对数平均和双参数广义 Muirhead 平均之间的比较

赵铁洪, 褚玉明*

湖南城市学院数学与计算科学学院, 益阳 413000

E-mail: tiehongzhao@gmail.com, chuyuming@hutc.zj.cn

收稿日期: 2013-12-09; 接受日期: 2014-09-09; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11301127, 61374086 和 11171307) 资助项目

摘要 本文讨论了两个不同正实数 x 和 y 的对数平均 $L(x, y) = (x - y)/(\log x - \log y)$ 与双参数广义 Muirhead 平均 $M(a, b; x, y) = [(x^a y^b + x^b y^a)/2]^{1/(a+b)}$ 之间的比较, 得到了如下三个结论: (1) 若 $(a, b) \in D_1 \cup E_1 \cup L_0$, 则 $M(a, b; x, y) < L(x, y)$; (2) 若 $(a, b) \in D_2 \cup E_2$, 则 $M(a, b; x, y) > L(x, y)$; (3) 若 $(a, b) \in D_3 \cup E_3$, 则存在 x_1, y_1, x_2, y_2 , 使得 $M(a, b; x_1, y_1) < L(x_1, y_1)$ 和 $M(a, b; x_2, y_2) > L(x_2, y_2)$. 其中 $D_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + b \neq 0, b > a, \omega_1(a, b) \leq 0, \omega_2(a, b) \leq 0\}$, $E_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + b \neq 0, b < a, \omega_1(a, b) \leq 0, \omega_2(a, b) \leq 0\}$, $D_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab \leq 0, b > a, \omega_1(a, b) \geq 0\}$, $E_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab \leq 0, b < a, \omega_1(a, b) \geq 0\}$, $D_3 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b > a > 0, \omega_1(a, b) > 0\} \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b > a > 0, \omega_1(a, b) = 0, \omega_2(a, b) > 0\} \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b > a, ab \leq 0, \omega_1(a, b) < 0, \omega_2(a, b) > 0\}$, $E_3 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > b > 0, \omega_1(a, b) > 0\} \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > b > 0, \omega_1(a, b) = 0, \omega_2(a, b) > 0\} \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > b, ab \leq 0, \omega_1(a, b) < 0, \omega_2(a, b) > 0\}$, $L_0 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = b \neq 0\}$, $\omega_1(a, b) = (a + b)[3(a - b)^2 - (a + b)]$, $\omega_2(a, b) = (a + b)[2(a - b)^2 + 1] - 3(a^2 + b^2)$.

关键词 比较不等式 广义 Muirhead 平均 对数平均

MSC (2010) 主题分类 26E60

1 引言

设 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a + b \neq 0$, 两个不同正实数 x 和 y 关于参数 a, b 的广义 Muirhead 平均 $M(a, b; x, y)$ 及对数平均 $L(x, y)$ 分别定义为

$$M(a, b; x, y) = \left(\frac{x^a y^b + x^b y^a}{2} \right)^{\frac{1}{a+b}}, \quad L(x, y) = \frac{x - y}{\log x - \log y}. \quad (1.1)$$

广义 Muirhead 平均 $M(a, b; x, y)$ 由 Trif 在文献 [1] 首次引入, 讨论了其关于 a 或 b 的单调性和 Minkowski 型不等式并建立了一个比较定理.

由广义 Muirhead 平均 $M(a, b; x, y)$ 的表达式易知其区域 $\{(a, b; x, y) : a + b \neq 0; x, y > 0\}$ 上是连续的且对固定的 a, b 关于 $(x, y) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ 是可微的, $M(a, b; x, y)$ 关于 a 和 b 以及 x 和

英文引用格式: Zhao T H, Chu Y M. Comparison between the logarithmic and two-parameter generalized Muirhead means (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 233–244, doi: 10.1360/N012013-00175

y 都是对称的. 许多二元平均是广义 Muirhead 平均的特殊情形, 例如

$M(p, 0; x, y)$ 是 p 次幂或 Hölder 平均,

$M(0, 1; x, y)$ 是算术平均,

$M(a, a; x, y)$ 是几何平均,

$M(0, -1; x, y)$ 是调和平均.

对固定的 $x, y > 0$, 著名的 Muirhead 不等式^[2]表明 $M(a, b; x, y)$ 在 $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + b > 0\}$ 上是 Schur 凸的而在 $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + b < 0\}$ 上是 Schur 凹的. 在文献 [3, 4] 中, 作者讨论了广义 Muirhead 平均的 Schur 乘法与调和凸性.

近年来, 对数平均 $L(x, y)$ 已成为二元平均值理论中研究的热点^[5-11], 文献 [12-18] 提供了大量的有关对数平均 $L(x, y)$ 的重要不等式. 特别需要指出的是对数平均在物理、经济以及气象学上也有重要的应用 (见文献 [19-21]). Kahlig 和 Matkowski^[21] 研究了一类出现在热传导问题中有关对数平均的 Jensen 泛函方程的变形. 文献 [5] 提供了利用两个特殊的几何与算术平均序列的共同极限来计算对数平均的迭代算法. 在文献 [22, 23] 中, 作者发现了用 Gauss 超几何函数 ${}_2F_1$ 表示对数平均的表达式.

下列用广义 Muirhead 平均来表示对数和指数平均上下界的不等式可参阅文献 [5, 8, 24, 25]:

$$\sqrt[3]{M^2(1, 1; x, y)M(0, 1; x, y)} < L(x, y) < \frac{2M(1, 1; x, y) + M(0, 1; x, y)}{3},$$

$$\frac{M(1, 1; x, y) + 2M(0, 1; x, y)}{3} < I(x, y),$$

$$\begin{aligned} \sqrt{M(1, 1; x, y)M(0, 1; x, y)} &< \sqrt{I(x, y)L(x, y)} < \frac{I(x, y) + L(x, y)}{2} \\ &< \frac{M(1, 1; x, y) + M(0, 1; x, y)}{2}, \end{aligned}$$

对所有不同正实数 x 和 y 成立, 其中 $I(x, y) = (\frac{y^y}{x^x})^{\frac{1}{(y-x)}}$ 是两个不同正实数 x 和 y 的指数平均.

