区域为

$$D(\delta_0) = \{(\tau, \phi) \mid 0 \leq \tau \leq \delta_0, \varphi_1(\tau) \leq \phi \leq \varphi_2(\tau)\}, \quad (5.7)$$

其中 φ_1 和 φ_2 是两个连续可微函数并且 $\varphi_1(0) = \phi_1$ 和 $\varphi_2(0) = \phi_2$.

定义 1 闭区域 $D(\delta)$ 称为系统 (5.2) 的一个一般的确定区域, 如果对于 $D(\delta)$ 上满足 $\|\frac{g}{\tau^2}\|_\infty + \|\frac{h}{\tau^2}\|_\infty \leq M$ 的任意的连续函数 g 和 h , 对于任意 $0 \leq \tau \leq \xi$, 通过任意点 $(\xi, \eta) \in D(\delta)$ 的两条相应的特征曲线 $C_i(g, h)$ 完全包含在 $D(\delta)$ 的内部.

范数 $\|\cdot\|_\infty$ 是区域上的上界范数. 我们说这个区域是存在的, 因为对于任意函数 g 和 h , (5.4) 中的两个特征值一致有界, 而且仅依赖于 a_0 和 a_1 的范数以及 M 的选取. 事实上, 我们应当写成 $D(\delta) = D_M(\delta)$, 但是为了简化符号, 我们使用 $D(\delta)$.

问题 3 解的存在性如下给出:

定理 2 假定 $a_0(\phi)$ 和 $a_1(\phi)$ 是 $C^{1, \frac{2}{3}}[\phi_1, \phi_2]$ 的且满足 (4.8), 并且 $D(\delta_0)$ 是系统 (5.2) 的一个确定区域, 则存在一个常数 $\delta \in (0, \delta_0)$ 使得系统 (5.2) 有一个解, 这个解在区域 $D(\delta)$ 内部是连续可微的, 可以连续到边界, 并且满足边界条件 (5.5).

接下来给出用以找到解的函数类.

令 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_M(\delta)$ 包含满足如下性质的所有连续可微函数 $\mathbf{G} = (g_1, g_2)^T : D(\delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$:

(S₁) $\mathbf{G}(0, \Phi) = \mathbf{G}_\tau(0, \Phi) = 0$;

(S₂) $\|\frac{\mathbf{G}(\tau, \Phi)}{\tau^2}\|_\infty \leq M$;

(S₃) $\|\frac{\partial_\Phi \mathbf{G}(\tau, \Phi)}{\tau^2}\|_\infty \leq M$,

其中 $\|\frac{\mathbf{G}(\tau, \Phi)}{\tau^2}\|_\infty := \|\frac{g}{\tau^2}\|_\infty + \|\frac{g_2}{\tau^2}\|_\infty$.

令 $\mathcal{W} = \mathcal{W}_M(\delta)$ 表示 $D(\delta)$ 上满足性质 (S₁) 和 (S₂) 的所有连续函数构成的集合, 则 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{W}$ 的一个子集. 关于 $\mathcal{W}$, 我们应用加权度量

$$d(\mathbf{G}, \mathbf{H}) := \left\| \frac{\mathbf{G} - \mathbf{H}}{\tau^2} \right\|_\infty. \quad (5.8)$$

直接可以验证 $(\mathcal{W}, d)$ 是一个完备度量空间. 然而 $(\mathcal{S}, d)$ 不是闭的.

6 (τ, ϕ) 平面内定理的证明

令 $\mathbf{G} = (g_1, g_2)^T$, 对于 $i = 1, 2$, 我们使用迭代

$$\frac{d}{d_i(\mathbf{G})} \hat{g}_i = \frac{g_1 + g_2}{2\tau} - z_i \cdot \left(\frac{g_1 + g_2}{\tau} + 2a_1 \right) + b_i(g_1, g_2), \quad (6.1)$$

以及初值

$$g_i(0, \phi) = \frac{\partial g_i}{\partial \tau}(0, \phi) = 0, \quad (6.2)$$

其中 $\frac{d}{d_i(\mathbf{G})} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \lambda_i(\mathbf{G}) \frac{\partial}{\partial \Phi}$. 它定义了一个映射

$$T(\mathbf{G}) = \hat{\mathbf{G}} = (\hat{g}_1, \hat{g}_2)^T.$$

问题 3 的一个解与 T 的一个不动点相同.

令 $\mathbf{G} \in \mathcal{S}$, 我们在特征 $C_i(g_1, g_2)$ (在 (5.6) 中定义) 上积分 (6.1) 得到

$$\hat{g}_i(\tau, \phi) = \int_0^\tau \left[\frac{g_1 + g_2}{2s} - z_i(\mathbf{G}) \cdot \left(\frac{g_1 + g_2}{s} + 2a_1 \right) + b_i(\mathbf{G}) + c_i(\mathbf{G}) \right] ds, \quad i = 1, 2. \quad (6.3)$$

这里及以后, 积分的变量是 $(s, \phi_i(s; \tau, \phi))$.

