Paneitz 算子和 p -Laplace 算子的第一特征值的等周上界

杜锋^{1*}, 吴传喜²

1. 荆楚理工学院数理学院, 荆门 448000;

2. 湖北大学数学与统计学学院, 武汉 430062

E-mail: defengdu123@163.com, cxwu@hubu.edu.cn

收稿日期: 2016-12-11; 接受日期: 2017-05-18; 网络出版日期: 2017-06-09; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11401131) 和湖北省教育厅科研计划 (批准号: Q20154301) 资助项目

摘要 本文首先得到 Euclid 空间的 n 维嵌入闭超曲面上 Paneitz 算子的第一非零特征值的由 Q 曲率和平均曲率给出的一个最优估计, 由此可得到一个等周上界. 此外, 本文还给出 Euclid 空间的 n 维嵌入闭超曲面上 p -Laplace 算子的第一非零特征值的一个等周上界.

关键词 Paneitz 算子 p -Laplace 算子 等周上界

MSC (2010) 主题分类 35P15, 53C40, 58C40

1 引言

设 (M^4, g) 是一个 4 维紧致 Riemann 流形, div 是关于度量 g 的散度算子. Paneitz^[1] 定义了一个 4 阶算子 P_g :

$$P_g f = \Delta^2 f - \operatorname{div} \left[\left(\frac{2}{3} Rg - 2\operatorname{Ric} \right) \nabla f \right], \quad (1.1)$$

这里 f 是 M^4 上的一个光滑函数, Δ 和 ∇ 分别表示 M^4 上对应于度量 g 的 Laplace 算子和梯度算子, R 和 Ric 分别表示 M^4 上对应于度量 g 的数量曲率和 Ricci 曲率张量.

Branson^[2] 将上述 Paneitz 定义的算子推广到 n (≥ 5) 维 Riemann 流形 (M^n, g) 上, 对于任意的正整数 $n \geq 5$, P_g 定义为

$$P_g f = \Delta^2 f - \operatorname{div} [(a_n Rg + b_n \operatorname{Ric}) \nabla f] - \frac{n-4}{2} Qf, \quad (1.2)$$

这里

$$Q = c_n |\operatorname{Ric}|^2 + d_n R^2 - \frac{1}{2(n-1)} \Delta R \quad (1.3)$$

英文引用格式: Du F, Wu C X. Isoperimetric upper bounds for the first eigenvalue of the Paneitz operator and the p -Laplace operator (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1047–1054, doi: 10.1360/N012016-00227

称为对应于度量 g 的 Q 曲率, 而

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n-2)^2 + 4}{2(n-1)(n-2)}, \quad b_n = -\frac{4}{n-2}, \\ c_n &= -\frac{1}{(n-2)^2}, \quad d_n = \frac{n(n-2)^2}{8(n-1)^2(n-2)^2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

算子 P_g 称为 Paneitz 算子或者 Branson-Paneitz 算子. 文献 [3–5] 研究了 Paneitz 算子的正定性. 类比于文献 [6] 中给出的共形体积, Yang 和 Xu [7] 定义了紧 4 维 Riemann 流形浸入到 N 维球面 $\mathbb{S}^N(1)$ 的 N 共形能量, 同时得到了由 N -共形能量给出的 Paneitz 算子的第一特征值的边界. 下面简单介绍当维数 $n > 3$ 时 Paneitz 算子的特征值问题:

$$P_g u = \lambda u. \quad (1.5)$$

既然 P_g 是一个椭圆算子, 则其具有离散的谱, 设

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots, \quad n \neq 4$$

和

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots, \quad n = 4.$$

当 $n = 4$ 时, Chen 和 Li [8] 给出了一些 Euclid 空间和球面上 4 维紧子流形的 Paneitz 算子的第一非零特征值 Reilly 型不等式. 当 $n \geq 7$ 时, 通过使用 Riemann 度量的共形变换, Chen 和 Li [9] 也得到了 $n+p$ 维空间形式中 n 维子流形由 Q 曲率和平均曲率给出的 Paneitz 算子的第二特征值的估计. 最近, Cheng [10] 也给出了 Paneitz 算子特征值的一些最优估计. 在上述研究工作的启发下, 通过使用文献 [11, 定理 2.1] 给出的权重等周不等式, 我们给出了 Paneitz 算子的第一非零特征值的一些新的估计, 首先得到下面的定理:

