一个临界带权椭圆问题解的 Morse 指标

刘忠原

河南大学数学与统计学院, 开封 475004

E-mail: liuzy@vip.henu.edu.cn

收稿日期: 2017-01-21; 接受日期: 2017-04-10; 网络出版日期: 2017-05-03

国家自然科学基金 (批准号: 11501166) 资助项目

摘要 本文研究下面临界带权的椭圆问题:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^\theta \nabla u) = (N' + \tau)(N' - 2)|x|^\ell u^{p_\tau}, & \text{在 } \mathbb{R}^N \text{ 中,} \\ u > 0, & \text{在 } \mathbb{R}^N \text{ 中,} \end{cases}$$

其中, $N' = N + \theta > 2$, $\tau = \ell - \theta > -2$, $p_\tau = \frac{N'+2+2\tau}{N'-2}$. 杜一宏和郭宗明 (2015) 证明了上述问题有一族有限 Morse 指标解. 本文的主要目的是给出这些解 Morse 指标的精确刻画, 从而得到这族解的 Morse 指标仅依赖于 N 、 τ 和 θ .

关键词 有限 Morse 指标解 带权椭圆问题 临界指标**MSC (2010) 主题分类** 35B40, 35B45, 58J40

1 引言

本文考虑下面临界带权的椭圆问题:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^\theta \nabla u) = C(\tau)|x|^\ell u^{p_\tau}, & \text{在 } \mathbb{R}^N \text{ 中,} \\ u > 0, & \text{在 } \mathbb{R}^N \text{ 中,} \end{cases} \quad (1.1)$$

其中, $N' = N + \theta > 2$, $\tau = \ell - \theta > -2$, $C(\tau) = (N' + \tau)(N' - 2)$, $p_\tau = \frac{N'+2+2\tau}{N'-2}$.

问题 (1.1) 与 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式密切相关. 关于 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式在过去的 30 年里已经有了大量的研究. 当 $N' > 2$, $\theta \geq \frac{N'-2}{2}\tau$, $\tau \geq -2$ 时, Caffarelli 等^[1] 得到了下面著名的不等式:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\theta |\nabla u|^2 dx \geq S(\theta, \ell) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\ell |u|^{p_\tau+1} dx \right)^{\frac{2}{p_\tau+1}}, \quad \forall u \in D_\theta^{1,2}(\mathbb{R}^N), \quad (1.2)$$

其中, $S(\theta, \ell)$ 是仅依赖于 θ 和 ℓ 的正常数, $D_\theta^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 在范数 $\|u\| = (\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\theta |\nabla u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ 下的完备化.

英文引用格式: Liu Z Y. Morse index of solutions for a critical weighted elliptic problem (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1023–1028, doi: 10.1360/N012017-00018

从 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式 (1.2) 可知, 下面带权的 Sobolev 嵌入关系成立:

$$D_{\theta}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L_{\ell}^{p_{\tau}+1}(\mathbb{R}^N), \quad (1.3)$$

其中, $L_{\ell}^{p_{\tau}+1}(\mathbb{R}^N) = \{u : |x|^{\frac{\ell}{p_{\tau}+1}}|u| \in L^{p_{\tau}+1}(\mathbb{R}^N)\}$.

问题 (1.1) 可以看成是带权 Sobolev 嵌入关系 (1.3) 的 Euler-Lagrange 方程, 即如果 $u \in D_{\theta}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 是泛函 $I_{\theta,\ell}$ 的约束极小值点,

$$I_{\theta,\ell}(u) = \inf_{\substack{v \in D_{\theta}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \\ \|v\|_{L_{\ell}^{p_{\tau}+1}}=1}} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\theta} |\nabla v|^2 dx,$$

则 $\lambda^{\frac{1}{p_{\tau}-1}}u$ 就是问题 (1.1) 的解, 其中, $\lambda = S(\theta, \ell)$. 然而, 泛函 $I_{\theta,\ell}$ 极小值点的存在性非常复杂, 可参见文献 [2–6].

