G -Brown 运动的 Strassen 定理及 Lévy 连续模定理的统一形式

何萍¹, 陈增敬², 张德飞^{1*}

1. 红河学院数学学院, 蒙自 661199;

2. 山东大学数学学院, 济南 250100

E-mail: hepingky@163.com, zengjinchen@sdu.cn, zhdefei@163.com

收稿日期: 2016-11-01; 接受日期: 2017-01-03; 网络出版日期: 2017-08-08; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11231005 和 11301160)、云南省中青年学术技术带头人后备人才 (批准号: 2015HB061)、云南省自然科学基金 (批准号: 2013FZ116) 和红河学院科研 (批准号: 2014HB0204 和 14bs18) 资助项目

摘要 Brown 运动情形下的 Strassen 定理和 Lévy's 连续模定理在概率论中起着重要的作用, Muller 在 1981 年给出了它们的统一形式. 本文将 Strassen 定理和 Lévy 连续模定理推广到了 G -Brown 运动情形. 该定理可以看作是关于 G -Brown 运动的 Strassen 定理和 Lévy 连续模定理的统一体.

关键词 次线性期望 容度 G -Brown 运动 Strassen's 定理 Lévy 连续模定理

MSC (2010) 主题分类 60F17, 60F15, 60A86

1 引言

关于经典 Brown 运动的两个重要结果分别是 Strassen 定理和关于 Lévy 模的 Strassen 定理. Strassen 定理可以简要陈述如下: 当 $t \uparrow \infty$ 时,

$$\mathcal{L}_1(t) := \left\{ f(x) = \frac{W(xt)}{\sqrt{2t \log \log t}} \right\}$$

的极限点构成的集合是集合 K , 其中 K 是函数 $g(x)$ 构成的集合, $g(x)$ 满足在 $[0, 1]$ 上绝对连续且 $g(0) = 0$ 以及 $\int_0^1 g'(x)^2 dx \leq 1$. 关于 Lévy 模的 Strassen 定理就是, 当 $t \uparrow \infty$ 时,

$$\mathcal{L}_2(t) := \left\{ f(x) = \frac{W(s+xt) - W(s)}{\sqrt{2t \log 1/t}} : 0 \leq s \leq 1-t \right\}$$

的极限点构成的集合是集合 K .

英文引用格式: He P, Chen Z J, Zhang D F. A generalization of Strassen's law and Lévy's modulus of continuity for G -Brownian motion (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 305–318, doi: 10.1360/SCM-2016-0687

Muller^[1] 推广了 Strassen 定理并给出了 Strassen 定理和 Lévy 连续模定理的统一形式. 他证明了当 $t \uparrow \infty$ 时,

$$\mathcal{L}_3(t) := \left\{ f(x) = \frac{W(s+xl) - W(s)}{\sqrt{2lh(t)}} : (s, l) \in P_t \right\}$$

的极限点构成的集合是集合 K .

Peng^[2] 于 2005 年首次提出了 G -期望和 G -Brown 运动等一系列全新概念. 关于这一领域的重要结果也可参见文献 [3–10], 关于 G -鞅的结果可参见文献 [11–13]. 受到一系列关于经典 Brown 运动^[14–16] 和 G -Brown 运动的重对数律以及不变原理等结果 (如文献 [17–23]) 的启发, 在本文中, 我们将给出关于 G -Brown 运动的 Strassen 定理及 Lévy 连续模定理的一般形式. 这个结果可以看作是关于 G -Brown 运动的 Strassen 定理及 Lévy 连续模定理的统一形式. 它不仅包含 G -Brown 运动的重对数律、连续模定理和不变原理, 也包含其他一些典型的情形.

本文的结构如下: 第 2 节给出文中所需要用到的一些主要概念及引理; 第 3 节给出本文的主要结果及证明过程.

2 主要概念及引理

本节首先回忆次线性期望和 G -Brown 运动的相关知识, 更多详细内容参见文献 [6–9, 17–19] 等.

定义 2.1^[6–9] 假设 Ω 是一个给定的集合, $\mathcal{H}$ 是定义在 Ω 上的实值函数构成的线性空间, 并进一步假设所有的常数在 $\mathcal{H}$ 中, 若 $X \in \mathcal{H}$, 则 $|X| \in \mathcal{H}$. 在 $\mathcal{H}$ 上的非线性期望 $\mathbb{E}: \mathcal{H} \mapsto \mathbb{R}$ 是一个满足下面性质的泛函对所有的 $X, Y \in \mathcal{H}$, 有

(1) 单调性: 如果 $X \leq Y$, 那么, $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$;

(2) 保常数性: $\mathbb{E}[C] = C$.

称 $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ 为一个非线性期望空间. 我们主要关注次线性期望, 若非线性期望 $\mathbb{E}$ 还满足

(3) 次可加性: $\mathbb{E}[X + Y] \leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$;

(4) 正齐性: $\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda \mathbb{E}[X]$, $\forall \lambda \geq 0$,

则称 $\mathbb{E}$ 为次线性期望.

我们需要如下函数空间. 记

$$C_{l, \text{Lip}}(\mathbb{R}^n) := \{\varphi(\cdot) : |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C(1 + |x|^m + |y|^m)|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n\},$$

其中 $C > 0$, $m \in \mathbb{N}$; $C_{b, \text{Lip}}(\mathbb{R}^n)$ 记为有界函数 φ 的空间, φ 满足

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

其中 C ($C > 0$) 依赖于 φ . $C_b(\mathbb{R}^n)$ 记为在 $\mathbb{R}^n$ 中有界连续函数构成的空间. 这里用 $C_{l, \text{Lip}}(\mathbb{R}^n)$ 空间仅为了叙述及技巧性处理等方面的方便, 此处的 $C_{l, \text{Lip}}(\mathbb{R}^n)$ 空间可以用 Borel 可测函数空间来代替, 更多空间可参见文献 [9].

现在考虑如下的次线性期望空间 $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$: 对每一个 $\varphi \in C_{l, \text{Lip}}(\mathbb{R}^n)$, 如果 $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{H}$, 那么, $\varphi(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{H}$.