Alzer 和 Qiu^[26] 证明了不等式

$$\alpha M(0, 1; x, y) + (1 - \alpha)M(1, 1; x, y) < I(x, y) < \beta M(0, 1; x, y) + (1 - \beta)M(1, 1; x, y),$$

$$M(p, 0; x, y) < \frac{I(x, y) + L(x, y)}{2}.$$

对所有不同的正实数 x 和 y 成立的充分和必要条件是 $\alpha \leq \frac{2}{3}$, $\beta \geq \frac{2}{e} = 0.73575\dots$, $p \leq \log \frac{2}{1+\log 2} = 0.40938\dots$.

对所有不同的正实数 x 和 y , Wang 等人^[27] 证得: 若 $(a, b) \in \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + b > 0, ab \leq 0, 2(a-b)^2 - 3(a+b) + 1 \geq 0, 3(a-b)^2 - 2(a+b) \geq 0\}$, 则 $M(a, b; x, y) > I(x, y)$; 若 $(a, b) \in \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0, b \geq 0, a^2 + b^2 \neq 0, 3(a-b)^2 - 2(a+b) \leq 0\} \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + b < 0\}$, 则 $M(a, b; x, y) < I(x, y)$.

本文的主要目的是建立对数平均和双参数广义的 Muirhead 平均之间的比较不等式. 为方便起见, 我们记

$$\omega_1(a, b) = (a + b)[3(a - b)^2 - (a + b)],$$

$$\omega_2(a, b) = (a + b)[2(a - b)^2 + 1] - 3(a^2 + b^2),$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + b \neq 0, b > a, \omega_1(a, b) \leq 0, \omega_2(a, b) \leq 0\}, \\
E_1 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + b \neq 0, b < a, \omega_1(a, b) \leq 0, \omega_2(a, b) \leq 0\}, \\
D_2 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab \leq 0, b > a, \omega_1(a, b) \geq 0\}, \\
E_2 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab \leq 0, b < a, \omega_1(a, b) \geq 0\}, \\
D_3 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b > a > 0, \omega_1(a, b) > 0\} \\
&\quad \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b > a > 0, \omega_1(a, b) = 0, \omega_2(a, b) > 0\} \\
&\quad \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b > a, ab \leq 0, \omega_1(a, b) < 0, \omega_2(a, b) > 0\}, \\
E_3 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > b > 0, \omega_1(a, b) > 0\} \\
&\quad \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > b > 0, \omega_1(a, b) = 0, \omega_2(a, b) > 0\} \\
&\quad \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > b, ab \leq 0, \omega_1(a, b) < 0, \omega_2(a, b) > 0\}, \\
D_4 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b > a > 0, \omega_1(a, b) < 0, \omega_2(a, b) > 0\}, \\
E_4 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > b > 0, \omega_1(a, b) < 0, \omega_2(a, b) > 0\}, \\
L_0 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = b \neq 0\}.
\end{aligned}$$

不难发现 $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + b \neq 0\} = \bigcup_{i=1}^4 D_i \bigcup_{i=1}^4 E_i \cup L_0$.

注意到区域 D_i 与 E_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 关于直线 L_0 对称, 为了整体观察这些区域, 参见图 1.

本文的主要结果是下列定理 1.1.

定理 1.1 对所有的 $x, y > 0$ 且 $x \neq y$, 我们有

- (1) 若 $(a, b) \in D_1 \cup E_1 \cup L_0$, 则 $M(a, b; x, y) < L(x, y)$;
- (2) 若 $(a, b) \in D_2 \cup E_2$, 则 $M(a, b; x, y) > L(x, y)$;

图 1 D_1, D_2, D_3 示意图

(3) 若 $(a, b) \in D_3 \cup E_3$, 则存在 $x_1, y_1, x_2, y_2 > 0$, 使得 $M(a, b; x_1, y_1) < L(x_1, y_1)$ 和 $M(a, b; x_2, y_2) > L(x_2, y_2)$.

2 引理

为本文主要结果证明的需要, 在本节中我们建立两则引理.

引理 2.1 设 $a, b \in \mathbb{R}$ 满足 $a < b$ 和 $a + b \neq 0$. 若函数 $\phi(t) : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$\phi(t) = \frac{at^a + bt^b + bt^{a+1} + at^{b+1}}{a+b}, \quad (2.1)$$

则有如下两个结论:

(1) 若 $a \geq 0$ 或 $a + b < 0$, 则 $\phi(t) > 0$ 对所有 $t \in (1, +\infty)$ 成立;

(2) 若 $a < 0$ 且 $a + b > 0$, 则存在 $\delta_0 \in (1, +\infty)$ 使得 $\phi(t) > 0$ 对所有 $t \in (1, \delta_0)$ 成立和 $\phi(t) < 0$ 对所有 $t \in (\delta_0, +\infty)$ 成立.