定理 1.1 设 M^n ($n \geq 4$) 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个连通嵌入闭超曲面, Ω 表示由 M^n 围成的区域, V 表示 Ω 的体积, 则 Paneitz 算子的第一非零特征值 λ_1 满足

$$\lambda_1 \leq \left(\frac{\omega_{n+1}}{V} \right)^{\frac{1}{n+1}} \frac{\int_{M^n} \left(\frac{n(n^2-4)}{2} |H|^2 + \frac{n-4}{2} Q \right) d\nu_g}{(n+1)V}, \quad (1.6)$$

这里 ω_{n+1} 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中单位球的体积, $|H|$ 表示 M^n 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的平均曲率. 当且仅当 M^n 是一个 n 维球面时, (1.6) 中等式成立.

推论 1.2 在定理 1.1 的条件下, 可得

$$\lambda_1 \leq \left(\frac{\omega_{n+1}}{V} \right)^{\frac{1}{n+1}} \frac{n(n^2-4) \int_{M^n} (8|H|^2 + (n-4)|H|^4) d\nu_g}{16(n+1)V}. \quad (1.7)$$

当且仅当 M^n 是一个 n 维球面时, (1.7) 中等式成立. 如果假设

$$c_0 = \sup_{x \in M^n} \{|H|^2(x)\},$$

A 是 M^n 的面积, 那么我们可得下述等周型上界:

$$\lambda_1 \leq \frac{n(n^2-4)(8c_0 + (n-4)c_0^2)}{16(n+1)} \left(\frac{\omega_{n+1}}{V} \right)^{\frac{1}{n+1}} \frac{A}{V}. \quad (1.8)$$

Wang 和 Xia^[12] 给出了 $n-1$ 维连通嵌入 Euclid 闭超曲面上 Laplace 算子的第一特征值的一个等周上界. 本文将这个结果推广到 p -Laplace 算子的第一特征值. 下面简单介绍关于 p -Laplace 算子的一些概念和结论. 设 Ω 是 n 维完备 Riemann 流形 M 上的一个有界区域, 那么 Ω 上的 p -Laplace 算子 Δ_p ($1 < p < \infty$) 定义为

$$\Delta_p u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u),$$

这里 div 和 ∇ 分别表示 Ω 上的散度和梯度算子. 在 Ω 的局部坐标 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 下, 可得

$$\Delta_p u = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det(g_{ij})} g^{ij} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right),$$

这里

$$|\nabla u|^2 = |\nabla u|_g^2 = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

而 $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ 是度量矩阵的逆矩阵. p -Laplace 算子的出现和能量泛函 E_p 的变分问题有自然的联系, 而 E_p 定义为

$$E_p = \int_{\Omega} |\nabla u|^p d\nu_g, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

这里 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 是空间 $C^\infty(\Omega)$ 的完备化, 而 $C^\infty(\Omega)$ 是 Ω 上具有紧致支撑的光滑函数的集合, 其 Sobolev 范数为

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_{\Omega} |u|^p d\nu_g + \int_{\Omega} |\nabla u|^p d\nu_g \right)^{1/p}.$$

设 $\lambda_{1,p}$ 是 Δ_p 在给定区域上的第一特征值. 特别地, 当 M 是一个紧致无边流形时, 有 (参见文献 [13])

$$\lambda_{1,p}(M) = \inf \left\{ \frac{\int_M |\nabla u|^p d\nu_g}{\int_M |u|^p d\nu_g} \mid u \in W^{1,p}(M), u \neq 0, \int_M |u|^{p-2} u d\nu_g = 0 \right\}, \quad (1.9)$$

这里 $W^{1,p}(M)$ 是 $C^\infty(M)$ 在 Sobolev 范数

$$\|u\|_{1,p}^M := \left(\int_M |u|^p d\nu_g + \int_M |\nabla u|^p d\nu_g \right)^{1/p}$$

下的完备化. 对于 $\lambda_{1,p}$, 一些有趣的结果在文献 [14–16] 中给出, 而本文则将给出 $\lambda_{1,p}$ 的一个等周上界.