Peng^[6–9] 给出了次线性期望下两个随机变量的同分布及独立的概念, 这里不再重述. 若两个随机变量 X_1 和 X_2 是同分布的, 则记为 $X_1 \triangleq X_2$.

定义 2.2^[6-9] (G -正态分布) 在次线性期望空间 $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ 中的一个 d 维随机向量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ 被称为 G -正态分布, 如果对每一个 $a, b \geq 0$, 有

$$aX + b\bar{X} \triangleq \sqrt{a^2 + b^2}X,$$

其中 $\bar{X}$ 是 X 的一个独立复制.

注 2.1 记函数 G 为

$$G(A) := \frac{1}{2} \mathbb{E}[\langle AX, X \rangle], \quad A \in \mathbb{S}_d,$$

其中 $\langle x, y \rangle$ 表示 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $y \in \mathbb{R}^d$ 的向量积, $\mathbb{S}_d$ 表示所有 $d \times d$ 对称矩阵的集合. 由文献 [9] 可知, 存在一个有界闭子集 $\Sigma \subset \mathbb{S}_d$ 使得

$$G(A) = \frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \Sigma} \text{tr}[A\gamma], \quad A \in \mathbb{S}_d.$$

因此经常记 $X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$. 特别地, 如果 $d = 1$, 则记为 $X \sim \mathcal{N}(0, [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$, 其中

$$\underline{\sigma}^2 := -\mathbb{E}[-X^2], \quad \bar{\sigma}^2 := \mathbb{E}[X^2].$$

为了获得我们的结果, 以下这些引理是非常有用的.

引理 2.1^[3] 假设 ξ 服从 G -正态分布 $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$. 令 $\mathbb{P}$ 是一个概率测度且 φ 是一个有界连续函数. 如果 $\{W_t\}_{t \geq 0}$ 是一个 $\mathbb{P}$ -Brown 运动, 那么,

$$\mathbb{E}[\varphi(\xi)] = \sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\theta}[\varphi(\xi)] = \sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\varphi \left(\int_0^1 \theta_s dW_s \right) \right],$$

其中

$$\begin{aligned} \Theta &:= \{ \{ \theta_t \}_{t \geq 0} : \theta_t \text{ 是 } \mathcal{F}_t\text{-适应过程使得 } \underline{\sigma} \leq \theta_t \leq \bar{\sigma} \}, \\ \mathcal{F}_t &:= \sigma \{ B_s, 0 \leq s \leq t \} \vee \mathcal{N}, \quad \mathcal{N} \text{ 是 } \mathbb{P}\text{-零集构成的集合.} \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[X] &= \inf_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\theta}[X], \\ V(A) &:= \sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1_A], \\ v(A) &:= \inf_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1_A], \\ \forall A \in \mathcal{F} &:= \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t. \end{aligned}$$

很明显,

$$V(A) + v(A^c) = 1,$$

其中 A^c 是 A 的补集.

在一些假设条件下, 关于容度 V 和 v 的 Borel-Cantelli 引理仍然是成立的, 参见文献 [17–20].

引理 2.2 (Borel-Cantelli 引理) 假设 $\{A_n, n \geq 1\}$ 是 $\mathcal{F}$ 中的一个随机事件序列.

(1) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} V(A_n) < \infty$, 那么,

$$V\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = 0;$$

(2) 如果对一些 $\theta \in \Theta$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{\theta}(A_n) < \infty$, 那么,

$$v\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = 0;$$

(3) 假设随机变量序列 $\{A_n, n \geq 1\}$ 关于 V 满足

$$V\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) = \prod_{i=1}^{\infty} V(A_i^c),$$

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} v(A_n) = \infty$, 那么,

$$v\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = 1;$$

(4) 假设随机变量序列 $\{A_n, n \geq 1\}$ 关于 v 满足

$$v\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) = \prod_{i=1}^{\infty} v(A_i^c),$$

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} V(A_n) = \infty$, 那么,

$$V\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = 1.$$

引理 2.3^[18] 假设 $\xi \triangleq \mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$, 其中 $0 < \underline{\sigma} \leq \bar{\sigma} < \infty$. 令 ϕ 是一个有界连续函数. 进一步, 如果 ϕ 是一个正的偶函数, 那么对任意的 $b \in \mathbb{R}$, 有

$$\mathcal{E}[\phi(\xi - b)] \geq \exp\left(-\frac{b^2}{2\bar{\sigma}^2}\right) \mathcal{E}[\phi(\xi)].$$

接下来, 引入 G -Brown 运动的概念, 更多细节可参见文献 [2–9].

定义 2.3^[2–9] (G -Brown 运动) 在次线性期望空间 $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ 中的一个过程 $\{B_t\}_{t \geq 0}$ 被称为一个 G -Brown 运动, 如果对每一个 $n \in \mathbb{N}$ 以及 $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < \infty$, 有 $B_{t_1}, \dots, B_{t_n} \in \mathcal{H}$, 并且还满足下面的性质:

(1) $B_0 = 0$;

(2) 对每一个 $t, s \geq 0$, 及每一个 $n \in \mathbb{N}$, 增量 $B_{t+s} - B_t$ 独立于 $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$, 并且对于 $t, s \geq 0$, 有 $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t$;

(3) $B_{t+s} - B_t \triangleq \sqrt{s}X$, 其中 X 是 G -正态分布.

在文献 [5] 中可以发现如下引理.