如果将 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式 (1.3) 限制在径向对称函数空间中, 则可以得到更好的结果. Lieb [7] 首先研究了 $\theta = 0$ 情形的不等式 (1.3), 得到如下的不等式:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \geq S(\ell) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\ell} |u|^{p_{\tau}+1} dx \right)^{\frac{2}{p_{\tau}+1}}, \quad \forall u \in D_{\text{rad}}^{1,2}(\mathbb{R}^N). \quad (1.4)$$

此外, 他还证明了常数 $S(\ell)$ 的最佳达到函数是

$$U_{\ell,\lambda}(x) = \frac{\lambda^{\frac{N-2}{2}}}{(1 + \lambda^{2+\ell}|x|^{2+\ell})^{\frac{N-2}{2+\ell}}}, \quad \lambda > 0.$$

Gidas 和 Spruck [8] 证明了函数 $U_{\ell,\lambda}(x)$ 是此时 ($\theta = 0$ 的情形) 问题 (1.1) 唯一的径向对称解. 后来, Su 和 Wang [9] 在 $N' > 2$ 和 $\tau > -2$ 条件下, 在径向对称函数空间 $D_{\theta,\text{rad}}^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u(x) = u(|x|) : u \in D_{\theta}^{1,2}(\mathbb{R}^N)\}$ 中得到了不等式 (1.3). 需要注意的是, 此时不再需要 $\theta \geq \frac{N-2}{2}\tau$ 的条件. 最近, Du 和 Guo [10] 证明了问题 (1.1) 存在一族有限 Morse 指标的正解

$$U_{\tau,\lambda}(x) = \frac{\lambda^{\frac{N'-2}{2}}}{(1 + \lambda^{2+\tau}|x|^{2+\tau})^{\frac{N'-2}{2+\tau}}}, \quad \lambda > 0. \quad (1.5)$$

受文献 [11] 的启发, 本文的目的是给出 $U_{\tau,\lambda}(x)$ 有限 Morse 指标的精确刻画. 不失一般性, 取 $\lambda = 1$, 用 U_{τ} 表示 $U_{\tau,1}$, 即

$$U_{\tau}(x) = \frac{1}{(1 + |x|^{2+\tau})^{\frac{N'-2}{2+\tau}}}. \quad (1.6)$$

下面给出本文的主要结果.

定理 1.1 记 $U_{\tau}(x)$ 为问题 (1.1) 的解, 则 U_{τ} 的 Morse 指标是

$$m(\theta, \tau) = \sum_{0 \leq k < \mu(\theta, \tau), k \in \mathbb{Z}} \frac{(N + 2k - 2)(N + k - 3)!}{(N - 2)!k!},$$

其中,

$$\mu(\theta, \tau) = \frac{-(N - 2) + \sqrt{(N + \tau)^2 + 2\theta(\tau + 2)}}{2}. \quad (1.7)$$

特别地, 当 $\mu(\theta, \tau)$ 经过整数时, U_{τ} 的 Morse 指标会发生改变.

注 1.1 从定理 1.1 的结论可知, 当 $\mu(\theta, \tau) \rightarrow +\infty$ 时, $m(\theta, \tau) \rightarrow +\infty$.

注 1.2 当 $\theta = 0$ 时, 即 $\mu(\theta, \tau) = \frac{\ell+2}{2}$, 定理 1.1 相应的结果已在文献 [11] 中得到. 事实上, 我们将文献 [11] 中的结果推广到更一般带权的椭圆型方程.

定理 1.1 的结果可以用来寻找问题 (1.1) 的其他解. 例如, 与文献 [11] 类似, 我们同样可以得到, 当 $\mu(\theta, \tau)$ 是整数时, 存在一个从径向对称解 $U_\tau(x)$ 出发的非径向对称解分支.