定理 1.3 设 M^n ($n \geq 4$) 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个连通嵌入闭超曲面, Ω 表示由 M^n 围成的区域, V 表示 Ω 的体积, A 表示 M^n 的面积. 设 $\lambda_{1,p}$ 是 p -Laplace 算子的第一非零特征值, 那么,

(i) 当 $p \geq 2$ 时, 可得

$$\lambda_{1,p} \leq n^{\frac{p}{2}} (n+1)^{\frac{p-4}{2}} \left(\frac{\omega_{n+1}}{V} \right)^{\frac{p-1}{n+1}} \frac{A}{V}; \quad (1.10)$$

(ii) 当 $1 < p \leq 2$ 时, 可得

$$\lambda_{1,p} \leq \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{p}{2}} \left(\frac{\omega_{n+1}}{V} \right)^{\frac{p-1}{n+1}} \frac{A}{V}, \quad (1.11)$$

这里 ω_{n+1} 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中单位球的体积. 当且仅当 M^n 是一个 n 维球面时, (1.10) 和 (1.11) 中等式成立.

2 定理的证明

在开始主要定理的证明之前, 我们先介绍几个需要的公式, 更多细节参见文献 [17]. 设 $(x_1, \dots, x_n)$ 是点 $p \in M^n$ 的领域 U 的局部坐标, 设 y 是 p 在 $\mathbb{R}^N$ 中的位置向量, 定义为

$$y = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_N(x_1, \dots, x_n)).$$

设 g 是 M^n 上由 $\mathbb{R}^N$ 诱导的度量, 而 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{can}}$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中的标准度量, 那么可得

$$\sum_{\alpha=1}^N g(\nabla y_\alpha, \nabla y_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^N |\nabla y_\alpha|^2 = n \quad (2.1)$$

和

$$\sum_{\alpha=1}^N (\Delta y_\alpha)^2 = n^2 |H|^2. \quad (2.2)$$

定理 1.1 的证明 设 y 是点 $p \in \Omega \subset M^n$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的位置向量, 定义为

$$y = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_{n+1}(x_1, \dots, x_n)).$$

不失一般性, 可设

$$\int_{M^n} y_\alpha d\nu_g = 0,$$

这里 $1 \leq \alpha \leq n+1$, 这是因为必要时可用 $y_\alpha - \frac{\int_{M^n} y_\alpha d\nu_g}{\text{area}(M^n)}$ 替换 y_α . 由极大极小原理可得

$$\lambda_1 \sum_{\alpha=1}^{n+1} \int_{M^n} y_\alpha^2 d\nu_g \leq \sum_{\alpha=1}^{n+1} \int_{M^n} y_\alpha P_g y_\alpha d\nu_g. \quad (2.3)$$

直接计算并使用 (2.1) 和 (2.2), 得到

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^{n+1} \int_{M^n} y_\alpha P_g y_\alpha d\nu_g \\ &= \int_{M^n} \sum_{\alpha=1}^{n+1} y_\alpha \Delta^2 y_\alpha d\nu_g - \int_{M^n} \sum_{\alpha=1}^{n+1} y_\alpha \text{div}[(a_n Rg + b_n \text{Ric}) \nabla y_\alpha] d\nu_g + \frac{n-4}{2} \int_{M^n} \sum_{\alpha=1}^{n+1} Q(y_\alpha)^2 d\nu_g \\ &= \int_{M^n} \sum_{\alpha=1}^{n+1} (\Delta y_\alpha)^2 d\nu_g + \int_{M^n} \sum_{\alpha=1}^{n+1} g((a_n Rg + b_n \text{Ric}) \nabla y_\alpha, \nabla y_\alpha) d\nu_g + \frac{n-4}{2} \int_{M^n} \sum_{\alpha=1}^{n+1} Q(y_\alpha)^2 d\nu_g \\ &= \int_{M^n} (n^2 |H|^2 + (na_n + b_n)R) d\nu_g + \frac{n-4}{2} \int_{M^n} Q d\nu_g. \end{aligned} \quad (2.4)$$

选取 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中半径为 r 中心为原点的球 $\mathbb{B}$, 并使 $\text{Vol}(\mathbb{B}) = \text{Vol}(\Omega) = V$, 那么,

$$r = \left(\frac{V}{\omega_{n+1}} \right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