我们证明 $\hat{\mathbf{G}}$ 是 C^1 的, 则它就是 (6.1) 和 (6.2) 的一个 C^1 解. 所以, 映射 T 由 (6.3) 建立. 我们首先考虑 $\hat{g}_{i, \phi}$ 的连续性. 这并不是显然的, 原因在于, (6.3) 中的 c_i 包含了 a'_0 和 a'_1 , 而我们仅假定了 a_0 和 a_1 是 C^1 的. 注意到

$$\frac{d}{ds} a_0(\phi_i(s; \tau, \phi)) = a'_0(\phi_i) \lambda_i(s, \phi_i), \quad (6.4)$$

所以,

$$\int_0^\tau [\lambda_i \cdot a'_0(\phi_i)](s, \phi_i(s; \tau, \phi)) ds = a_0(\phi) - a_0(\phi_i(0; \tau, \phi)). \quad (6.5)$$

关于 ϕ 微分, 我们得到

$$a'_0(\phi) - a'_0(\phi_i(0; \tau, \phi)) \frac{\partial \phi_i}{\partial \phi}(0; \tau, \phi), \quad (6.6)$$

其中

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \phi}(s; \tau, \phi) = \exp \int_\tau^s \frac{\partial \lambda_i(g_1, g_2)}{\partial \phi} ds. \quad (6.7)$$

类似地, 我们有

$$\int_0^\tau [s \lambda_i \cdot a'_1(\phi_i)](s, \phi_i(s; \tau, \phi)) ds = \tau a_1(\phi) - \int_0^\tau a_1(\phi_i(s; \tau, \phi)) ds, \quad (6.8)$$

将方程 (6.8) 关于 ϕ 微分, 可得

$$\tau a'_1(\phi) - \int_0^\tau \left[a'_1(\phi_i) \frac{\partial \phi_i}{\partial \phi} \right](s, \phi_i(s; \tau, \phi)) ds. \quad (6.9)$$

由 (6.6) 和 (6.9), 我们得到 $\frac{\partial \hat{g}_i}{\partial \phi}$ 的连续性. 类似可以得到 $\hat{g}_{i,\tau}$ 的连续性.

由 (6.3) 和 (6.5)–(6.9), 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{g}_i(\tau, \phi)}{\partial \phi} &= (-1)^{(i-1)} \cdot \left[a'_0(\phi) - a'_0(\phi_i(0; \tau, \phi)) \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial \phi}(0; \tau, \phi) \right] - \left\{ \tau a'_1(\phi) - \int_0^\tau \left[a'_1(\phi_i) \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial \phi} \right] ds \right\} \\ &\quad + \int_0^\tau \left\{ \frac{g_{1,\phi_i} + g_{2,\phi_i}}{2s} - \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[z_i \left(\frac{g_1 + g_2}{s} + 2a_1(\phi_i) \right) \right] + \frac{\partial b_i}{\partial \phi_i} \right\} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial \phi} ds, \end{aligned} \quad (6.10)$$

对于 $i = 1, 2$ 成立. 由 (6.1) 可得

$$\frac{\partial \hat{g}_i(\tau, \phi)}{\partial \tau} = \frac{g_1 + g_2}{2\tau} - z_1(\mathbf{G}) \cdot \left(\frac{g_1 + g_2}{\tau} + 2a_1 \right) + b_1(\mathbf{G}) + c_1(\mathbf{G}) - \lambda_i(\mathbf{G}) \frac{\partial \hat{g}_i}{\partial \phi}. \quad (6.11)$$

表达式 (6.3)、(6.10) 和 (6.11) 是几个需要建立的关键表达式. 这里我们指出, 像 $\frac{\partial b_i}{\partial \phi_i}$ 这样的符号表示复合函数 $b_i(s, \phi_i, g_1(s, \phi_i), g_2(s, \phi_i))$ 关于 ϕ_i 的偏微分.

6.1 基本的估计

引理 1 在定理 2 的假设条件下, 存在正的常数 δ 、 M 和 $\beta \in (0, 1)$ 使得

(i) T 将 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_M(\delta)$ 映射到 $\mathcal{S}$ 上;

(ii) $d(T(\mathbf{G}), T(\mathbf{H})) \leq \beta d(\mathbf{G}, \mathbf{H})$.

常数 δ 、 M 和 β 仅依赖 a_0 和 a_1 在 $[\phi_1, \phi_2]$ 上的 $C^{1, \frac{2}{3}}$ 范数以及 (4.8) 中的常数 ϵ .