2 主要结论的证明

首先研究问题 (1.1) 关于 U_τ 的线性化问题, 即

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^\theta \nabla V) = C(\tau) p_\tau |x|^\ell U_\tau^{p_\tau-1} V, & \text{在 } \mathbb{R}^N \text{ 中,} \\ V \in D_{\theta}^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (2.1)$$

命题 2.1 记 $\mu := \mu(\theta, \tau)$ 为 (1.7) 所定义的常数. 如果 μ 不是非负整数, 则问题 (2.1) 的解空间的维数是 1, 并且解空间由

$$V(x) = \frac{1 - |x|^{2+\tau}}{(1 + |x|^{2+\tau})^{\frac{N'+\tau}{2+\tau}}}$$

所张成. 如果 μ 是非负整数, 问题 (2.1) 的解空间的维数是 $1 + \frac{(N+2\mu-2)(N+\mu-3)!}{(N-2)!\mu!}$, 并且解空间由下面函数所张成:

$$V(x) = \frac{1 - |x|^{2+\tau}}{(1 + |x|^{2+\tau})^{\frac{N'+\tau}{2+\tau}}}, \quad V_{\mu,i}(x) = \frac{\Theta_{\mu,i}(x)}{(1 + |x|^{2+\tau})^{\frac{N'+\tau}{2+\tau}}},$$

其中, $\{\Theta_{\mu,i}\}$ ($i = 1, \dots, \frac{(N+2\mu-2)(N+\mu-3)!}{(N-2)!\mu!}$) 是 $\mathbb{R}^N$ 中所有 μ 次齐次调和多项式空间 $\mathcal{H}^\mu(\mathbb{R}^N)$ 的基底.

证明 由于问题 (2.1) 是径向对称的, 我们将寻找下面形式的解:

$$V(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r) \Theta_k(\theta), \quad r = |x|, \quad \theta = \frac{x}{|x|} \in \mathbb{S}^{N-1},$$

其中, $v_k(r) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} V(r, \theta) \Theta_k(\theta) d\theta$, $\Theta_k(\theta)$ 是 k 次球面调和函数, 并且满足 $-\Delta_{\mathbb{S}^{N-1}} \Theta_k(\theta) = \sigma_k \Theta_k(\theta)$. 众所周知, 算子 $-\Delta_{\mathbb{S}^{N-1}}$ 的特征值是 $\sigma_k = k(N-2+k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, 与 σ_k 相应的特征函数空间 $\mathcal{H}^k$ 张成 k 次齐次调和多项式空间. 另外, 特征值 σ_k 的几何重数是 $\frac{(N+2k-2)(N+k-3)!}{(N-2)!} k!$, 并且

$$L^2(\mathbb{S}^{N-1}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}^k.$$

从而, 函数 V 是问题 (2.1) 的解当且仅当 v_k 满足

$$\begin{cases} -v_k''(r) - \frac{N'-1}{r} v_k'(r) + \frac{\sigma_k}{r^2} v_k(r) = C(\tau) p_\tau \frac{r^\tau}{(1+r^{2+\tau})^2} v_k(r), & \text{在 } (0, \infty) \text{ 上, } v_k \in \mathcal{D}, \\ v_k'(0) = 0, & \text{若 } k = 0; \quad v_k(0) = 0, & \text{若 } k \geq 1, \end{cases} \quad (2.2)$$

其中,

$$\mathcal{D} = \left\{ v \in C^1([0, \infty)) : \int_0^\infty r^{N'-1} |v'(r)|^2 dr < \infty \right\}.$$

记

$$w_k(r) = v_k(r^{\frac{2}{2+\tau}}), \quad (2.3)$$

则 $w_k(r)$ 满足

$$\begin{cases} -w_k''(r) - \frac{N_\tau - 1}{r} w_k'(r) + \frac{4\sigma_k}{(2+\tau)^2} \frac{w_k(r)}{r^2} = N_\tau(N_\tau + 2) \frac{w_k(r)}{(1+r^{2+\tau})^2}, & \text{在 } (0, \infty) \text{ 上, } v_k \in \tilde{\mathcal{D}}, \\ w_0'(0) = 0, \quad w_k(0) = 0, & \text{若 } k \geq 1, \end{cases} \quad (2.4)$$