证明 设

$$\phi(t) = t^a \tilde{\phi}(t), \quad (2.2)$$

其中

$$\tilde{\phi}(t) = \frac{a + bt + bt^{b-a} + at^{b-a+1}}{a+b}. \quad (2.3)$$

由 $\tilde{\phi}(t)$ 的表达式得

$$\tilde{\phi}(1) = 2, \quad (2.4)$$

$$\tilde{\phi}'(t) = \frac{b + b(b-a)t^{b-a-1} + a(b-a+1)t^{b-a}}{a+b}, \quad (2.5)$$

$$\tilde{\phi}'(1) = b - a + 1, \quad (2.6)$$

$$\tilde{\phi}''(t) = (b-a)t^{b-a-2}\tilde{\phi}_1(t), \quad (2.7)$$

其中

$$\tilde{\phi}_1(t) = \frac{b(b-a-1) + a(b-a+1)t}{a+b}, \quad (2.8)$$

$$\tilde{\phi}_1(1) = \frac{(b-a)(a+b-1)}{a+b}, \quad (2.9)$$

$$\tilde{\phi}_1'(t) = \frac{a(b-a+1)}{a+b}. \quad (2.10)$$

(1) 下面分两种情形证明引理 2.1(1).

情形 1.1 $a \geq 0$. 此时不等式 $\phi(t) > 0$ 对所有 $t \in (1, \infty)$ 成立可由 (2.1) 式和 $b > a \geq 0$ 直接得到.

情形 1.2 $a + b < 0$. 由 $a < b$ 得

$$a < 0. \quad (2.11)$$

利用 (2.9)–(2.11) 式易知

$$\tilde{\phi}_1(1) > 0, \quad (2.12)$$

$$\tilde{\phi}_1'(t) > 0. \quad (2.13)$$

由 (2.2), (2.4), (2.6), (2.7), (2.12) 和 (2.13) 式可得 $\phi(t) > 0$ 对所有 $t \in (1, +\infty)$ 成立.

(2) 我们分两种情形来证明引理 2.1(2).

情形 2.1 $a < 0$ 且 $a + b > 1$. 由 (2.3), (2.5) 和 (2.8)–(2.10) 式得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\phi}(t) = -\infty, \quad (2.14)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\phi}'(t) = -\infty, \quad (2.15)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\phi}_1(t) = -\infty, \quad (2.16)$$

$$\tilde{\phi}_1(1) > 0, \quad (2.17)$$

$$\tilde{\phi}_1'(t) < 0. \quad (2.18)$$

利用 (2.7) 和 (2.16)–(2.18) 式知, 存在 $\lambda_0 \in (1, \infty)$ 使得 $\tilde{\phi}'(t)$ 在 $[1, \lambda_0]$ 上严格单调递增而在 $[\lambda_0, +\infty)$ 上严格单调递减. 进而由 (2.6) 和 (2.15) 式知, 存在 $\lambda_1 \in (1, \infty)$ 使得 $\tilde{\phi}(t)$ 在 $[1, \lambda_1]$ 上严格单调递增而在 $[\lambda_1, +\infty)$ 上严格单调递减.

最后, 由 (2.2), (2.4) 和 (2.14) 式以及 $\tilde{\phi}(t)$ 的分段单调性得, 存在 $\delta_0 \in (1, +\infty)$ 使得 $\phi(t) > 0$ 对所有 $t \in (1, \delta_0)$ 成立和 $\phi(t) < 0$ 对所有 $t \in (\delta_0, +\infty)$ 成立.

情形 2.2 $a < 0$ 且 $0 < a + b \leq 1$. 由 (2.3), (2.5), (2.9) 和 (2.10) 式易知

$$\tilde{\phi}_1(1) \leq 0 \quad (2.19)$$

且 (2.14), (2.15) 和 (2.18) 式仍然成立.

由 (2.7), (2.18) 和 (2.19) 式可得, $\tilde{\phi}'(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上严格单调递减. 进而利用 (2.6) 和 (2.15) 式得出结论: 存在 $\mu \in (1, \infty)$ 使得 $\tilde{\phi}(t)$ 在 $[1, \mu]$ 上严格单调递增而在 $[\mu, +\infty)$ 上严格单调递减.

最后, 引理 2.1(2) 可由 (2.2), (2.4) 和 (2.14) 式以及 $\tilde{\phi}(t)$ 的分段单调性得到. $\square$

引理 2.2 设 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ 且 $a + b \neq 0$. 若函数 $\varphi: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$\varphi(t) = \frac{(a+b)(t-1)(t^a + t^b)}{at^a + bt^b + bt^{a+1} + at^{b+1}} - \log t,$$

则有如下三个结论:

(1) 若 $\omega_1(a, b) \leq 0$ 且 $\omega_2(a, b) \leq 0$, 则 $\varphi(t) < 0$ 对所有 $t \in (1, +\infty)$ 成立;

(2) 在 $a \neq 0$ 的情形下,

(a) 若 $\omega_1(a, b) > 0$ 且 $\omega_2(a, b) \leq 0$, 则存在 $\delta_1 \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi(t) > 0$ 对所有 $t \in (1, \delta_1)$ 成立和 $\varphi(t) < 0$ 对所有 $t \in (\delta_1, +\infty)$ 成立;

(b) 若 $\omega_1(a, b) \geq 0$ 且 $\omega_2(a, b) > 0$, 则存在 $\delta_2 \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi(t) > 0$ 对所有 $t \in (1, \delta_2)$ 成立和 $\varphi(t) < 0$ 对所有 $t \in (\delta_2, +\infty)$ 成立;

(c) 若 $\omega_1(a, b) < 0$ 且 $\omega_2(a, b) > 0$, 则存在 $\delta_4 > \delta_3 > 1$ 使得 $\varphi(t) < 0$ 对所有 $t \in (1, \delta_3) \cup (\delta_4, +\infty)$ 成立;

(3) 在 $a = 0$ 的情形下,

(a) 若 $\omega_1(a, b) \geq 0$, 则 $\varphi(t) > 0$ 对所有 $t \in (1, +\infty)$ 成立;

(b) 若 $\omega_1(a, b) < 0$, 则存在 $\delta_5 \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi(t) < 0$ 对所有 $t \in (1, \delta_5)$ 成立和 $\varphi(t) > 0$ 对所有 $t \in (\delta_5, +\infty)$ 成立.