证明 为减少符号, 我们用 k 表示仅依赖于 ϵ 以及 a_0 和 a_1 在 $[\phi_1, \phi_2]$ 上范数的不同的常数. 不失一般性, 假定

$$\delta \leq \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{4 \|a_1\|_\infty} \right\}, \quad M\delta \leq \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{4} \right\}.$$

(6.3) 的分母中各项的主要非零量为

$$\tilde{g}_i := (-1)^i a_0 + a_1 \tau + g_i, \quad i = 1, 2, \quad (6.12)$$

它们具有正的上下界

$$\frac{\epsilon}{2} \leq |\tilde{g}_i| \leq k. \quad (6.13)$$

回顾 (5.3), 我们可以改写为

$$\begin{aligned} z_1(g_1, g_2) |_{(\tau, \phi)} &= \frac{(2a_1c^2 + \mu^2)\tau + c^2(g_1 + g_2) + \tilde{g}_1\tau^2}{2(c^2\tilde{g}_2 + \mu^2\tau)}, \\ z_2(g_1, g_2) |_{(\tau, \phi)} &= \frac{(2a_1c^2 + \mu^2)\tau + c^2(g_1 + g_2) + \tilde{g}_2\tau^2}{2(c^2\tilde{g}_1 + \mu^2\tau)}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

所以,

$$|z_1(g_1, g_2)| \leq k\tau, \quad |z_2(g_1, g_2)| \leq k\tau. \quad (6.15)$$

对于 $i = 1, 2$, 我们可以直接得到如下的估计:

$$|\lambda_i(\mathbf{G})(\tau, \phi)| \leq k\tau^2, \quad |b_i(\mathbf{G})| \leq k\tau, \quad |c_i(\mathbf{G})| \leq k\tau^2. \quad (6.16)$$

(6.3) 的主要项为

$$\left| \frac{g_1 + g_2}{2s} \right| = \left| \frac{g_1 + g_2}{s^2} \cdot \frac{s}{2} \right| \leq \frac{Ms}{2}. \quad (6.17)$$

因而, 由 (6.3) 得

$$|\hat{g}_i(\tau, \phi)| \leq \int_0^\tau \left[\frac{Ms}{2} + ks + ks + ks^2 \right] ds \leq \frac{M\tau^2}{4} + k\tau^2, \quad (6.18)$$

对于 $i = 1, 2$ 成立. 上式除以 τ^2 , 我们得到

$$\left\| \frac{\hat{\mathbf{G}}(\tau, \phi)}{\tau^2} \right\|_\infty \leq \frac{M}{2} + k. \quad (6.19)$$

选取 M 充分大, 例如, $M > 3k$, 我们可以得到 $\left\| \frac{\hat{\mathbf{G}}(\tau, \phi)}{\tau^2} \right\|_\infty \leq M$. 为了证明性质 (S₃), 我们将使用 (6.10). 其中第一项

$$\begin{aligned} & a'_0(\phi) - a'_0(\phi_i(0; \tau, \phi)) \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial \phi}(0; \tau, \phi) \\ &= [a'_0(\phi_i(\tau)) - a'_0(\phi_i(0))] \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial \phi}(\tau; \tau, \phi) + a'_0(\phi_i(0)) \cdot \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial \phi}(\tau) - \frac{\partial \phi_i}{\partial \phi}(0) \right] \\ &\leq k|\phi_i(\tau) - \phi_i(0)|^{\frac{2}{3}} + k\tau \left| \frac{d}{ds} \frac{\partial \phi_i}{\partial \phi}(s; \tau, \phi) \right|_\infty \\ &\leq k(|\lambda_i|_\infty \tau)^{\frac{2}{3}} + k\tau^3 \\ &\leq k\tau^2 + k\tau^3. \end{aligned} \quad (6.20)$$

这里使用了 a'_0 关于指数 $\frac{2}{3}$ 的 Hölder 连续性 (5.6)、(5.4) 和 (6.7).

类似地, 我们有

$$\begin{aligned} \tau a'_1(\phi) - \int_0^\tau \left[a'_1(\phi_i) \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial \phi} \right] ds &= \int_0^\tau \left[a'_1(\phi) - a'_1(\phi_i(s)) \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial \phi} \right] ds \\ &\leq \int_0^\tau k(|\lambda_i|_\infty s)^{\frac{2}{3}} + ks^3 ds \leq \int_0^\tau ks^2 + ks^3 ds \\ &\leq k\tau^3. \end{aligned} \quad (6.21)$$

像之前一样, 我们记 $\frac{g_{1,\phi}+g_{2,\phi}}{2s} = \frac{g_{1,\phi}+g_{2,\phi}}{s^2} \cdot \frac{s}{2}$, 所以,

$$\left| \int_0^\tau \frac{g_{1,\phi}+g_{2,\phi}}{2s} ds \right| \leq \frac{M\tau^2}{4}. \quad (6.22)$$

将 (6.14) 关于 ϕ 微分, 则对于 $i = 1, 2$, 我们得到估计

$$\left| \frac{\partial z_i(g_1, g_2)}{\partial \phi} \right| \leq k\tau. \quad (6.23)$$

由 (6.7) 显然可以得到

$$\left| \frac{\partial \phi_i(s; \tau, \phi)}{\partial \phi} \right| \leq k. \quad (6.24)$$

应用 (6.20)–(6.24) 和 (6.15), 我们估计 (6.10) 从而得到

$$\left| \frac{\partial \hat{g}_i(\tau, \phi)}{\partial \phi} \right| \leq k\tau^2 + \frac{M\tau^2}{4}.$$