其中,

$$N_\tau = \frac{2(N' + \tau)}{2 + \tau}, \quad \tilde{\mathcal{D}} = \left\{ w \in C^1([0, \infty)) : \int_0^\infty r^{N_\tau - 1} |w'(r)|^2 dr < \infty \right\}.$$

固定 N_τ , 考虑下面奇异 Sturm-Liouville 特征值问题:

$$-w''(r) - \frac{N_\tau - 1}{r} w'(r) + \alpha \frac{w(r)}{r^2} = N_\tau(N_\tau + 2) \frac{w(r)}{(1+r^{2+\tau})^2}, \quad \text{在 } (0, \infty) \text{ 上}. \quad (2.5)$$

从文献 [12] 可知, 问题 (2.5) 有一列递减的单重特征值 $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, 并且与 α_i 相应的特征函数在 $(0, \infty)$ 内只有 $i - 1$ 个零点.

从文献 [11] 可得

$$\alpha_1 = N_\tau - 1, \quad \alpha_2 = 0 \quad \text{和} \quad w_1(r) = \frac{r}{(1+r^2)^{\frac{N_\tau}{2}}}, \quad w_2(r) = \frac{1-r^2}{(1+r^2)^{\frac{N_\tau}{2}}}. \quad (2.6)$$

于是, 问题 (2.4) 存在非平凡解当且仅当

$$\frac{4\sigma_k}{(2+\tau)^2} = 0 \quad \text{或者} \quad \frac{4\sigma_k}{(2+\tau)^2} = N_\tau - 1,$$

而这又等价于

$$k = 0 \quad \text{或者} \quad k = \mu(\theta, \tau) = \frac{-(N-2) + \sqrt{(N+\tau)^2 + 2\theta(\tau+2)}}{2}.$$

结合 (2.3), 使得

$$v_0(r) = \frac{1 - r^{2+\tau}}{(1 + r^{2+\tau})^{\frac{N'+\tau}{2+\tau}}}, \quad \text{若 } \mu(\theta, \tau) \notin \mathbb{N}, \quad (2.7)$$

$$v_0(r) = \frac{1 - r^{2+\tau}}{(1 + r^{2+\tau})^{\frac{N'+\tau}{2+\tau}}}, \quad v_k(r) = \frac{r^{\frac{2+\tau}{2}}}{(1 + r^{2+\tau})^{\frac{N'+\tau}{2+\tau}}}, \quad \text{若 } \mu(\theta, \tau) \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

只需注意到 $\dim(\mathcal{H}^k) = \frac{(N+2k-2)(N+k-3)!}{(N-1)!k!}$, 我们就得到命题 2.1 的结论. $\square$

注 2.1 如果 $\mu(\theta, \tau) \notin \mathbb{N}$, 从命题 2.1 可知, 线性化算子的核空间的维数是 1. 然而, $\mu(\theta, \tau) \in \mathbb{N}$ 的情形就比较复杂. 关于 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 型问题更一般的非退化的结果可参见文献 [13]. 此外, 我们可以利用命题 2.1 的结论构造问题 (1.1) 在有界区域上的集中峰解, $\theta = 0$ 的情形可参见文献 [14].

定理 1.1 的证明 我们利用文献 [11] 中的想法证明定理 1.1.

考虑下面的特征值问题:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^\theta \nabla V) = \Lambda C(\tau) p_\tau |x|^\ell U_\tau^{p_\tau - 1} V, & \text{在 } \mathbb{R}^N \text{ 上,} \\ V \in D_\theta^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (2.9)$$

容易看出, U_τ 的 Morse 指标就是问题 (2.9) 小于 1 的特征值所对应的特征子空间的维数之和.

与命题 2.1 的证明类似, 有

$$\begin{cases} -v_k''(r) - \frac{N' - 1}{r} v_k'(r) + \frac{\sigma_k}{r^2} v_k(r) = \Lambda C(\tau) p_\tau \frac{r^\tau}{(1 + r^{2+\tau})^2} v_k(r), & \text{在 } (0, \infty) \text{ 上, } v_k \in \mathcal{D}, \\ v_0'(0) = 0, \quad v_k(0) = 0, & \text{若 } k \geq 1. \end{cases} \quad (2.10)$$

对于 $k \geq 0$, 问题 (2.10) 有一列递增的特征值 $\Lambda_{k,i}, i = 1, 2, \dots$, 并且相应的特征函数在 $(0, \infty)$ 内只有 $i - 1$ 个零点.