证明 由 $\varphi(t)$ 的表达式得

$$\varphi(1) = 0, \quad (2.20)$$

$$\varphi'(t) = \frac{(t-1)t^{a+b}\varphi_1(t)}{t[b(t^{a+1}+t^b)+a(t^{b+1}+t^a)]^2}, \quad (2.21)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= a^2(t^{a-b} - t^{b-a+1}) + b^2(t^{b-a} - t^{a-b+1}) \\ &\quad + [(a+b)^3 - 2ab(2a+2b+1)](t-1), \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\varphi_1(1) = 0, \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t) &= -a^2[(b-a)t^{a-b-1} + (b-a+1)t^{b-a}] \\ &\quad + b^2[(b-a)t^{b-a-1} + (b-a-1)t^{a-b}] \\ &\quad + [(a+b)^3 - 2ab(2a+2b+1)], \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\varphi_1'(1) = \omega_1(a, b), \quad (2.25)$$

$$\varphi_1''(t) = (b-a)t^{a-b-2}\varphi_2(t), \quad (2.26)$$

其中

$$\varphi_2(t) = a^2(b-a+1)(1-t^{2b-2a+1}) + b^2(b-a-1)(t^{2b-2a}-t), \quad (2.27)$$

$$\varphi_2(1) = 0, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2'(t) &= -b^2(b-a-1) + 2b^2(b-a)(b-a-1)t^{2b-2a-1} \\ &\quad - a^2(b-a+1)(2b-2a+1)t^{2b-2a}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\varphi_2'(1) = (b-a)\omega_2(a, b), \quad (2.30)$$

$$\varphi_2''(t) = 2(b-a)t^{2b-2a-2}\varphi_3(t), \quad (2.31)$$

其中

$$\varphi_3(t) = b^2(b-a-1)(2b-2a-1) - a^2(b-a+1)(2b-2a+1)t, \quad (2.32)$$

$$\varphi_3(1) = (b-a)\omega_2(a, b), \quad (2.33)$$

$$\varphi_3'(t) = -a^2(b-a+1)(2b-2a+1). \quad (2.34)$$

(1) $\omega_1(a, b) \leq 0$ 且 $\omega_2(a, b) \leq 0$. 此时有

$$(a+b)[3(a-b)^2 - (a+b)] \leq 0 \quad (2.35)$$

和

$$(a+b)[2(a-b)^2 + 1] - 3(a^2 + b^2) \leq 0. \quad (2.36)$$

由 (2.35) 和 (2.36) 式我们断言 $a \neq 0$. 事实上, 若 $a = 0$, 则 $b > a = 0$. 此时不等式 (2.35) 和 (2.36) 分别等价于 $0 < b \leq 1/3$ 和 $1/2 \leq b \leq 1$, 这显然矛盾.

利用 (2.25), (2.30), (2.33) 和 (2.34) 式以及 $a = 0$ 易得

$$\varphi_1'(1) \leq 0, \quad \varphi_2'(1) = \varphi_3(1) \leq 0, \quad \varphi_3'(t) < 0. \quad (2.37)$$

由 (2.20), (2.21), (2.23), (2.26), (2.28), (2.31) 和 (2.37) 式便知 $\varphi(t) < 0$ 对所有 $t \in (1, +\infty)$ 成立.

(2) 若 $a \neq 0$, 则由 $\varphi(t)$ 的表达式以及 (2.22), (2.24), (2.27), (2.29) 和 (2.32) 式可得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = -\infty, \quad (2.38)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_1(t) = -\infty, \quad (2.39)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'_1(t) = -\infty, \quad (2.40)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_2(t) = -\infty, \quad (2.41)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'_2(t) = -\infty, \quad (2.42)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_3(t) = -\infty. \quad (2.43)$$

(a) 若 $\omega_1(a, b) > 0$ 且 $\omega_2(a, b) \leq 0$, 则由 (2.25), (2.30), (2.33) 和 (2.34) 式以及 $a \neq 0$ 得

$$\varphi'_1(1) > 0, \quad (2.44)$$

$$\varphi'_2(1) \leq 0, \quad (2.45)$$

$$\varphi_3(1) \leq 0, \quad (2.46)$$

$$\varphi'_3(t) < 0. \quad (2.47)$$

利用 (2.26), (2.28), (2.31) 和 (2.45)–(2.47) 式知, $\varphi'_1(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上严格单调递减. 进而利用 (2.40) 和 (2.44) 式可得结论: 存在 $t_0 \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi_1(t)$ 在 $(1, t_0]$ 上严格单调递增而在 $[t_0, +\infty)$ 上严格单调递减.

由 (2.21), (2.23) 和 (2.39) 式以及 $\varphi_1(t)$ 的分段单调性知, 存在 $t_1 \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi(t)$ 在 $(1, t_1]$ 上严格单调递增而在 $[t_1, +\infty)$ 上严格单调递减.

最后, 利用 (2.20) 和 (2.38) 式以及 $\varphi(t)$ 的分段单调性可得结论: 存在 $\delta_1 \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi(t) > 0$ 对所有 $t \in (1, \delta_1)$ 成立和 $\varphi(t) < 0$ 对所有 $t \in (\delta_1, +\infty)$ 成立.

(b) 若 $\omega_1(a, b) \geq 0$ 且 $\omega_2(a, b) > 0$, 则由 (2.25), (2.30), (2.33) 和 (2.34) 式以及 $a \neq 0$ 可推出

$$\varphi'_1(1) \geq 0, \quad (2.48)$$

$$\varphi'_2(1) > 0, \quad (2.49)$$

$$\varphi_3(1) > 0, \quad (2.50)$$

和 (2.47) 式仍然成立.