上式除以 τ^2 , 并选取 M 充分大, 得到

$$\left\| \frac{\partial_\phi \hat{G}(\tau, \phi)}{\tau^2} \right\| \leq \frac{M}{2} + k \leq M. \quad (6.25)$$

最后证明映射 T 的压缩性. 令 $\mathbf{G} = (g_1, g_2)^T$ 和 $\mathbf{H} = (h_1, h_2)^T$. 它们的象是 $\hat{\mathbf{G}} = (\hat{g}_1, \hat{g}_2)^T := T\mathbf{G}$ 和 $\hat{\mathbf{H}} = (\hat{h}_1, \hat{h}_2)^T := T\mathbf{H}$. 由 T 的定义, 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{d_i(\mathbf{G})} \hat{g}_i &= \frac{g_1 + g_2}{2\tau} - z_i(\mathbf{G}) \cdot \left(\frac{g_1 + g_2}{\tau} + 2a_1 \right) + b_i(\mathbf{G}) + c_i(\mathbf{G}), \\ \frac{d}{d_i(\mathbf{H})} \hat{h}_i &= \frac{h_1 + h_2}{2\tau} - z_i(\mathbf{H}) \cdot \left(\frac{h_1 + h_2}{\tau} + 2a_1 \right) + b_i(\mathbf{H}) + c_i(\mathbf{H}), \end{aligned}$$

对 $i = 1, 2$ 成立, 且 z_i 、 b_i 和 c_i 如 (5.3) 中定义. 注意到

$$\frac{d}{d_1(\mathbf{G})} = \frac{d}{d_1(\mathbf{H})} + (\lambda_1(\mathbf{G}) - \lambda_1(\mathbf{H})) \frac{\partial}{\partial \phi},$$

我们得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{d_1(\mathbf{G})} (\hat{g}_1 - \hat{h}_1) &= \left(\frac{g_1 + g_2}{2\tau} - \frac{h_1 + h_2}{2\tau} \right) - z_1(\mathbf{G}) \cdot \left(\frac{g_1 + g_2}{\tau} - \frac{h_1 + h_2}{\tau} \right) \\ &\quad - (z_1(\mathbf{G}) - z_1(\mathbf{H})) \cdot \left(\frac{h_1 + h_2}{\tau} + 2a_1 \right) + (b_1(\mathbf{G}) - b_1(\mathbf{H})) \\ &\quad + (c_1(\mathbf{G}) - c_1(\mathbf{H})) + (\lambda_1(\mathbf{G}) - \lambda_1(\mathbf{H})) \cdot \frac{\partial \hat{h}_1}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

第一项可以如下估计:

$$\left| \frac{g_1 + g_2}{2\tau} - \frac{h_1 + h_2}{2\tau} \right| \leq \frac{\tau}{2} \left(\left\| \frac{g_1 - h_1}{\tau^2} \right\|_\infty + \left\| \frac{g_2 - h_2}{\tau^2} \right\|_\infty \right) = \frac{\tau}{2} \cdot d(\mathbf{G}, \mathbf{H}). \quad (6.27)$$

容易得到

$$\begin{aligned} \left| z_1(\mathbf{G}) \cdot \left(\frac{g_1 + g_2}{\tau} - \frac{h_1 + h_2}{\tau} \right) \right| &\leq k\tau^2 \cdot d(\mathbf{G}, \mathbf{H}), \\ \left| (z_1(\mathbf{G}) - z_1(\mathbf{H})) \cdot \left(\frac{h_1 + h_2}{\tau} + 2a_1 \right) \right| &\leq k\tau^2 \cdot d(\mathbf{G} - \mathbf{H}), \\ |b_1(\mathbf{G}) - b_1(\mathbf{H})| &\leq k\tau^3 \cdot d(\mathbf{G}, \mathbf{H}), \quad |c_1(\mathbf{G}) - c_1(\mathbf{H})| \leq k\tau^4 \cdot d(\mathbf{G}, \mathbf{H}), \\ |\lambda_1(\mathbf{G}) - \lambda_1(\mathbf{H})| &\leq k\tau^4 \cdot d(\mathbf{G}, \mathbf{H}), \end{aligned} \quad (6.28)$$

因为我们已经证明了性质 (i), 所以有 $\hat{H} \in \mathcal{S}$ 和

$$\left| \frac{\partial \hat{h}_1(t, \phi)}{\partial \phi} \right| \leq M\tau^2 \leq k\tau.$$

将方程 (6.26) 从特征 0 到 ξ 积分并应用以上估计, 可得

$$|\hat{g}_1 - \hat{h}_1| \leq \int_0^\xi \frac{\tau}{2} d(\mathbf{G}, \mathbf{H}) + k\tau^2 \cdot d(\mathbf{G}, \mathbf{H}) \leq \left(\frac{\xi^2}{4} + k\xi^3 \right) \cdot d(\mathbf{G}, \mathbf{H}). \quad (6.29)$$

通过完全类似的讨论可得

$$|\hat{g}_2(\xi, \eta) - \hat{h}_2(\xi, \eta)| \leq \left(\frac{\xi^2}{4} + k\xi^3 \right) \cdot d(\mathbf{G}, \mathbf{H}). \quad (6.30)$$