引理 2.4^[5] 假设 $(B_t)_{t \geq 0}$ 是一个一维 G -Brown 运动, 且具有 $\mathbb{E}[B_1^2] = \bar{\sigma}^2$, $-\mathbb{E}[-B_1^2] = \underline{\sigma}^2$, 那么对于任意的 $t_1 < t_2$ 和 $x > 0$, 有

$$V\left(\sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \frac{|B(t) - B(t_1)|}{\bar{\sigma}} \geq x\right) \leq e^{-\frac{x^2}{t_2 - t_1}}.$$

3 主要结果

为了记号简单, 我们仅考虑一维 G -Brown 运动的情形, 但是我们的方法也可以扩展到多维 G -Brown 运动的情形. 文中有些记号采用文献 [1] 中的记号. 考虑任意一区间 $[s, s+l]$ 关联着某一点 $p = (s, l)$, 假设 $\wp$ 和 $\wp(t)$ 是任意的指标集. 对于任意一点 $p_i = (s_i, l_i)$, $i \in \wp$, 令

$$R_r(p_i) = \{(s, l) : |s - s_i| \leq l_i r, e^{-r} l_i \leq l \leq e^r l_i\},$$

记 $P = \{p_i\}_{i \in \wp}$. 令

$$A_r(P) = \int_{\bigcup_{i \in \wp} R_r(p_i)} \frac{ds dl}{l^2}.$$

类似地, 令 $P_t = \{(s_i, l_i)\}_{i \in \wp(t)}$, 以及

$$A_r(t) = \int_{\bigcup_{u \leq t} \bigcup_{p \in P_u} R_r(p)} \frac{ds dl}{l^2}.$$

在四分之一平面 $\{(s, l) : s \geq 0, l > 0\}$ 内, 构造如下的一个矩形网格子 $R_{m,n}(p)$:

$$R_{m,n}(p) = \{(s, l) : e^{mr} \leq l \leq e^{(m+1)r}, nre^{mr} \leq s \leq (n+1)re^{mr}, 0 < r < 1, m, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}.$$

如果存在常数 C_1 和 C_2 使得对所有的 x , 有 $C_1 f(x) \leq g(x) \leq C_2 f(x)$, 那么简写为 $f(x) \sim g(x)$. 如果

$$d\mu = \frac{ds dl}{l^2},$$

那么,

$$\mu(R_{m,n}(p)) = r(1 - e^{-r}) \sim r^2.$$

我们可以选择一些 $t_1 \leq t_2 \leq \dots$ 使得点 P_t 在时间 t_k 第一次进入到一个新的矩形区域 R_{m_k, n_k} ($k > 0$). 因为对于 $a > 1$, $\int_0^\infty \exp(-ah(t)) dA_1(t)$ 收敛, 对于任意给定的时间 t 仅有有限多个矩形可以进入. 令 $t_0 = 0$, R_{m_0, n_0} 是一个任意的矩形. 假设存在 $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ 以及 $R_{m_1, n_1}, \dots, R_{m_k, n_k}$. 令

$$t_{k+1} = \inf \left\{ t \geq t_k : P(t) \not\subset \bigcup_{i=1}^k R_{m_i, n_i} \right\}.$$

选择 $R_{m_{k+1}, n_{k+1}}$ 使得对于任意的 $\varepsilon > 0$, 可以找到 t 满足 $t_{k+1} < t < t_{k+1} + \varepsilon$ 和 $P(t) \cap R_{m_{k+1}, n_{k+1}} \neq \emptyset$. 这是可能的, 因为对任意的 $T > 0$, $\bigcup_{t \leq T} P(t)$ 包含在 $\{R_{m,n}\}$ 中的一些矩形的有限并内. 接下来, 假设直到时间 t 时, $\{R_{m,n}\}$ 进入矩形区域的度量为 $A'_r(t)$. 对于 $r < \frac{1}{2}$, 注意到 $(s, l) \in R_{m,n}$ 以及 $R_{m,n}$ 和 $R_1(s, l)$ 的定义可知 $R_{m,n} \subset R_1(s, l)$. 因此 $A'_r(t) \leq A_1(t)$. 如果 $a > 1$, 则 $h(t)$ 是一个增函数并且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty,$$

因为 $e^{-ah(t)}$ 是递减的且 $\int_0^\infty \exp(-ah(t)) dA_1(t)$ 收敛隐含着

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-ah(t_k)) \sim \frac{1}{r^2} \int_0^\infty \exp(-ah(t)) dA'_r(t)$$

也收敛.

定理 3.1 假设

- (1) $h(t)$ 是递增的并且 $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$;
 (2) 当 $a > 1$ ($a < 1$) 时, $\int_0^\infty \exp(-ah(t))dA_1(t)$ 收敛 (发散).

记

$$\mathcal{L}(t) := \left\{ f(x) = \frac{B(s+xl) - B(s)}{\sqrt{2lh(t)}} : (s, l) \in P_t; x \in [0, 1] \right\},$$

以及

$$K_\sigma := \left\{ g(\cdot) : g \in C([0, 1]), g(0) = 0, \int_0^1 \left(\frac{g'(x)}{\sigma} \right)^2 dx \leq 1, \sigma > 0 \right\},$$

那么,

(i)

$$v(C\{\mathcal{L}(t)\}) \subseteq K_\sigma = 1;$$

(ii)

$$v(C\{\mathcal{L}(t)\}) \supseteq K_{\underline{\sigma}} = 1;$$

(iii)

$$V(C\{\mathcal{L}(t)\}) = K_\sigma = 1, \quad \sigma \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}],$$

其中 $C\{\mathcal{L}(t)\}$ 为 $\{\mathcal{L}(t)\}$ 的聚点.

为了证明定理 3.1, 首先给出一些常用记号及重要引理. 用 $\|\cdot\|$ 表示 sup 范数以及

$$f_{s,l}(x) = \frac{B(s+xl) - B(s)}{\sqrt{2l}}.$$

假设 $\epsilon > 0$, K_σ^ϵ 表示在 $C([0, 1])$ 中的点与 K_σ 距离小于 ϵ 所构成的集合.

假设 (s_k, l_k) 是 R_{m_k, n_k} 的中心. 先固定 m . 对于 $n = 0, \dots, m$, 令

$$f_{(s,l)}^{(m)}\left(\frac{n}{m}\right) = f_{(s,l)}\left(\frac{n}{m}\right).$$

定义在这些点处的线性插值为 $f_{(s,l)}^{(m)}$. 接下来首先证明如下引理.