通过使用文献 [11] 中的权重等周不等式, 得到

$$\int_{M^n} \sum_{\alpha=1}^{n+1} y_\alpha^2 d\nu_g \geq \int_{\partial \mathbb{B}} \sum_{\alpha=1}^{n+1} y_\alpha^2 d\nu = \text{area}(\partial \mathbb{B}) r^2 = (n+1)V \left(\frac{V}{\omega_{n+1}} \right)^{\frac{1}{n+1}}. \quad (2.5)$$

将 (2.4) 和 (2.5) 代入 (2.3), 可得

$$\lambda_1 \leq \frac{\omega_{n+1}^{n+1} (\int_{M^n} (n^2 |H|^2 + (na_n + b_n) R) d\nu_g + \frac{n-4}{2} \int_{M^n} Q d\nu_g)}{(n+1) V^{\frac{n+2}{n+1}}}. \quad (2.6)$$

设 $\mathbf{h}$ 是 M^n 的第二基本形式, 那么, 由 Gauss 方程和 $|\mathbf{h}|^2 \geq n|H|^2$, 可得

$$R = n(n-1)|H|^2 - (|\mathbf{h}|^2 - n|H|^2) \leq n(n-1)|H|^2. \quad (2.7)$$

再由 (1.4) 和 $n \geq 4$, 可得

$$na_n + b_n = \frac{n^2 - 2n - 4}{2(n-1)} \geq 0. \quad (2.8)$$

综合 (2.7) 和 (2.8), 可得

$$n^2 |H|^2 + (na_n + b_n) R \leq \frac{n(n^2 - 4)}{2} |H|^2. \quad (2.9)$$

将 (2.9) 代入 (2.6), 可得

$$\lambda_1 \leq \left(\frac{\omega_{n+1}}{V} \right)^{\frac{1}{n+1}} \frac{\int_{M^n} (\frac{n(n^2-4)}{2} |H|^2 + \frac{n-4}{2} Q) d\nu_g}{(n+1) V}.$$

如果 (1.6) 中等式成立, 那么 (2.7) 中等式成立, 我们有

$$|\mathbf{h}|^2 \equiv n|H|^2,$$

那么 M^n 是 Euclid 空间中的全脐超曲面, 因此, M^n 是一个 n 维球面. 定理 1.1 得证. $\square$

推论 1.2 的证明 一方面, 由 (1.3) 和 (1.4) 可得

$$\begin{aligned} Q &= c_n |\text{Ric}|^2 + d_n R^2 - \frac{1}{2(n-1)} \Delta R \\ &= \frac{n^2 - 4}{8n(n-1)^2} R^2 - \frac{2}{(n-2)^2} \left| \text{Ric} - \frac{Rg}{n} \right|^2 - \frac{1}{2(n-1)} \Delta R. \end{aligned} \quad (2.10)$$

另一方面, 由 (2.7) 可得

$$R^2 \leq n^2(n-1)^2 |H|^4. \quad (2.11)$$

综合 (2.10) 和 (2.11), 可得

$$\int_{M^n} Q d\nu_g \leq \frac{n(n^2 - 4)}{8} \int_{M^n} |H|^4 d\nu_g. \quad (2.12)$$

将上述不等式代入 (1.6), 可得

$$\lambda_1 \leq \left(\frac{\omega_{n+1}}{V} \right)^{\frac{1}{n+1}} \frac{n(n^2 - 4) \int_{M^n} (8|H|^2 + (n-4)|H|^4) d\nu_g}{16(n+1)V}.$$

当且仅当 M^n 是 n 维球面时等式成立. 推论 1.2 得证. $\square$

定理 1.3 的证明 不失一般性, 可设

$$\int_{M^n} |y_\alpha|^{p-2} y_\alpha d\nu_g = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq N,$$

必要时可用 $|y_\alpha|^{p-2} \cdot y_\alpha - \frac{\int_{M^n} |y_\alpha|^{p-2} y_\alpha d\nu_g}{\text{area}(M^n)}$ 替换 $|y_\alpha|^{p-2} y_\alpha$. 由 (1.9) 可得

$$\lambda_{1,p} \int_{M^n} |y_\alpha|^p \leq \int_{M^n} |\nabla y_\alpha|^p.$$

对 α 由 1 到 N 求和, 得到

$$\lambda_{1,p} \int_{M^n} \sum_{\alpha=1}^{n+1} |y_\alpha|^p \leq \int_{M^n} \sum_{\alpha=1}^{n+1} |\nabla y_\alpha|^p. \quad (2.13)$$

通过类似于文献 [18] 中的讨论, 我们通过两种情形来讨论.