作为上面的结果, 我们得到

$$d(\hat{\mathbf{G}}, \hat{\mathbf{H}}) \leq \left(\frac{1}{2} + k\delta \right) \cdot d(\mathbf{G}, \mathbf{H}) = \beta \cdot d(\mathbf{G}, \mathbf{H}). \quad (6.31)$$

选取 δ 充分小以及适当选取常数 $\beta < 1$, 我们得到了性质 (ii). 至此我们完成了引理的证明. $\square$

7 等度连续性的证明

考虑迭代序列 $\{\mathbf{G}^{(n)}\}$, 其中 $\mathbf{G}^{(n)} = T\mathbf{G}^{(n-1)}$, 并且 $\mathbf{G}^{(0)} \in \mathcal{S}$. 由引理 1 知, 该序列收敛到一个连续函数 $\mathbf{G} \in \mathcal{W}$. 我们想证明 $\mathbf{G}$ 在区域 $D(\delta)$ 的内部确实是可微的. 由引理 1 和 (6.11) 可知, $\{\mathbf{G}_\phi^{(n)}\}$ 和 $\{\mathbf{G}_\tau^{(n)}\}$ 是一致有界的. 我们将使用连续模作为主要工具来证明 $\{\mathbf{G}_\phi^{(n)}\}$ 和 $\{\mathbf{G}_\tau^{(n)}\}$ 在区域 $D(\delta)$ 内部是等度连续的. 相应的定义和性质可参见文献 [10, 11].

定义 2 令 $B(t_1, t_2, \dots, t_m)$ 为区域 $S \subset \mathbb{R}^m$ 上的一个函数, 则 B 在集合 S 上的连续模为

$$\omega(h; B) := \sup |B(t_1, \dots, t_m) - B(t'_1, \dots, t'_m)|,$$

这里上界取遍所有 Euclid 距离小于等于 h 的点.

显然, B 是一致连续的当且仅当 $\omega(h; B) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$). 一族函数 $\{B^{(n)}\}$ 是一致等度连续的当且仅当存在满足 $\omega(h) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$) 的 $\omega(h)$, 使得 $\omega(h; B^{(n)}) \leq \omega(h)$ 对所有的 n 都成立.

我们将在证明中使用如下的命题:

命题 4 连续模具有如下性质:

- (1) 若 f Lipschitz 连续, 则 $\omega(h; f) \leq Nh$, 其中 N 是 Lipschitz 常数; 若 f 可微, 则 $\omega(h; f) \leq \|f\|_1 h$.
- (2) $\omega(h; f + g) \leq \omega(h; f) + \omega(h; g)$.
- (3) $\omega(h; fg) \leq \|f\|_0 \omega(h; g) + \|g\|_0 \omega(h; f)$, 其中 $\|\cdot\|_0$ 是 C^0 范数.
- (4) $\omega(h; f/g) \leq \frac{\|f\|_0}{a^2} \omega(h; g) + \frac{1}{a} \omega(h; f)$ 对伸缩函数 g 成立并且 $|g| \geq a > 0$.
- (5) $\omega(h; f(g)) \leq \omega(h; g; f) \leq \|f\|_1 \omega(h; g)$.
- (6) $\omega(h; F) \leq \delta \omega(h; f) + \|f\|_0 [\omega(h; \varphi) + \omega(h; \psi)]$, 其中 F 如下定义:

$$F(x, y) = \int_{\psi(x, y)}^{\varphi(x, y)} f(t, x, y) dt, \quad 0 \leq \psi \leq \varphi \leq \delta.$$

- (7) $\omega(ch; f) \leq ([c] + 1) \omega(h; f)$, 其中 $c > 0$ 是常数, $[c]$ 是 c 的整数部分.

引理 2 迭代序列具有如下性质: $\{G_\phi^{(n)}\}$ 和 $\{G_\tau^{(n)}\}$ 在区域 $D(\delta)$ 内部是等度连续的.

证明 任意固定 $\epsilon > 0$, 令 $D^\epsilon(\delta) := D(\delta) \cap \{(\tau, \phi) \mid \tau \geq \epsilon > 0\}$. 我们给出迭代序列在区域 $D^\epsilon(\delta)$ 内导数的估计. 令 K 是依赖于 M 、 δ 和 ϵ 但不依赖于某个单独的 $G \in \mathcal{S}$ 的常数. 我们逐条验证. 令 (τ_1, ϕ_1) 和 (τ_2, ϕ_2) 为 $D^\epsilon(\delta)$ 中距离小于 h 的两个点. 将 (6.10) 两边都除以 τ^2 , 则有

$$\frac{1}{\tau^2} \frac{\partial \hat{g}_1(\tau, \phi)}{\partial \phi} =: I + II + III + IV + V, \quad (7.1)$$