引理 3.1 对于固定的 r , 令 $\epsilon = \max(r, e^{2r} - 1)$, 则对于足够大的 M , 下面的估计式对所有的矩形 $R_r(p)$ 一致成立:

$$V\left\{ \sup_{(s', l') \in R_r(p)} \sup_{(s'', l'') \in R_r(p)} \|f_{s', l'} - f_{s'', l''}\| > M \right\} \leq \frac{4}{\epsilon} \exp\left(-\frac{M^2}{2^9 \bar{\sigma}^2 \epsilon^2}\right). \quad (3.1)$$

证明 因为

$$\begin{aligned} & \sup_{(s', l') \in R_r(p)} \sup_{(s'', l'') \in R_r(p)} \|f_{s', l'} - f_{s'', l''}\| \\ & \leq \sup_{(s', l') \in R_r(p)} \sup_{(s'', l'') \in R_r(p)} \frac{|B(s') - B(s'')|}{\sqrt{2l'}} \\ & \quad + \sup_{(s', l') \in R_r(p)} \sup_{(s'', l'') \in R_r(p)} \frac{\sup_{x \in [0, 1]} |B(s' + xl') - B(s'' + xl'')|}{\sqrt{2l'}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sup_{(s', l') \in R_r(p)} \sup_{(s'', l'') \in R_r(p)} \left| \frac{1}{\sqrt{2l'}} - \frac{1}{\sqrt{2l''}} \right| \left(\sup_{x \in [0, 1]} |B(s'' + xl'') - B(s'')| \right) \\
& \leq 2 \sup_{(s', l') \in R_r(p)} \sup_{(s'', l'') \in R_r(p)} \frac{\sup_{x \in [0, 1]} |B(s' + xl') - B(s'' + xl'')|}{\sqrt{2l'}} \\
& + \sup_{(s', l') \in R_r(p)} \sup_{(s'', l'') \in R_r(p)} \left| \frac{1}{\sqrt{2l'}} - \frac{1}{\sqrt{2l''}} \right| \left(\sup_{x \in [0, 1]} |B(s'' + xl'') - B(s'')| \right) \\
& =: 2I + II,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

所以,

$$V \left\{ \sup_{(s', l') \in R_r(p)} \sup_{(s'', l'') \in R_r(p)} \|f_{s', l'} - f_{s'', l''}\| > M \right\} \leq V \left\{ 2I > \frac{M}{2} \right\} + V \left\{ II > \frac{M}{2} \right\}. \tag{3.3}$$

首先,

$$V \left\{ II > \frac{M}{2} \right\} = V \left\{ \sup_{(s', l') \in R_r(p)} \sup_{(s'', l'') \in R_r(p)} \sup_{x \in [0, 1]} \frac{B(xl'')}{\sqrt{l''}\bar{\sigma}} > \frac{M}{\sqrt{2}\bar{\sigma} \cdot |\sqrt{l''/l'} - 1|} \right\}. \tag{3.4}$$

根据假设 $|\sqrt{l''/l'} - 1| \leq e^r - 1 \leq \epsilon$ 和引理 2.4, 就有

$$V \left\{ II > \frac{M}{2} \right\} \leq V \left\{ \sup_{x \in [0, 1]} \frac{B(xl'')}{\sqrt{l''}\bar{\sigma}} > \frac{M}{\sqrt{2}\bar{\sigma} \cdot \epsilon} \right\} \leq \exp \left(-\frac{M^2}{2\bar{\sigma}^2 \epsilon^2} \right). \tag{3.5}$$

注意到 $\epsilon = \max(r, e^{2r} - 1)$, 并且如果 $x \in [0, 1]$, 那么,

$$\begin{aligned}
\frac{|(s' + xl') - (s'' + xl'')|}{l'} & \leq \frac{|s' - s| + |s'' - s|}{l'} + \left| 1 - \frac{l''}{l'} \right| \\
& \leq 2r \frac{l}{l'} + \left| 1 - \frac{l''}{l'} \right| \\
& \leq 2\epsilon(1 + \epsilon) + e^{2r} - 1 \\
& \leq 4\epsilon.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

把区间 $[0, 1]$ 分成长度为 $\frac{1}{n}$ 的多个区间, 其中 $\frac{1}{n} \leq \epsilon \leq \frac{1}{n-1}$. 因此,

$$\begin{aligned}
V \left\{ I > \frac{M}{4} \right\} & = V \left\{ \sup_{(s', l') \in R_r(p)} \sup_{(s'', l'') \in R_r(p)} \frac{\sup_{x \in [0, 1]} |B(s' + xl') - B(s'' + xl'')|}{\sqrt{2l'}} > \frac{M}{4} \right\} \\
& \leq V \left\{ \sup_{-4\epsilon < \gamma < 4\epsilon} \sup_{1 < a < 2} |B(a + \gamma) - B(a)| > \frac{M}{4} \right\} \\
& \leq V \left\{ \sup_{-4\epsilon < \gamma < 4\epsilon} \sup_{0 < i < n} \left| B \left(1 + \frac{i}{n} + \gamma \right) - B \left(1 + \frac{i}{n} \right) \right| > \frac{M}{8} \right\} \\
& \leq (n+1) V \left\{ \sup_{0 < \gamma < 8\epsilon} \frac{|B(\gamma)|}{\bar{\sigma}} > \frac{M}{8\bar{\sigma}} \right\} \\
& \leq \frac{3}{\epsilon} \exp \left(-\frac{M^2}{2^9 \bar{\sigma}^2 \epsilon} \right).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

证毕. □

定理 3.1 的证明 (i) 我们首先证明定理 3.1(i). 为了证明 $V(\frac{f(s,l)}{\sqrt{h(t)}} \notin K_\sigma^\epsilon) = 0$, 只需要证明 (A)

$$V\left\{\frac{f_{(s_k, l_k)}^{(m)}}{\sqrt{h(t_k)}} \notin K_\sigma^\epsilon \text{ i.o.}\right\} = 0; \quad (3.8)$$

(B) 对于 $m\epsilon^2 > \bar{\sigma}^2$, 有

$$V\left\{\frac{\|f_{(s_k, l_k)}^{(m)} - f_{(s_k, l_k)}\|}{\sqrt{h(t_k)}} > \epsilon \text{ i.o.}\right\} = 0; \quad (3.9)$$

(C) 令 $\delta = \max(r, e^{2r} - 1)$. 如果 $\frac{\epsilon^2}{\bar{\sigma}^2 \delta} > 2^9$, 那么,

$$V\left\{\sup_{(s,l) \in R_{m_k, n_k}} \frac{\|f_{(s_k, l_k)} - f_{(s,l)}\|}{\sqrt{h(t_k)}} > \epsilon \text{ i.o.}\right\} = 0. \quad (3.10)$$