情形 I 如果 $p \geq 2$, 那么由 Hölder 不等式, 可得

$$|y|^2 = \sum_{\alpha=1}^{n+1} |y_\alpha|^2 \leq (n+1)^{\frac{p-2}{p}} \left(\sum_{\alpha=1}^{n+1} |y_\alpha|^p \right)^{\frac{2}{p}}. \quad (2.14)$$

那么 (i) 当 $p = 2$ 时, (2.14) 等式自然成立; (ii) 当 $p > 2$, 当且仅当 $|y_1|^p = \cdots = |y_N|^p$ 时, (2.14) 中等式成立. 由 Minkowski 不等式, 可得

$$\sum_{\alpha} |\nabla y_\alpha|^p \leq \left(\sum_{\alpha=1}^{n+1} |\nabla y_\alpha|^2 \right)^{\frac{p}{2}} = n^{\frac{p}{2}}. \quad (2.15)$$

那么 (i) 当 $p = 2$ 时, (2.15) 等式自然成立; (ii) 当 $p > 2$, 当且仅当对某些 $1 \leq \alpha \leq n+1$, $\nabla y_\alpha = 0$ 时, (2.15) 中等式成立. 因此, 当 $p > 2$, 当且仅当对某些 $1 \leq \alpha \leq n+1$, $y_\alpha = \text{const}$ 时, (2.14) 和 (2.15) 中等式成立. 另一方面, 如果 $y_\alpha = \text{const}$, $\alpha = 1, \dots, N$, 由 (2.13) 可得 $\lambda_{1,p}(M) = 0$. 这是一个矛盾. 因此, 当且仅当 $p = 2$ 时, (2.14) 和 (2.15) 中等式成立.

综合 (2.13)–(2.15), 可得

$$\lambda_{1,p} (n+1)^{\frac{2-p}{2}} \int_M |y|^p \leq n^{\frac{p}{2}} \cdot \text{area}(M) = n^{\frac{p}{2}} A, \quad (2.16)$$

选取 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中半径为 r 中心为原点的球 $\mathbb{B}$, 并使 $\text{Vol}(\mathbb{B}) = \text{Vol}(\Omega) = V$, 那么,

$$r = \left(\frac{V}{\omega_{n+1}} \right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

通过使用文献 [11] 中的权重等周不等式和 (2.14), 可得

$$\begin{aligned} \int_{M^n} |y|^p d\nu_g &\geq \int_{\partial \mathbb{B}} |y|^p d\nu = \text{area}(\partial \mathbb{B}) r^p \\ &= (n+1) V \left(\frac{V}{\omega_{n+1}} \right)^{\frac{p-1}{n+1}}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

将 (2.17) 代入 (2.16), 可得

$$\lambda_{1,p} \leq n^{\frac{p}{2}} (n+1)^{\frac{p-4}{2}} \left(\frac{\omega_{n+1}}{V} \right)^{\frac{p-1}{n+1}} \frac{A}{V}. \quad (2.18)$$

情形 II 如果 $1 < p \leq 2$, 那么,

$$|y|^p = \left(\sum_{\alpha=1}^{n+1} |y_{\alpha}|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \leq \sum_{\alpha=1}^{n+1} |y_{\alpha}|^p \quad (2.19)$$

和

$$(n+1)^{\frac{p-2}{p}} \left(\sum_{\alpha=1}^{n+1} |\nabla y_{\alpha}|^p \right)^{\frac{2}{p}} \leq \sum_{\alpha=1}^{n+1} |\nabla y_{\alpha}|^2 = n. \quad (2.20)$$

当且仅当 $p = 2$ 时, (2.19) 和 (2.20) 中等式成立.