其中

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\tau^2} \cdot \left[a'_0(\phi) - a'_0(\phi_1(0; \tau, \phi)) \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \phi}(0; \tau, \phi) \right], \\ II &= -\frac{1}{\tau^2} \left[\tau a'_1(\phi) - \int_0^\tau \left[a'_1(\phi_1) \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \phi}(s, \phi_1(s; \tau, \phi)) \right] ds \right], \\ III &= \frac{1}{\tau^2} \int_0^\tau \frac{g_{1, \phi_1} + g_{2, \phi_1}}{2s} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \phi}(s, \phi_1(s; \tau, \phi)) ds, \\ IV &= \frac{1}{\tau^2} \int_0^\tau \left\{ -\frac{\partial}{\partial \phi_1} \left[z_1 \cdot \left(\frac{g_1 + g_2}{s} + 2a_1(\phi_1) \right) \right] + \frac{\partial b_1}{\partial \phi_1} \right\} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \phi} ds. \end{aligned}$$

由以上所列的性质, 结合 a_0 和 a_1 是 $C^{1, \frac{2}{3}}$ 的以及 $\frac{\partial \phi_1(s; \tau, \phi)}{\partial \phi}$ 关于 τ 和 ϕ 是可微的, 我们有

$$\omega(h; a'_0) \leq Kh^{\frac{2}{3}}, \quad \omega(h; a'_1) \leq Kh^{\frac{2}{3}}.$$

因此,

$$\omega(h; I) \leq Kh^{\frac{2}{3}}, \quad \omega(h; II) \leq Kh^{\frac{2}{3}}. \quad (7.2)$$

对于 III , 我们用其定义来计算连续模. 注意到 $\frac{\partial \phi_1(s; \tau, \phi)}{\partial \phi}$ 关于 τ 和 ϕ 都是可微的, 则我们仅需计算

$$III' = \frac{1}{\tau^2} \int_0^\tau \frac{g_{1, \phi_1} + g_{2, \phi_1}}{2s} (s, \phi_1(s; \tau, \phi)) ds$$

基于 (5.6) 和 (5.4), 它们的特征几乎是一样的, 则不失一般性, 假定 $\epsilon \leq \tau_1 < \tau_2$, $\phi_1 < \phi_2$. 令点 (τ_1, ϕ_3) 位于曲线 $\phi_1(s; \tau_2, \phi_2)$ 上 (见图 3), 则点对 (τ_1, ϕ_1) 和 (τ_1, ϕ_3) 的距离以及点对 (τ_1, ϕ_3) 和 (τ_2, ϕ_2) 的距离都小于 h . 所以,

图 3 等度连续证明示意图

$$\begin{aligned} III'(\tau_1, \phi_1) - III'(\tau_1, \phi_3) &= \frac{1}{\tau_1^2} \int_0^{\tau_1} \frac{s}{2} \cdot \sum_{i=1,2} \left\{ \frac{g_{i,\phi_1}}{s^2}(s; \phi_1(s; \tau_1, \phi_1)) - \frac{g_{i,\phi_1}}{s^2}(s; \phi_1(s; \tau_1, \phi_3)) \right\} ds \\ &\leq \left[\omega\left((1+\delta^2)h; \frac{g_{1,\phi}}{s^2}\right) + \omega\left((1+\delta^2)h; \frac{g_{2,\phi}}{s^2}\right) \right] \cdot \frac{1}{4}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

以及

$$III'(\tau_1, \phi_3) - III'(\tau_2, \phi_2) \leq K \cdot h. \quad (7.4)$$

结合 (7.3) 和 (7.4), 我们得到如下的估计:

$$III'(\tau_1, \phi_1) - III'(\tau_2, \phi_2) \leq \left[\omega\left((1+\delta^2)h; \frac{g_{1,\phi}}{s^2}\right) + \omega\left((1+\delta^2)h; \frac{g_{2,\phi}}{s^2}\right) \right] \cdot \frac{1}{4} + Kh. \quad (7.5)$$

所以有

$$\omega(h; III) \leq Kh + \frac{1+\delta^2}{4} \cdot \left[\omega\left((1+\delta^2)h; \frac{g_{1,\phi}}{s^2}\right) + \omega\left((1+\delta^2)h; \frac{g_{2,\phi}}{s^2}\right) \right]. \quad (7.6)$$

应用与 III 类似的讨论, 可以得到

$$\omega(h; IV) \leq Kh^{\frac{2}{3}} + k\delta \cdot \left[\omega\left((1+\delta^2)h; \frac{g_{1,\phi}}{s^2}\right) + \omega\left((1+\delta^2)h; \frac{g_{2,\phi}}{s^2}\right) \right]. \quad (7.7)$$

我们应该特别注意包含 $\omega((1+\delta^2)h; \frac{g_{1,\phi}}{s^2})$ 和 $\omega((1+\delta^2)h; \frac{g_{2,\phi}}{s^2})$ 的两项. 在 (7.7) 中, 因子 δ 源于那些阶 $O(\tau^2)$ 乘以 $\frac{g_{i,\phi_1}}{s^2}$ 的项, 其中 $i = 1, 2$. 因此有

$$\omega\left(h; \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial \hat{g}_1(\tau, \phi)}{\partial \phi}\right) \leq Kh^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{4} + k\delta\right) \cdot \left[\omega\left((1+\delta^2)h; \frac{g_{1,\phi}}{s^2}\right) + \omega\left((1+\delta^2)h; \frac{g_{2,\phi}}{s^2}\right) \right]. \quad (7.8)$$