利用 (2.31), (2.43) 和 (2.47) 以及 (2.50) 式知, 存在 $t_2 \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi'_2(t)$ 在 $(1, t_2]$ 上严格单调递增而在 $[t_2, +\infty)$ 上严格单调递减. 进而由 (2.42) 和 (2.49) 式可得结论: 存在 $t_3 \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi_2(t)$ 在 $(1, t_3]$ 上严格单调递增而在 $[t_3, +\infty)$ 上严格单调递减.

由 (2.26), (2.28) 和 (2.41) 式以及 $\varphi_2(t)$ 的分段单调性知, 存在 $t_4 \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi'_1(t)$ 在 $(1, t_4]$ 上严格单调递增而在 $[t_4, +\infty)$ 上严格单调递减. 进而由 (2.40) 和 (2.48) 式可得结论: 存在 $t_5 \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi_1(t)$ 在 $(1, t_5]$ 上严格单调递增而在 $[t_5, +\infty)$ 上严格单调递减.

利用 (2.21), (2.23) 和 (2.39) 式以及 $\varphi_1(t)$ 的分段单调性可得, 存在 $t_6 \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi(t)$ 在 $(1, t_6]$ 上严格单调递增而在 $[t_6, +\infty)$ 上严格单调递减.

最后, 由 (2.20) 和 (2.38) 式以及 $\varphi(t)$ 的分段单调性知, 存在 $\delta_2 \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi(t) > 0$ 对所有 $t \in (1, \delta_2)$ 成立和 $\varphi(t) < 0$ 对所有 $t \in (\delta_2, +\infty)$ 成立.

(c) 若 $\omega_1(a, b) < 0$ 且 $\omega_2(a, b) > 0$, 则由 (2.25), (2.30), (2.33) 和 (2.34) 式以及 $a \neq 0$ 可得

$$\varphi'_1(1) < 0 \quad (2.51)$$

以及 (2.47), (2.49) 和 (2.50) 式仍成立.

由 (2.31), (2.43), (2.47) 和 (2.50) 式知, 存在 $t_7 \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi'_2(t)$ 在 $(1, t_7]$ 上严格单调递增而在 $[t_7, +\infty)$ 上严格单调递减. 进而由 (2.42) 和 (2.49) 式可得结论: 存在 $t_8 \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi_2(t)$ 在 $(1, t_8]$ 上严格单调递增而在 $[t_8, +\infty)$ 上严格单调递减.

利用 (2.26), (2.28) 和 (2.41) 式以及 $\varphi_2(t)$ 的分段单调性知, 存在 $t_9 \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi'_1(t)$ 在 $(1, t_9]$ 上严格单调递增而在 $[t_9, +\infty)$ 上严格单调递减. 进而由 (2.40) 和 (2.51) 式可得, 存在 $0 < t_{10} < t_{11} < +\infty$ 使得 $\varphi'_1(t) < 0$ 对所有 $t \in (1, t_{10}) \cup (t_{11}, +\infty)$ 成立 (令人遗憾的是, 我们无法确定 $\varphi'_1(t)$ 在 $[t_{10}, t_{11}]$ 上的符号). 利用 (2.23) 和 (2.39) 式并结合以上讨论可得结论: 存在 $0 < t_{12} < t_{13} < +\infty$ 使得 $\varphi_1(t) < 0$ 对所有 $t \in (1, t_{12}) \cup (t_{13}, +\infty)$ 成立.

最后, 存在 $\delta_4 > \delta_3 > 0$ 使得 $\varphi(t) < 0$ 对所有 $t \in (1, \delta_3) \cup (\delta_4, +\infty)$ 成立可由 (2.20), (2.21) 和 (2.38) 式以及 $\varphi_1(t)$ 在 $(1, t_{12}) \cup (t_{13}, +\infty)$ 上小于零导出.

(3) 在 $a = 0$ 的情形下,

(a) 若 $\omega_1(a, b) \geq 0$, 则易得 $b \geq 1/3$. 下分三种情形进行讨论.

情形 1 $b = 1/3$, 或 $b = 1/2$, 或 $b = 1$. 那么我们断言

$$\varphi_1(t) > 0 \quad (2.52)$$

对所有 $t \in (1, +\infty)$ 成立. 事实上, 由 (2.22) 可得: 当 $b = 1/3$ 时, $\varphi_1(t) = (t^{1/3} - 1)^3/27$; 当 $b = 1/2$ 时, $\varphi_1(t) = (t - 1)/8$; 当 $b = 1$ 时, $\varphi_1(t) = 2(t - 1)$.

利用 (2.20) 和 (2.21) 以及 (2.52) 式便知 $\varphi(t) > 0$ 对所有 $t \in (1, +\infty)$ 成立.

情形 2 $1/3 < b < 1/2$ 或 $b > 1$. 由 (2.25), (2.30) 和 (2.32) 式可推出

$$\varphi'_1(1) = 3b^2 \left(b - \frac{1}{3} \right) > 0, \quad (2.53)$$

$$\varphi'_2(1) = 2b^2 \left(b - \frac{1}{2} \right) (b - 1) > 0, \quad (2.54)$$

$$\varphi_3(t) = 2b^2 \left(b - \frac{1}{2} \right) (b - 1) > 0. \quad (2.55)$$

利用 (2.20), (2.21), (2.23), (2.26), (2.28), (2.31), (2.53) 和 (2.54) 式可得结论 $\varphi(t) > 0$ 对所有 $t \in (1, +\infty)$ 成立.

情形 3 $1/2 < b < 1$. 由 (2.24), (2.25), (2.30) 和 (2.32) 式得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'_1(t) = b^3 > 0, \quad (2.56)$$

$$\varphi'_2(1) = 2b^2 \left(b - \frac{1}{2} \right) (b - 1) > 0, \quad (2.57)$$

$$\varphi_3(t) = 2b^2 \left(b - \frac{1}{2} \right) (b - 1) > 0, \quad (2.58)$$

以及 (2.53) 式仍然成立.