首先是 (A) 部分的证明. 对任意的 $\epsilon > 0$, 选择 λ 使得 $\frac{1}{2(1+\frac{\epsilon}{\bar{\sigma}})^2} < \lambda < \frac{1}{2}$. 记

$$A(k, \delta) := \left\{\omega : \sum_{n=1}^m m \left(\frac{f_{(s_k, l_k)}^{(m)}(\frac{n}{m}) - f_{(s_k, l_k)}^{(m)}(\frac{n-1}{m})}{\sqrt{h(t_k)}} \right)^2 > (\bar{\sigma} + \epsilon)^2 \right\},$$

那么通过 Chebyshev 不等式, 有

$$\begin{aligned} V(A(k, \delta)) &= V\left\{\frac{\sum_{n=1}^m (B(s_k + \frac{n}{m}l_k) - B(s_k + \frac{n-1}{m}l_k))^2}{\bar{\sigma}^2 \frac{l_k}{m}} > 2\left(1 + \frac{\epsilon}{\bar{\sigma}}\right)^2 h(t_k)\right\} \\ &\leq \exp\left(-2\lambda\left(1 + \frac{\epsilon}{\bar{\sigma}}\right)^2 h(t_k)\right) \left[\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\lambda B^2(\frac{l_k}{m})}{\bar{\sigma}^2 \frac{l_k}{m}}\right)\right]\right]^m. \end{aligned}$$

注意到 $e^{\lambda x^2}$ ($\lambda > 0$) 是凸函数以及 $\lambda < \frac{1}{2}$, 则有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\lambda B^2(\frac{l_k}{m})}{\bar{\sigma}^2 \frac{l_k}{m}}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\lambda B^2(1)}{\bar{\sigma}^2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{\lambda x^2}{\bar{\sigma}^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\bar{\sigma}^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{1-2\lambda}x)^2}{2\bar{\sigma}^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}} < \infty. \end{aligned}$$

因为 $\alpha := \frac{1}{2(1+\frac{\epsilon}{\bar{\sigma}})^2} < \lambda$, $\exp(-\alpha h(t_k))$ 是递减的, 定理 3.1(2) 隐含着

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\alpha h(t_k)) \sim \frac{1}{r^2} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha h(t)) dA'_r(t)$$

收敛. 因此,

$$\sum_{k=1}^{\infty} V(A(k, \epsilon)) < \infty.$$

根据 Borel-Cantelli 引理, 有

$$V\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A(k, \epsilon)\right) = 0.$$

其次是 (B) 部分的证明. 假设存在 m 使得 $\frac{m\epsilon^2}{\bar{\sigma}^2} > 1$. 记

$$D(k, m, \epsilon) := \left\{ \omega : \sup_{0 \leq n \leq m - \frac{1}{m}} \sup_{-\frac{1}{m} < \delta < \frac{1}{m}} \frac{|f_{(s_k, l_k)}(\frac{n}{m} + \delta) - f_{(s_k, l_k)}(\frac{n}{m})|}{\sqrt{h(t_k)}} > \epsilon \right\},$$

那么,

$$\begin{aligned} V(D(k, m, \epsilon)) &= V\left(\sup_{-\frac{1}{m} < \delta < \frac{1}{m}} \sup_{0 \leq n \leq m} \frac{|B(s_k + (\delta + \frac{n}{m})l_k) - B(s_k + \frac{n}{m}l_k)|}{\sqrt{l_k}\bar{\sigma}} > \frac{\epsilon\sqrt{2h(t_k)}}{\bar{\sigma}}\right) \\ &\leq (m+1)V\left(\sup_{0 < \delta < 2\frac{1}{m}} \frac{|B(\delta l_k)|}{\sqrt{l_k}\bar{\sigma}} > \frac{\epsilon\sqrt{2h(t_k)}}{\bar{\sigma}}\right) \\ &\leq (m+1)\exp\left(-\frac{(\frac{\epsilon\sqrt{2h(t_k)}}{\bar{\sigma}})^2}{\frac{2}{m}}\right) \\ &= (m+1)\exp\left(-\frac{m\epsilon^2 h(t_k)}{\bar{\sigma}^2}\right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

因为 $\frac{m\epsilon^2}{\bar{\sigma}^2} > 1$, 当对 k 进行求和时, 这个级数是收敛的. 因此, 根据 Borel-Cantelli 引理, 可得

$$V(D(k, m, \epsilon) \text{ i.o.}) = 0.$$

最后是 (C) 部分的证明. 假设 $E(k, \epsilon)$ 表示如下的事件:

$$\sup_{(s, l) \in R_{m_k, n_k}} \frac{\|f_{(s_k, l_k)} - f_{(s, l)}\|}{\sqrt{h(t_k)}} > \epsilon.$$

根据引理 3.1, 可得

$$V\{E(k, \epsilon)\} \leq \frac{4}{\delta} \exp\left(-\frac{\epsilon^2 h(t_k)}{2^9 \bar{\sigma}^2 \delta}\right). \quad (3.12)$$

因为 $\frac{\epsilon^2}{2^9 \bar{\sigma}^2 \delta} > 1$, 从 Borel-Cantelli 引理可知,

$$V(E(k, \epsilon) \text{ i.o.}) = 0.$$

因此, 根据 (A)–(C) 的证明可知,

$$v(C\{\mathcal{L}(t)\}) \subseteq K_{\bar{\sigma}} = 1.$$

(ii) 为了证明定理 3.1(ii), 需要证明对任意的 $g \in K_{\underline{\sigma}}$, 存在一个序列 $t'_k \uparrow \infty$ 以及点 $(s'_k, l'_k) \in \mathbb{P}(t'_k)$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{f_{(s'_k, l'_k)}}{\sqrt{h(t'_k)}} - g \right\| = 0. \quad (3.13)$$

固定 m . 假设 $K_{\underline{\sigma}}(\epsilon, m)$ 满足 $\int_0^1 (\frac{g'(x)}{\underline{\sigma}})^2 dx \leq 1$ 及在区间 $\frac{n-1}{m} \leq x \leq \frac{n}{m}$ 上是线性函数构成的集合.