通过完全类似的讨论, 可以得到

$$\omega\left(h; \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial \hat{g}_2(\tau, \phi)}{\partial \phi}\right) \leq Kh^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{4} + k\delta\right) \cdot \left[\omega\left((1+\delta^2)h; \frac{g_{1,\phi}}{s^2}\right) + \omega\left((1+\delta^2)h; \frac{g_{2,\phi}}{s^2}\right) \right]. \quad (7.9)$$

综合所述, 我们有

$$\omega\left(h; \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial \hat{g}_1(\tau, \phi)}{\partial \phi}\right) + \omega\left(h; \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial \hat{g}_2(\tau, \phi)}{\partial \phi}\right) \leq Kh^{\frac{2}{3}} + q \cdot \left[\omega\left((1+\delta^2)h; \frac{g_{1,\phi}}{s^2}\right) + \omega\left((1+\delta^2)h; \frac{g_{2,\phi}}{s^2}\right) \right], \quad (7.10)$$

其中 $q = \frac{1}{2} + k\delta$, 并且通过选取 δ 充分小, 我们可以取 $q < 1$. 将 (7.10) 应用到迭代序列 $\{\mathbf{G}^n\}$ 上, 由递归公式可得

$$\begin{aligned} &\omega\left(h; \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial g_1^{(n)}(\tau, \phi)}{\partial \phi}\right) + \omega\left(h; \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial g_2^{(n)}(\tau, \phi)}{\partial \phi}\right) \\ &\leq Kh^{\frac{2}{3}}(1 + \tilde{q} + \cdots + \tilde{q}^n) + q^n \cdot \left[\omega\left((1+\delta^2)^n h; \frac{g_{1,\phi}^{(0)}}{s^2}\right) + \omega\left((1+\delta^2)^n h; \frac{g_{2,\phi}^{(0)}}{s^2}\right) \right] \\ &\leq \frac{K}{1-\tilde{q}} h^{\frac{2}{3}} + q^n ((1+\delta^2)^n + 1) \cdot \left[\omega\left(h; \frac{g_{1,\phi}^{(0)}}{s^2}\right) + \omega\left(h; \frac{g_{2,\phi}^{(0)}}{s^2}\right) \right] \\ &\leq \frac{K}{1-\tilde{q}} h^{\frac{2}{3}} + \left[\omega\left(h; \frac{g_{1,\phi}^{(0)}}{s^2}\right) + \omega\left(h; \frac{g_{2,\phi}^{(0)}}{s^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (7.11)$$

其中 $\tilde{q} = q(1 + \delta^2)^{\frac{2}{3}}$, 最后一个不等式可以通过命题 4(7) 以及选取 δ 充分小使得 $q^n((1 + \delta^2)^n + 1) \leq 1$ 来得到. 所以, 序列 $\{G_\phi^{(n)}\}$ 在 $D^\epsilon(\delta)$ 中是一致等度连续的. 再由 (6.11), 我们得到 $\{G_\tau^{(n)}\}$ 也是等度连续的. $\square$

作为引理 1 和 2 的结论, 我们可通过使用 Arzela-Ascoli 定理得到定理 2. 显然, 定理 2 蕴含着问题 2 存在一个解, 它在 $D(\delta)$ 的内部连续可微, 满足系统 (4.5) 并且一直到满足 (4.7) 和 (4.11) 的 $t = 0$ 的边界上都是连续的.

8 (ξ, η) 平面上解的存在性

本节将 (τ, ϕ) 平面上的解变换回 (ξ, η) 平面上. 我们将验证它是问题 1 的一个解, 于是我们即得到定理 1.

这个过程需要三步. 首先, 在问题 2 的解 $(\tilde{R}, \tilde{S})$ 之上, 由命题 1 和 (4.4), 我们可以通过求解

$$\tilde{\sigma}_\tau = \frac{2\mu^2\tau \sin \omega}{c^2(\tilde{R} - \tilde{S})} \left[\frac{(\tilde{R} + \tilde{S}) \cos \omega}{\gamma - 1} + \frac{\sin \omega}{c} \right], \quad \tilde{\sigma}(0, \phi) = \tilde{\sigma}_0(\phi) \quad (8.1)$$

来得到 (τ, ϕ) 平面上的流角 (flow angle) $\tilde{\sigma}$. 可以验证

$$\tilde{\sigma}_\phi = \frac{4\tilde{R}\tilde{S} \sin \omega}{(\gamma - 1)Q(\tilde{R} - \tilde{S})} + \frac{\sin^2 \omega}{c(\tilde{R} - \tilde{S})} \frac{\tilde{R} + \tilde{S}}{\tau} + \frac{2\mu^2 \sin^2 \omega}{c^3(\tilde{R} - \tilde{S})} + \frac{\sin(2\omega) \cdot (\tilde{R} + \tilde{S})}{c^2(\gamma + 1)(\tilde{R} - \tilde{S})}. \quad (8.2)$$