利用 (2.26), (2.28), (2.31), (2.57) 和 (2.58) 式知, $\varphi'_1(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上严格单调递减. 进而由 (2.53) 和 (2.56) 式可得结论: $\varphi_1(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上严格单调递增.

由 (2.20), (2.21) 和 (2.23) 式以及 $\varphi_1(t)$ 的单调性知, $\varphi(t) > 0$ 对所有 $t \in (1, +\infty)$ 成立.

(b) 若 $\omega_1(a, b) < 0$, 则 $0 < b < 1/3$ 且 $\omega_2(a, b) > 0$. 由 $\varphi(t)$ 的表达式以及 (2.22), (2.24), (2.25), (2.30) 和 (2.32) 式可得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty, \quad (2.59)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_1(t) = +\infty, \quad (2.60)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'_1(t) = b^3, \quad (2.61)$$

$$\varphi'_1(1) < 0, \quad (2.62)$$

$$\varphi'_2(1) > 0, \quad (2.63)$$

$$\varphi_3(t) = 2b^2 \left(b - \frac{1}{2} \right) (b - 1) > 0. \quad (2.64)$$

由 (2.26), (2.28), (2.31), (2.63) 和 (2.64) 式知, $\varphi'_1(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上严格单调递增. 进而由 (2.61) 和 (2.62) 式可得结论: 存在 $t_{14} \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi_1(t)$ 在 $(1, t_{14}]$ 上严格单调递减而在 $[t_{14}, +\infty)$ 上严格单调递增.

利用 (2.21), (2.23) 和 (2.60) 式以及 $\varphi_1(t)$ 的分段单调性知, 存在 $t_{15} \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi(t)$ 在 $(1, t_{15}]$ 上严格单调递减而在 $[t_{15}, +\infty)$ 上严格单调递增.

最后, 由 (2.20) 和 (2.59) 以及 $\varphi(t)$ 的分段单调性可得结果: 存在 $\delta_5 \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi(t) < 0$ 对所有 $t \in (1, \delta_5)$ 成立和 $\varphi(t) > 0$ 对所有 $t \in (\delta_5, +\infty)$ 成立. $\square$

3 定理 1.1 的证明

定理 1.1 的证明 若 $(a, b) \in L_0$, 则由 (1.1) 式直接得, $M(a, b; x, y) = \sqrt{xy} < L(x, y)$ 对所有 $x, y > 0$ 且 $x \neq y$ 成立.

由于 $M(a, b; x, y)$ 和 $L(x, y)$ 关于变量 x 与 y 都是对称的, 因此在以下证明中我们不妨设 $y > x$. 由此可知, 为证定理 1.1 我们只需证明 $M(a, b; x, y) - L(x, y)$ 在区域 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x > 0\}$ 上关于变量 (a, b) 在 D_1, D_2, D_3 上分别为恒正, 恒负, 既可取正值也可取负值.

设 $t = y/x > 1$, 则由 (1.1) 式得

$$\log[M(a, b; x, y)] - \log[L(x, y)] = \frac{1}{a+b} \log \left(\frac{t^a + t^b}{2} \right) - \log(t-1) + \log(\log t). \quad (3.1)$$

若记

$$\Upsilon(t) = \frac{1}{a+b} \log \left(\frac{t^a + t^b}{2} \right) - \log(t-1) + \log(\log t). \quad (3.2)$$

则简单计算表明

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} \Upsilon(t) = 0, \quad (3.3)$$

$$\Upsilon'(t) = \frac{\phi(t)\varphi(t)}{t(t-1)(t^a+t^b)\log t}, \quad (3.4)$$

其中 $\phi(t)$ 和 $\varphi(t)$ 分别为引理 2.1 和 2.2 中所定义.

以下分三种情形给予证明.

情形 1 $(a, b) \in D_1$. 由 $\omega_1(a, b) \leq 0$ 和 $\omega_2(a, b) \leq 0$, 我们断言: $a+b < 0$ 或 $a \geq 0$. 否则, $a+b > 0$ 且 $a < 0$ 可导出 $b > 0$, 再由 $\omega_1(a, b) \leq 0$ 得 $a+b \geq 3(a-b)^2$ 和 $\omega_2(a, b) = 2(a+b)(a-b)^2 - 6ab + [(a+b) - 3(a-b)^2] \geq -6ab > 0$, 这与 $\omega_2(a, b) \leq 0$ 矛盾.

由引理 2.1(1) 和 2.2(1) 知, $\phi(t) > 0$ 和 $\varphi(t) < 0$ 对所有 $t \in (1, +\infty)$ 成立. 由此并结合 (3.1)–(3.4) 式便得结论: $M(a, b; x, y) < L(x, y)$ 对所有 $y > x > 0$ 成立.

情形 2 $(a, b) \in D_2$. 我们分两种情形进行讨论.

情形 A $a \neq 0$ 且 $(a, b) \in D_2$. 此时有 $a < 0$ 且 $a+b > 0$. 由引理 2.1(2) 知, 存在 $\delta_0 \in (1, +\infty)$ 使得 $\phi(t) > 0$ 对所有 $t \in (1, \delta_0)$ 成立和 $\phi(t) < 0$ 对所有 $t \in (\delta_0, +\infty)$ 成立.

利用 $\omega_1(a, b) = 0$ 可得 $\omega_2(a, b) > 0$. 再根据引理 2.2(2)(a) 和 (b) 知, 存在 $\delta_1 \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi(t) > 0$ 对所有 $t \in (1, \delta_1)$ 成立和 $\varphi(t) < 0$ 对 $t \in (\delta_1, +\infty)$ 成立.