将 (2.19) 和 (2.20) 代入 (2.13), 我们得到

$$\lambda_{1,p} \int_M |y|^p \leq n^{\frac{p}{2}} (n+1)^{\frac{2-p}{2}} A. \quad (2.21)$$

综合 (2.18) 和 (2.21), 可得

$$\lambda_{1,p} \leq \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{p}{2}} \left(\frac{\omega_{n+1}}{V} \right)^{\frac{p-1}{n+1}} \frac{A}{V}. \quad (2.22)$$

通过上述讨论可知, 当且仅当 $p = 2$ 时, (2.18) 和 (2.22) 中等式成立. 因此, 由文献 [12, 定理 1.2] 可知, 当且仅当 M^n 是 n 维球面时, (2.18) 和 (2.22) 中等式成立. $\square$

参考文献

- 1 Paneitz S. A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary pseudo-Riemannian manifolds. SIGMA Symmetry Integrability Geom Methods Appl, 2008, 4: 1-3
- 2 Branson T P. Group representations arising from Lorentz conformal geometry. J Funct Anal, 1987, 74: 199-291
- 3 Gursky M. The principal eigenvalue of a conformally invariant differential operator, with an application to semilinear elliptic PDE. Comm Math Phys, 1999, 207: 131-143
- 4 Hebey E, Robert F. Coercivity and Struwe's compactness for Paneitz type operators with constant coefficients. Calc Var Partial Differential Equations, 2001, 13: 491-517
- 5 Yang P C, Xu X W. Positivity of Paneitz operators. Discrete Contin Dyn Syst, 2001, 7: 329-342
- 6 Li P, Yau S T. A new conformal invariant and its application to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces. Invent Math, 1982, 69: 269-291
- 7 Yang P C, Xu X W. Conformal energy in four dimension. Math Ann, 2002, 324: 731-742
- 8 Chen D, Li H. The sharp estimates for the first eigenvalue of Paneitz operator on 4-dimensional submanifolds. ArXiv:1010.3102, 2010
- 9 Chen D, Li H. Second eigenvalue of Paneitz operator and the mean curvature. Comm Math Phys, 2011, 305: 555-562
- 10 Cheng Q M. Estimates for eigenvalues of the Paneitz operator. J Differential Equations, 2014, 257: 3868-3886
- 11 Betta M F, Brock F, Mercaldo A, et al. A weighted isoperimetric inequality and applications to symmetrization. J Inequal Appl, 1999, 4: 215-240
- 12 Wang Q, Xia C. Isoperimetric bounds for the first eigenvalue of the Laplacian. Z Angew Math Phys, 2010, 61: 171-175
- 13 Veron L. Some existence and uniqueness results for solution of some quasilinear elliptic equations on compact Riemannian manifolds. In: Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, PDE, vol. 62. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1991, 317-352
- 14 Lima B P, Montenegro J F B, Santos N L. Eigenvalue estimates for the p -Laplace operator on manifolds. Nonlinear Anal, 2010, 2: 771-781
- 15 Mao J. Eigenvalue inequalities for the p -Laplacian on a Riemannian manifold and estimates for the heat kernel. J Math Pures Appl (9), 2014, 101: 372-393
- 16 Matei A M. First eigenvalue for the p -Laplace operator. Nonlinear Anal, 2000, 39: 1051-1068

- 17 Chen D, Cheng Q M. Extrinsic estimates for eigenvalues of the Laplace operator. J Math Soc Japan, 2008, 60: 325–339
- 18 Du F, Mao J. Reilly-type inequalities for p -Laplacian on compact Riemannian manifolds. Front Math China, 2015, 10: 583–594

Isoperimetric upper bounds for the first eigenvalue of the Paneitz operator and the p -Laplace operator

DU Feng & WU ChuanXi

Abstract In this paper, we give some sharp estimates for the first non-zero eigenvalue of Paneitz operators of an n -dimensional embedded closed hypersurface in a Euclidean space in terms of the mean curvature and the Q -curvature. Furthermore, we also give some isoperimetric upper bounds for the first non-zero eigenvalue of the p -Laplace operator of an n -dimensional embedded closed hypersurface in a Euclidean space.

Keywords Paneitz operator, p -Laplace operator, isoperimetric upper bounds

MSC(2010) 35P15, 53C40, 58C40

doi: 10.1360/N012016-00227