因为 $\bigcup_{m, \epsilon} K_{\underline{\sigma}}(\epsilon, m)$ 在 $K_{\underline{\sigma}}$ 内是稠密的, 因此只需要证明对所有的 $g \in K_{\underline{\sigma}}(\epsilon, m)$, (3.13) 成立. 记

$$F(k) := \left\{ \omega : \left\| \frac{f_{(s'_k, l'_k)}^{(m)}}{\sqrt{h(t_k)}} - g \right\| < \frac{\epsilon}{2} \right\}.$$

对每一个 k , 选取 t'_k 和 (s'_k, l'_k) 使得 $t_k \leq t'_k < t_k + 1$, 以及 $(s'_k, l'_k) \in P(t'_k) \cap R_{m_k, n_k}$. 根据定理 3.1 的假设条件可知,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(t'_k)}{h(t_k)} = 1.$$

对任意的 $0 < \sigma < \underline{\sigma}$, 给定 $g \in K_\sigma$, 假设 $m \geq 1$ 是一个整数, $\epsilon > 0$, $\gamma > 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma m l_k}{l_k - l_{k-1}} < 1$ 以及 $F_t = \bigcap_{i=1}^m F_t^i$, 其中

$$F_t^i = \left\{ \left| \frac{f_{s,l}(\frac{i}{m})}{\sqrt{h(t)}} - \frac{f_{s,l}(\frac{i-1}{m})}{\sqrt{h(t)}} - \left(g\left(\frac{i}{m}\right) - g\left(\frac{i-1}{m}\right) \right) \right| < \epsilon \right\}, \quad (3.14)$$

选取 t_k , 那么,

$$\begin{aligned} v(F_{t_k}^i) &= v \left\{ \left| \frac{f_{s_k, l_k}(\frac{i}{m})}{\sqrt{h(t_k)}} - \frac{f_{s_k, l_k}(\frac{i-1}{m})}{\sqrt{h(t_k)}} - \left(g\left(\frac{i}{m}\right) - g\left(\frac{i-1}{m}\right) \right) \right| < \epsilon \right\} \\ &= v \left\{ \left| \frac{B(\frac{l_k}{m})}{\sqrt{2l_k h(t_k)}} - \left(g\left(\frac{i}{m}\right) - g\left(\frac{i-1}{m}\right) \right) \right| < \epsilon \right\} \\ &\geq v \left\{ \left| \frac{B(\frac{l_k}{m}) - B(\frac{l_{k-1}}{m})}{\sqrt{2l_k h(t_k)}} - \left(g\left(\frac{i}{m}\right) - g\left(\frac{i-1}{m}\right) \right) \right| < \frac{\epsilon}{2} \right\} \\ &\quad \times v \left\{ \left| \frac{B(\frac{l_{k-1}}{m})}{\sqrt{2l_{k-1} h(t_{k-1})}} \cdot \frac{\sqrt{2l_{k-1} h(t_{k-1})}}{\sqrt{2l_k h(t_k)}} \right| < \frac{\epsilon}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

对每一个 $t > 0$, 记

$$\begin{aligned} N_k &:= \left\lfloor \frac{(l_{k+1} - l_k)^2 t^2}{2l_{k+1} h(t_{k+1})} \right\rfloor, \\ M_k &:= \left\lfloor \frac{2t^{-2} l_{k+1} h(t_{k+1})}{l_{k+1} - l_k} \right\rfloor, \\ R_k &:= \frac{\sqrt{2l_{k+1} h(t_{k+1})}}{t M_k}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

则可得到

$$\begin{aligned} &v \left\{ \left| \frac{B(\frac{l_k}{m}) - B(\frac{l_{k-1}}{m})}{\sqrt{2l_k h(t_k)}} - \left(g\left(\frac{i}{m}\right) - g\left(\frac{i-1}{m}\right) \right) \right| < \frac{\epsilon}{2} \right\} \\ &\geq v \left\{ \left| \frac{B(\frac{N_{k-1} M_{k-1}}{m})}{\sqrt{2l_k h(t_k)}} - \left(g\left(\frac{i}{m}\right) - g\left(\frac{i-1}{m}\right) \right) \right| < \frac{\epsilon}{4} \right\} \\ &\quad \times v \left\{ \left| \frac{B(\frac{l_k - l_{k-1}}{m}) - B(\frac{N_{k-1} M_{k-1}}{m})}{\sqrt{2l_k h(t_k)}} \right| < \frac{\epsilon}{4} \right\} \\ &= v \left\{ \left| \frac{B(\frac{N_{k-1} M_{k-1}}{m})}{R_{k-1}} - t M_{k-1} \left(g\left(\frac{i}{m}\right) - g\left(\frac{i-1}{m}\right) \right) \right| < \frac{\epsilon t M_{k-1}}{4} \right\} \\ &\quad \times v \left\{ \left| \frac{B(\frac{l_k - l_{k-1}}{m}) - B(\frac{N_{k-1} M_{k-1}}{m})}{\sqrt{2l_k h(t_k)}} \right| < \frac{\epsilon}{4} \right\} \\ &\geq v \left\{ \left| \frac{B(\frac{N_{k-1}}{m})}{R_{k-1}} - t \left(g\left(\frac{i}{m}\right) - g\left(\frac{i-1}{m}\right) \right) \right| < \frac{\epsilon t}{4} \right\}^{M_{k-1}} \\ &\quad \times v \left\{ \left| \frac{B(\frac{l_k - l_{k-1}}{m}) - B(\frac{N_{k-1} M_{k-1}}{m})}{\sqrt{2l_k h(t_k)}} \right| < \frac{\epsilon}{4} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \mathcal{E} \left[\phi \left(\frac{B(\frac{N_{k-1}}{m})}{R_{k-1}} - t \left(g \left(\frac{i}{m} \right) - g \left(\frac{i-1}{m} \right) \right) \right) \right]^{M_{k-1}} \\ &\quad \times v \left\{ \left| \frac{B(\frac{l_k - l_{k-1} - N_{k-1} M_{k-1}}{m})}{\sqrt{2l_k h(t_k)}} \right| < \frac{\epsilon}{4} \right\}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中 $\phi(x)$ 是一个正的偶函数, 其定义为

$$\phi(x) := \begin{cases} 1 - e^{|x| - \epsilon t/4}, & |x| \leq \frac{\epsilon t}{4}, \\ 0, & |x| > \frac{\epsilon t}{4}. \end{cases} \quad (3.18)$$