首先, 我们断言, 对于 $k \geq 0$ 和 $i \geq 2$, 有 $\Lambda_{k,i} \geq 1$. 利用 (2.3) 中的变换, 可得

$$\begin{cases} -w_k''(r) - \frac{N_\tau - 1}{r} w_k'(r) + \frac{4\sigma_k}{(2 + \tau)^2} \frac{w_k(r)}{r^2} = \Lambda N_\tau (N_\tau + 2) \frac{w_k(r)}{(1 + r^{2+\tau})^2}, & \text{在 } (0, \infty) \text{ 上, } v_k \in \tilde{\mathcal{D}}, \\ w_0'(0) = 0, \quad w_k(0) = 0, & \text{若 } k \geq 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

与问题 (2.5) 类似, 考虑下面与 $\Lambda < 1$ 对应的更一般的特征值问题:

$$-w''(r) - \frac{N_\tau - 1}{r} w'(r) + \alpha \frac{w(r)}{r^2} = \Lambda N_\tau (N_\tau + 2) \frac{w(r)}{(1 + r^{2+\tau})^2}, \quad \text{在 } (0, \infty) \text{ 上}. \quad (2.12)$$

问题 (2.12) 有一列递减的单重特征值 $\alpha_1(\Lambda) > \alpha_2(\Lambda) > \dots$, 并且与 α_i 相应的特征函数在 $(0, \infty)$ 内只有 $i - 1$ 个零点.

利用特征值的极小极大刻画和 $\Lambda < 1$, 有

$$\alpha_1(\Lambda) < \alpha_1(1) = N_\tau - 1, \quad \alpha_2(\Lambda) < \alpha_2(1) = 0. \quad (2.13)$$

令 $v_{k,i}$ 是与特征值 $\Lambda_{k,i}$ ($k \geq 0, i \geq 2$) 对应的问题 (2.10) 的特征函数. 假设 $\Lambda_{k,i} < 1$, 则 $v_{k,i}(r^{\frac{2}{2+\tau}})$ 是与 $\alpha(\Lambda_{k,i}) = \frac{4\sigma_k}{(2+\tau)^2} \geq 0$ 对应的问题 (2.11) 变号的特征函数. 另一方面, 我们有 $\alpha(\Lambda_{k,i}) \leq \alpha(\Lambda) < 0$. 这样, 我们就得到矛盾, 断言得证.

现在, 我们知道只有问题 (2.9) 的第一特征值才有可能给出 U_τ 的 Morse 指标. 由 (2.8) 可知, 当 $\mu(\theta, \tau)$ 是非负整数时,

$$v_k(r) = \frac{r^{\frac{2+\tau}{2}}}{(1 + r^{2+\tau})^{\frac{N'+\tau}{2+\tau}}} = \frac{r^{\frac{2+\tau(k)}{2}}}{(1 + r^{2+\tau})^{\frac{N'+\tau(k)}{2+\tau}}}$$

是与 $\Lambda = 1$ 对应的问题 (2.10) 的第一特征函数, 其中,

$$\tau(k) = -N' + \sqrt{(N' - 2)^2 + 4k(N - 2 + k)}.$$

然而, 直接验证可知, 对于一般的 $\tau > -2$ 和 $k \geq 0$, 问题 (2.10) 的第一特征函数如下:

$$v_{k,1}(r) = \frac{r^{\frac{2+\tau(k)}{2}}}{(1 + r^{2+\tau})^{\frac{N'+\tau(k)}{2+\tau}}},$$

并且相应的第一特征值是

$$\Lambda_{k,1} = \frac{(N' + \tau(k))(N' + \tau(k) + \tau + 2)}{(N' + \tau)(N' + 2\tau + 2)}. \quad (2.14)$$