我们断言 $\delta_1 = \delta_0$. 事实上, 若 $\delta_1 < \delta_0$, 则 $\phi(t) > 0$ 对所有 $t \in (\delta_1, \delta_0)$ 成立. 注意到 $\varphi(t)$ 的表达式可改写为

$$\varphi(t) = \frac{(t-1)(t^a+t^b)}{\phi(t)} - \log t. \quad (3.5)$$

显然, $\lim_{t \rightarrow \delta_0^-} \varphi(t) = +\infty$. 由此可得, 存在 $\varepsilon_1 > 0$ 满足 $\delta_1 < \delta_0 - \varepsilon_1 < \delta_0$ 使得 $\varphi(t) > 0$ 对所有 $t \in (\delta_0 - \varepsilon_1, \delta_0)$ 成立, 这与 $\varphi(t)$ 在 $(\delta_1, +\infty)$ 上小于零矛盾; 若 $\delta_1 > \delta_0$, 则由 (3.5) 式知, $\lim_{t \rightarrow \delta_0^+} \varphi(t) = -\infty$, 由此可得存在 $\varepsilon_2 > 0$ 满足 $\delta_0 < \delta_0 + \varepsilon_2 < \delta_1$ 使得 $\varphi(t) < 0$ 对所有 $t \in (\delta_0, \delta_0 + \varepsilon_2)$ 成立, 这 $\varphi(t)$ 在 $(1, \delta_1)$ 上大于零矛盾.

综合以上讨论并结合 (3.4) 式易知, $\Upsilon(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上严格单调递增. 进而利用 (3.1)–(3.3) 式便得, $L(x, y) < M(a, b; x, y)$ 对所有 $x, y > 0$ 且 $x \neq y$ 成立.

情形 B $a = 0$ 且 $(a, b) \in D_2$. 由引理 2.1(1) 和 2.2(3)(a) 以及 (3.4) 式易知, $\Upsilon(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上严格单调递增. 进而由 (3.1)–(3.3) 式可得 $M(a, b; x, y) > L(x, y)$ 对所有 $y > x > 0$ 成立.

情形 3 $(a, b) \in D_3$. 我们分两种情形进行讨论.

情形 C $(a, b) \in \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b > a > 0, \omega_1(a, b) > 0\} \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b > a > 0, \omega_1(a, b) = 0, \omega_2(a, b) > 0\}$. 由引理 2.1(1) 以及 2.2(2)(a) 和 (b) 知, $\phi(t) > 0$ 对所有 $t \in (1, +\infty)$ 成立以及存在 $\delta_6 \in (1, +\infty)$ 使得 $\varphi(t) > 0$ 对所有 $t \in (1, \delta_6)$ 成立. 进而由 (3.1)–(3.4) 式得 $M(a, b; x, y) > L(x, y)$ 对所有满足 $0 < x < y < \delta_6 x$ 的 x 和 y 成立.

另一方面, $\Upsilon(t)$ 的表达式为可改写为

$$\Upsilon(t) = -\frac{a}{a+b} \log t + \log(\log t) + \log\left(\frac{t}{t-1}\right) + \frac{1}{a+b} \log\left(\frac{t^{a-b}+1}{2}\right). \quad (3.6)$$

由 (3.6) 式和 $b > a > 0$ 得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Upsilon(t) = -\infty. \quad (3.7)$$

利用 (3.1) 和 (3.2) 以及 (3.7) 式可得存在充分大的 $\lambda_2 \in (1, +\infty)$ 使得 $M(a, b; x, y) < L(x, y)$ 对所有满足 $y > \lambda_2 x > 0$ 的 x 与 y 成立.

情形 D $(a, b) \in \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b > a, ab \leq 0, \omega_1(a, b) < 0, \omega_2(a, b) > 0\}$. 此时显然有, $a \leq 0$ 且 $a + b > 0$. 我们断言存在 $\delta_7 \in (1, +\infty)$ 使得

$$\Upsilon'(t) < 0 \quad (3.8)$$

对所有 $t \in (1, \delta_7)$ 成立. 事实上, 若 $a = 0$, 则由 (3.4) 式和引理 2.1(1) 以及 2.2(3)(b) 可得所需结论; 若 $a < 0$, 则利用 (3.4) 式和引理 2.1(2) 以及 2.2(2)(c) 可推得所需结论.

利用 (3.1)–(3.4) 和 (3.8) 式知, $M(a, b; x, y) < L(x, y)$ 对所有 $0 < x < y < \delta_6 x$ 的 x 和 y 成立.

另一方面, 由 (3.6) 式和 $a \leq 0$ 以及 $a + b > 0$ 可得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Upsilon(t) = +\infty. \quad (3.9)$$

最后, 利用 (3.1) 和 (3.2) 以及 (3.9) 式知, 存在充分大的 $\lambda_3 \in (1, +\infty)$ 使得 $M(a, b; x, y) > L(x, y)$ 对所有满足 $y > \lambda_3 x > 0$ 的 x 和 y 成立. $\square$

注 3.1 对 $(a, b) \in D_4 \cup E_4$ 的情形, 在本文中我们还没有解决广义 Muirhead 平均 $M(a, b; x, y)$ 与对数平均 $L(x, y)$ 的比较问题, 我们将它作为一个悬而未决的问题留给有兴趣的读者作进一步的研究.