接下来, 我们使用 $\tilde{\sigma}$ 来构造拟速度

$$\tilde{U}(\tau, \phi) = Q \cos \tilde{\sigma}, \quad \tilde{V}(\tau, \phi) = Q \sin \tilde{\sigma}.$$

最后, 通过如下 Jacobi 变换:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial \eta}}{j} = \frac{2\mu^2\tau \sin \omega \sin \tilde{\sigma}}{c^2(\tilde{R} - \tilde{S})}, \quad \xi(0, \phi) = \xi_0(\phi) \quad (8.3)$$

和

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial \xi}}{j} = -\frac{2\mu^2\tau \sin \omega \cos \tilde{\sigma}}{c^2(\tilde{R} - \tilde{S})}, \quad \eta(0, \phi) = f(\xi_0(\phi)), \quad (8.4)$$

我们找到 (τ, ϕ) 这一点的自相似坐标 (ξ, η) .

我们再次可以验证

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \phi} &= \frac{2\mu^2 \sin \tilde{\sigma}}{cQ(\tilde{R} - \tilde{S})} + \frac{\cos \tilde{\sigma}}{Q} + \frac{c \sin \tilde{\sigma}}{Q(\tilde{R} - \tilde{S})} \frac{\tilde{R} + \tilde{S}}{\tau}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \phi} &= -\frac{2\mu^2 \cos \tilde{\sigma}}{cQ(\tilde{R} - \tilde{S})} + \frac{\sin \tilde{\sigma}}{Q} - \frac{c \cos \tilde{\sigma}}{Q(\tilde{R} - \tilde{S})} \frac{\tilde{R} + \tilde{S}}{\tau}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

令 $U(\xi, \eta) = \tilde{U}(\tau(\xi, \eta), \phi(\xi, \eta))$, $V(\xi, \eta) = \tilde{V}(\tau(\xi, \eta), \phi(\xi, \eta))$, 则

$$u(\xi, \eta) = U(\xi, \eta) + \xi, \quad v(\xi, \eta) = V(\xi, \eta) + \eta.$$

使用以上的关系, 通过一些繁琐但直接的计算, 我们可以验证系统 (1.3) 成立, 以及 u 和 v 是定理 1 的一个解.

致谢 第一作者感谢张擎天的有益讨论.

参考文献

- 1 Li J, Zheng Y. Interaction of rarefaction waves of the two-dimensional self-similar euler equations. Arch Ration Mech Anal, 2009, 193: 623–657
- 2 Li J. On the two-dimensional gas expansion for compressible Euler equations. SIAM J Appl Math, 2002, 62: 831–852
- 3 Li J, Zheng Y. Interaction of four rarefaction waves in the bi-symmetric class of the two-dimensional euler equations. Comm Math Phys, 2010, 296: 303–321
- 4 Li M, Zheng Y. Semi-hyperbolic patches of solutions to the two-dimensional Euler equations. Arch Ration Mech Anal, 2011, 201: 1069–1096
- 5 Song K, Wang Q, Zheng Y. The regularity of semi-hyperbolic patches near sonic lines for the 2-D Euler system in gas dynamics. SIAM J Math Anal, 2015, 47: 2200–2219
- 6 Chen G Q, Feldman M. Global solutions of shock reflection by large-angle wedges for potential flow. Ann of Math (2), 2007, 171: 1067–1182
- 7 Glimm J, Ji X, Li J, et al. Transonic shock formation in a rarefaction Riemann problem for the 2D compressible Euler equations. SIAM J Appl Math, 2008, 69: 720–742
- 8 Zhang T, Zheng Y. Sonic-supersonic solutions for the steady euler equations. Indiana Univ Math J, 2014, 63: 1785–1817
- 9 Zhang T, Zheng Y. The structure of solutions near a sonic line in gas dynamics via the pressure gradient equation. J Math Anal Appl, 2016, 443: 39–56
- 10 Hartman P, Wintner A. On hyperbolic partial differential equations. Amer J Math, 1952, 74: 834–864
- 11 王柔怀, 伍卓群. 二自变量准线性双曲型方程组的若干定解问题解的存在与唯一性. 吉林大学自然科学学报, 1963, 2: 277–298

Existence of classical sonic-supersonic solutions for the pseudo steady Euler equations

ZHANG TianYou & ZHENG YuXi

Abstract We construct the sonic-supersonic solution for the two dimensional isentropic Euler equations in the self-similar plane, given the location of the sonic curve and the prescribed flow angle and speed along it. The system is degenerate and loses the hyperbolicity on the sonic curve. Singular terms also come in there. With these features, we perform a novel coordinate change and set up a proper function space with weighted metric, which yield the contraction of the solution scheme and prove the existence.

Keywords two dimensional Euler equations, sonic-supersonic solution, characteristic analysis, weighted metric

MSC(2010) 35A01, 35A09, 35A20, 35L65

doi: 10.1360/N012017-00019