当 $k \rightarrow \infty$, 从引理 2.3 可知,

$$\begin{aligned} &\mathcal{E} \left[\phi \left(\frac{B(\frac{N_{k-1}}{m})}{R_{k-1}} - t \left(g \left(\frac{i}{m} \right) - g \left(\frac{i-1}{m} \right) \right) \right) \right] \\ &\rightarrow \mathcal{E} \left[\phi \left(B \left(\frac{1}{m} \right) - t \left(g \left(\frac{i}{m} \right) - g \left(\frac{i-1}{m} \right) \right) \right) \right] \\ &\geq \exp \left(- \frac{mt^2(g(\frac{i}{m}) - g(\frac{i-1}{m}))^2}{2\sigma^2} \right) \mathcal{E} \left[\phi \left(B \left(\frac{1}{m} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

那么,

$$\begin{aligned} &\frac{l_k - l_{k-1}}{2l_k h_{t_k}} \log \mathcal{E} \left[\phi \left(\frac{B(\frac{N_{k-1}}{m})}{R_{k-1}} - t \left(g \left(\frac{i}{m} \right) - g \left(\frac{i-1}{m} \right) \right) \right) \right]^{M_{k-1}} \\ &\rightarrow t^{-2} \log \mathcal{E} \left[\phi \left(B \left(\frac{1}{m} \right) - t \left(g \left(\frac{i}{m} \right) - g \left(\frac{i-1}{m} \right) \right) \right) \right] \\ &\geq - \frac{m(g(\frac{i}{m}) - g(\frac{i-1}{m}))^2}{2\sigma^2} + t^{-2} \log \mathcal{E} \left[\phi \left(B \left(\frac{1}{m} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

注意到 $g \in K_\beta$, 对任意的 $i \in [1, m]$, 有

$$\left| g \left(\frac{i}{m} \right) - g \left(\frac{i-1}{m} \right) \right| \leq \frac{\beta}{\sqrt{m}} < \frac{\sigma}{\sqrt{m}},$$

即

$$\frac{m(g(\frac{i}{m}) - g(\frac{i-1}{m}))^2}{\sigma^2} < \gamma, \quad (3.21)$$

其中 $\gamma > 1$. 因此, 对于足够大的 t , 从 (3.20) 和 (3.21) 可知,

$$\mathcal{E} \left[\phi \left(\frac{B(\frac{N_{k-1}}{m})}{R_{k-1}} - t \left(g \left(\frac{i}{m} \right) - g \left(\frac{i-1}{m} \right) \right) \right) \right]^{M_{k-1}} \geq \exp \left(- \gamma \frac{l_k h_{t_k}}{l_k - l_{k-1}} \right). \quad (3.22)$$

另外, 当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} V \left\{ \left| \frac{B(\frac{l_k - l_{k-1} - N_{k-1} M_{k-1}}{m})}{\sqrt{2l_k h(t_k)}} \right| \geq \frac{\epsilon}{4} \right\} &\leq \frac{\mathbb{E}[B(\frac{l_k - l_{k-1} - N_{k-1} M_{k-1}}{m})^2]}{(\frac{\epsilon}{4} \sqrt{2l_k h(t_k)})^2} \\ &= \frac{8(l_k - l_{k-1} - N_{k-1} M_{k-1})\bar{\sigma}^2}{\epsilon^2 m l_k h(t_k)} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

因此,

$$v\left\{\left|\frac{B\left(\frac{l_k - l_{k-1} - N_{k-1} M_{k-1}}{m}\right)}{\sqrt{2l_k h(t_k)}}\right| < \frac{\epsilon}{4}\right\} \rightarrow 1. \quad (3.24)$$

从 (3.17)、(3.22) 和 (3.24) 可知,

$$v\left\{\left|\frac{B\left(\frac{l_k}{m}\right) - B\left(\frac{l_{k-1}}{m}\right)}{\sqrt{2l_k h(t_k)}} - \left(g\left(\frac{i}{m}\right) - g\left(\frac{i-1}{m}\right)\right)\right| < \frac{\epsilon}{2}\right\} \geq \exp\left(-\gamma \frac{l_k h_{t_k}}{l_k - l_{k-1}}\right). \quad (3.25)$$

类似文献 [18] 关于重对数定律的证明可知,

$$v\left\{\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{B\left(\frac{l_{k-1}}{m}\right)}{\sqrt{2l_{k-1} h(t_{k-1})}} \leq \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{m}}\right\} = 1. \quad (3.26)$$

选择适当的 t_k 使得

$$\frac{\sqrt{2l_{k-1} h(t_{k-1})}}{\sqrt{2l_k h(t_k)}} \rightarrow 0, \quad \text{当 } k \rightarrow \infty.$$

因此, 存在 k_0 和 θ ($0 < \theta < 1$), 使得对任意的 $k \geq k_0$, 有

$$v\left\{\left|\frac{B\left(\frac{l_{k-1}}{m}\right)}{\sqrt{2l_{k-1} h(t_{k-1})}} \cdot \frac{\sqrt{2l_{k-1} h(t_{k-1})}}{\sqrt{2l_k h(t_k)}}\right| < \frac{\epsilon}{2}\right\} \geq \theta. \quad (3.27)$$

从 (3.15)、(3.25) 和 (3.27), 有

$$v(F_{t_k}) = \prod_{i=1}^m v(F_{t_k}^i) \geq \theta^m \exp\left(-\gamma m \frac{l_k h_{t_k}}{l_k - l_{k-1}}\right). \quad (3.28)$$

因此,

$$v(F(k)) \geq v(F_{t_k}) \geq \theta^m \exp\left(-\gamma m \frac{l_k h_{t_k}}{l_k - l_{k-1}}\right).$$

注意到假设

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma m l_k}{l_k - l_{k-1}} < 1,$$

从而,

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(F(k)) = \infty,$$

但由于 $F(k)$ 关于 v 不独立, 引理 2.2 并不适用, 这里只需用 Chung 和 Erdős^[24] 给出的 Borel-Cantelli 即可, 用类似的方法可获得相应的结论.