参考文献

- 1 Trif T. Monotonicity, comparison and Minkowski's inequality for generalized Muirhead means in two variables. *Mathematica*, 2006, 48: 99–110
- 2 Hardy G H, Littlewood J E, Pólya G. *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press, 1988
- 3 Xia W F, Chu Y M. The Schur multiplicative convexity of the generalized Muirhead mean. *Int J Funct Anal Oper Theory Appl*, 2009, 1: 1–8
- 4 Chu Y M, Xia W F. Necessary and sufficient conditions for the Schur harmonic convexity of the generalized Muirhead mean. *Proc A Razmadze Math Inst*, 2010, 15: 19–27
- 5 Carlson B C. The logarithmic mean. *Amer Math Monthly*, 1972, 79: 615–618
- 6 Lin T P. The power mean and the logarithmic mean. *Amer Math Monthly*, 1974, 81: 879–883
- 7 Pittenger A O. Inequalities between arithmetic and logarithmic means. *Univ Beograd Publ Elektrotehn Fak Ser Mat Fiz*, 1980, 678–715: 15–18
- 8 Leach E B, Sholander M C. Extended mean values II. *J Math Anal Appl*, 1983, 92: 207–223
- 9 Burk F. The geometric, logarithmic, and arithmetic mean inequality. *Amer Math Monthly*, 1987, 94: 527–528
- 10 Sándor J. On the identric and logarithmic means. *Aequationes Math*, 1990, 40: 261–270
- 11 Fechner W. On some functional inequalities related to the logarithmic mean. *Acta Math Hungar*, 2010, 128: 36–45
- 12 Chu Y M, Xia W F. Two optimal double inequalities between power mean and logarithmic mean. *Comput Math Appl*, 2010, 60: 83–89
- 13 Xia W F, Chu Y M, Wang G D. The optimal upper and lower power mean bounds for a convex combination of the arithmetic and logarithmic means. *Abstr Appl Anal*, 2010, 2010: 604804
- 14 Chu Y M, Wang S S, Zong C. Optimal lower power mean bounds for the combination of harmonic and logarithmic means. *Abstr Appl Anal*, 2011, 2011: 520648
- 15 Qiu Y F, Wang M K, Chu Y M, et al. Two sharp inequalities for Lehmer mean, identric mean and logarithmic mean. *J Math Inequal*, 2011, 5: 301–306
- 16 Qian W M, Shen Z H. Inequalities between power means and convex combinations of the harmonic and logarithmic means. *J Appl Math*, 2012, 2012: 471096
- 17 Chu Y M, Shi M Y, Jiang Y P. Optimal inequalities for the power, harmonic and logarithmic means. *Bull Iranian Math Soc*, 2012, 38: 597–606
- 18 Shi H X, Long B Y, Chu Y M. Optimal generalized Heronian mean bounds for the logarithmic mean. *J Inequal Appl*, 2012, 2012: 63
- 19 Pólya G, Szegő G. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*. Princeton: Princeton University Press, 1951

- 20 Pittenger A O. The logarithmic mean in n variables. Amer Math Monthly, 1985, 92: 99–104
- 21 Kählig P, Matkowski J. Functional equations involving the logarithmic mean. Z Angew Math Mech, 1996, 76: 385–390
- 22 Carlson B C. Algorithms involving arithmetic and geometric means. Amer Math Monthly, 1971, 78: 496–505
- 23 Carlson B C, Gustafson J L. Total positivity of mean values and hypergeometric functions. SIAM J Math Anal, 1983, 14: 389–395
- 24 Alzer H. Ungleichungen für Mittelwerte. Arch Math, 1986, 47: 422–426
- 25 Sándor J. A note on some inequalities for means. Arch Math, 1991, 56: 471–473
- 26 Alzer H, Qiu S L. Inequalities for means in two variables. Arch Math, 2003, 80: 201–215
- 27 Wang M K, Chu Y M, Qiu Y F. Some comparison inequalities for generalized Muirhead and identric means. J Inequal Appl, 2010, 2010: 295620

Comparison between the logarithmic and two-parameter generalized Muirhead means

ZHAO TieHong & CHU YuMing

Abstract In this article, we discuss the comparison between the logarithmic mean $L(x, y) = (x - y)/(\log x - \log y)$ and the two-parameter generalized Muirhead mean $M(a, b; x, y) = [(x^a y^b + x^b y^a)/2]^{1/(a+b)}$ of two distinct positive real numbers x and y , present three results as follows: (1) $M(a, b; x, y) < L(x, y)$ if $(a, b) \in D_1 \cup E_1 \cup L_0$; (2) $M(a, b; x, y) > L(x, y)$ if $(a, b) \in D_2 \cup E_2$; (3) there exist x_1, y_1, x_2, y_2 such that $M(a, b; x_1, y_1) < L(x_1, y_1)$ and $M(a, b; x_2, y_2) > L(x_2, y_2)$ if $(a, b) \in D_3 \cup E_3$. Here, $D_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a+b \neq 0, b > a, \omega_1(a, b) \leq 0, \omega_2(a, b) \leq 0\}$, $E_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a+b \neq 0, b < a, \omega_1(a, b) \leq 0, \omega_2(a, b) \leq 0\}$, $D_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab \leq 0, b > a, \omega_1(a, b) \geq 0\}$, $E_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab \leq 0, b < a, \omega_1(a, b) \geq 0\}$, $D_3 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b > a > 0, \omega_1(a, b) > 0\} \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b > a > 0, \omega_1(a, b) = 0, \omega_2(a, b) > 0\} \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b > a, ab \leq 0, \omega_1(a, b) < 0, \omega_2(a, b) > 0\}$, $E_3 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > b > 0, \omega_1(a, b) > 0\} \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > b > 0, \omega_1(a, b) = 0, \omega_2(a, b) > 0\} \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > b, ab \leq 0, \omega_1(a, b) < 0, \omega_2(a, b) > 0\}$, $L_0 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = b \neq 0\}$, $\omega_1(a, b) = (a+b)[3(a-b)^2 - (a+b)]$, $\omega_2(a, b) = (a+b)[2(a-b)^2 + 1] - 3(a^2 + b^2)$.

Keywords comparison inequality, generalized Muirhead mean, logarithmic mean

MSC(2010) 26E60

doi: 10.1360/N012013-00175