从而, $\Lambda_{k,1} < 1$ 当且仅当 $k < \mu(\theta, \tau)$. 因此, 问题 (2.9) 的满足 $\Lambda < 1$ 的特征值正好是 $\Lambda_{k,1}, k < \mu(\theta, \tau)$. 由于与 $\Lambda_{k,1}$ 对应的问题 (2.9) 的特征函数是下面函数的线性组合:

$$V = \frac{r^{\frac{2+\tau(k)}{2}}}{(1 + |x|^{2+\tau})^{\frac{N'+\tau(k)}{2+\tau}}} \Theta_k \left(\frac{x}{|x|} \right), \quad \Theta_k \in \mathcal{H}^k.$$

从命题 2.1 可知, U_τ 的 Morse 指标是

$$m(\theta, \tau) = \sum_{0 \leq k < \mu(\theta, \tau), k \in \mathbb{Z}} \frac{(N + 2k - 2)(N + k - 3)!}{(N - 2)!k!},$$

我们就得到定理 1.1 的结论. □

参考文献

- 1 Caffarelli L, Kohn R, Nirenberg L. First order interpolation inequalities with weights. *Compos Math*, 1984, 53: 259–275
- 2 Bartsch T, Peng S, Zhang Z. Existence and non-existence of solutions to elliptic equations related to the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2007, 30: 113–136
- 3 Chou K S, Chu C W. On the best constant for a weighted Sobolev-Hardy inequality. *J Lond Math Soc (2)*, 1993, 48: 137–151
- 4 Caldirolì P, Musina R. On the existence of extremal functions for a weighted Sobolev embedding with critical exponent. *Calc Var Partial Differential Equations*, 1999, 8: 365–387
- 5 Catrina F, Wang Z Q. On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: Sharp constants, existence (and nonexistence), and symmetry of extremal functions. *Comm Pure Appl Math*, 2001, 54: 229–258
- 6 Wang Z Q, Willem M. Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities with remainder terms. *J Funct Anal*, 2003, 203: 550–568
- 7 Lieb E. Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities. *Ann of Math (2)*, 1983, 118: 349–374
- 8 Gidas B, Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations. *Comm Pure Appl Math*, 1981, 34: 525–598
- 9 Su J, Wang Z Q. Sobolev type embedding and quasilinear elliptic equations with radial potentials. *J Differential Equations*, 2011, 250: 223–242
- 10 Du Y, Guo Z. Finite Morse index solutions of weighted elliptic equations and the critical exponents. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2015, 54: 3161–3181
- 11 Gladiali F, Grossi M, Neves S L N. Nonradial solutions for the Hénon equation in $\mathbb{R}^N$. *Adv Math*, 2013, 249: 1–36
- 12 Zettl A. Sturm-Liouville Theory. *Mathematical Surveys and Monographs*, vol. 121. Providence: Amer Math Soc, 2005
- 13 Felli V, Schneider M. Perturbation results of critical elliptic equations of Caffarelli-Kohn-Nirenberg type. *J Differential Equations*, 2003, 191: 121–142
- 14 Gladiali F, Grossi M. Supercritical elliptic problem with nonautonomous nonlinearities. *J Differential Equations*, 2012, 252: 2616–2645

Morse index of solutions for a critical weighted elliptic problem

LIU ZhongYuan

Abstract In this paper, we study the following critical weighted elliptic problem:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^\theta \nabla u) = (N' + \tau)(N' - 2)|x|^\ell u^{p_\tau}, & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u > 0, & \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

where $N' = N + \theta > 2$, $\tau = \ell - \theta > -2$, $p_\tau = \frac{N'+2+2\tau}{N'-2}$. Du and Guo (2015) showed the above problem possesses a family of finite Morse index solutions. Our main aim in this paper is to give its exact characterization of Morse index, which depends only on N, τ and θ .

Keywords finite Morse index solution, weighted elliptic problem, critical exponent

MSC(2010) 35B40, 35B45, 58J40

doi: 10.1360/N012017-00018