(iii) 注意到文献 [1] 的 Strassen 定理和 Levy 连续模定理, 对任意的 $\sigma \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$ 以及对应的概率测度 $\mathbb{P}_\sigma$, 有

$$\mathbb{P}_\sigma(C\{\mathcal{L}(t)\} = K_\sigma) = 1.$$

因此,

$$V(C\{\mathcal{L}(t)\} = K_\sigma) = 1, \quad \sigma \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}].$$

证毕. □

推论 3.1 记

$$\mathcal{L}(t) := \left\{ f(x) = \frac{B(s+xl) - B(s)}{\sqrt{2t \log 1/t}} : 0 \leq s \leq 1-t; x \in [0, 1] \right\},$$

以及

$$K_\sigma := \left\{ g(\cdot) : g \in C([0, 1]), g(0) = 0, \int_0^1 \left(\frac{g'(x)}{\sigma} \right)^2 dx \leq 1, \sigma > 0 \right\},$$

那么,

(1)

$$v(C\{\mathcal{L}(t)\} \subseteq K_\sigma) = 1;$$

(2)

$$v(C\{\mathcal{L}(t)\} \supseteq K_\sigma) = 1;$$

(3)

$$V(C\{\mathcal{L}(t)\} = K_\sigma) = 1, \quad \sigma \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}],$$

其中 $C\{\mathcal{L}(t)\}$ 表示 $\{\mathcal{L}(t)\}$ 的聚点.

致谢 感谢审稿人对本文给出的意见及建议.

参考文献

- 1 Mueller C. A unification of Strassen's law and Lévy's modulus of continuity. *Z Wahrscheinlichkeitstheorie verw Gebiete*, 1981, 56: 163–179
- 2 Peng S. G -Expectation, G -Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type. In: *Proceedings of the 2005 Abel Symposium 2*. Berlin: Springer-Verlag, 2006, 541–567
- 3 Denis L, Hu M, Peng S. Function spaces and capacity related to a sublinear expectation: Application to G -Brownian motion paths. *Potential Anal*, 2010, 34: 139–161
- 4 Gao F. Pathwise properties and homeomorphic flows for stochastic differential equations driven by G -Brownian motion. *Stochastic Process Appl*, 2009, 119: 3356–3382
- 5 Gao F, Jiang H. Large deviations for stochastic differential equations driven by G -Brownian motion. *Stochastic Process Appl*, 2010, 120: 2212–2240
- 6 Peng S. Multi-dimensional G -Brownian motion and related stochastic calculus under G -expectation. *Stochastic Process Appl*, 2008, 118: 2223–2253
- 7 Peng S. A new central limit theorem under sublinear expectations. *ArXiv:0803.2656*, 2008
- 8 Peng S. Survey on normal distributions, central limit theorem, Brownian motion and the related stochastic calculus under sublinear expectations. *Sci China Ser A*, 2009, 52: 1391–1411
- 9 Peng S. Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty-with robust central limit theorem and G -Brownian motion. *ArXiv:1002.4546*, 2010
- 10 Ren Y, Hu L. A note on the stochastic differential equations driven by G -Brownian motion. *Stat Probab Lett*, 2011, 81: 580–585
- 11 Soner H M, Touzi N, Zhang J. Martingale representation theorem for the G -expectation. *Stochastic Process Appl*, 2011, 121: 265–287
- 12 Song Y S. Some properties on G -evaluation and its applications to G -martingale decomposition. *Sci China Math*, 2011, 54: 287–300
- 13 Xu J, Zhang B. Martingale characterization of G -Brownian motion. *Stochastic Process Appl*, 2009, 119: 232–248
- 14 Strassen V. An invariance principle for the law of the iterated logarithm. *Z Wahrscheinlichkeitstheorie verw Gebiete*, 1964, 3: 211–226
- 15 Csörgő M, Révész P. How big are the increments of a Wiener process? *Ann Probab*, 1979, 7: 731–737
- 16 Hanson D L, Russo R P. Some results on increments of the Wiener process with applications to lag sums of i.i.d. random variables. *Ann Probab*, 1983, 11: 609–623

- 17 Chen Z. Strong laws of large numbers for sub-linear expectations. *Sci China Math*, 2016, 59: 945–954
- 18 Chen Z, Hu F. A law of the iterated logarithm under sublinear expectations. *J Finance Eng*, 2014, 1: 1450015
- 19 Chen Z, Wu P, Li B. A strong law of large numbers for non-additive probabilities. *Internat J Approx Reason*, 2013, 54: 365–377
- 20 Hu F, Chen Z, Zhang D. How big are the increments of G -Brownian motion? *Sci China Math*, 2014, 57: 1687–1700
- 21 Peng S. Law of large numbers and central limit theorem under nonlinear expectations. *ArXiv:0702358*, 2007; *Ann Probab*, 1979, 7: 731–737
- 22 Wu P Y, Chen Z J. Invariance principles for the law of the iterated logarithm under G -framework. *Sci China Math*, 2015, 58: 1251–1264
- 23 Zhang L X. Donsker’s invariance principle under the sub-linear expectation with an application to Chung’s law of the iterated logarithm. *Commun Math Stat*, 2015, 3: 187–214
- 24 Chung K L, Erdős P. On the application of the Borel-Cantelli lemma. *Trans Amer Math Soc*, 1952, 72: 179–179

A generalization of Strassen’s law and Lévy’s modulus of continuity for G -Brownian motion

Ping He, Zengjing Chen & Defei Zhang

Abstract The Strassen theorem and Lévy’s modulus of continuity for Brownian motion case play important roles in the probability theory. Muller gave the unification form on them in 1981. In this paper, the Strassen’s law and Lévy’s modulus of continuity for G -Brownian motion are extended to the general case. It can be seen as the unification of Strassen’s law and Lévy’s modulus of continuity for G -Brownian motion.

Keywords sublinear expectation, capacity, G -Brownian motion, Strassen’s law, Lévy’s modulus of continuity

MSC(2010) 60F17, 60F15, 60A86

doi: 10.1360/SCM-2016-0687