SO_3 与 SU_2 破缺规范理论中的磁单极*

吴詠时 陈 时 杜东生 郭汉英

(中国科学院物理研究所)

(中国科学院高能物理研究所)

1. 通常的电磁理论中, 电磁场是电荷位相变换群 U_1 的规范场, 磁单极是电荷的对偶荷. 然而, 无论从弱作用和电磁作用的统一理论或从强作用的对称性理论来看, 电荷规范群不过是某个更大对称群的某个 U_1 子群. 因而, 自然需要讨论一般规范理论中 U_1 子群的磁单极问题. 其中最简单的情形就是 SO_3 和 SU_2 破缺规范理论中的磁单极. 近年来, 文献中对这类问题的探讨很多, 但是有些问题仍未解决. 例如, 尽管文献 [1] 中给出了 SO_3 规范理论中规范不变的电磁场强张量的定义, 但是, 为什么这样定义? 相应的电磁势的表达式是什么? 并没有给出答案. 此外, 关于磁单极与 Higgs 场的联系的若干问题, 文献中的看法也很不一致.

根据纤维丛约化的一般理论, 我们考察了 SO_3 和 SU_2 破缺规范理论中的磁单极问题, 所用的处理方法有一定的普遍性. 我们得到了 SO_3 和 SU_2 规范理论中磁单极的电磁势表达式, 它相应的电磁场强张量就是文献 [1] 给出的定义. 此外, 对文献中观点纷纭的若干问题, 根据纤维丛理论得到如下的结论:

(1) 一般说来, 描述 SO_3 和 SU_2 破缺规范理论中的磁单极, 除了 SO_3 或 SU_2 规范势外, 还需要一个么模的 Higgs 场来标记同位旋空间中的电荷方向.

(2) 通常关于磁单极的磁荷数值只依赖于 Higgs 场的拓扑性质的结论是有条件的, 即对 SO_3 或 SU_2 的乘积丛是对的, 而对 SO_3 非乘积丛需另行考虑.

(3) 磁单极的存在, 只要求相应的 SO_3 或 SU_2 主丛可以约化为 SO_2 或 U_1 子丛, 并不要求相应的 SO_3 或 SU_2 规范势可约化为 SO_2 或 U_1 规范势. 因此, 除了沿 Higgs 场方向的电磁势外, 还可以有相应于同位旋空间其余两个方向的规范势, 它们描述带电矢量介子.

2. 我们的讨论基于纤维丛理论的下列定理^[2]:

定理 1 G -主丛 $P(M, G)$ 有 H -子丛 $P'(M, H)$ 的充要条件是, 存在 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 使 G -主丛 P 中所有的联接函数 $S_{\alpha\beta}$ 都取值在子群 H 中.

定理 2 G -主丛 $P(M, G)$ 有 H -子丛 $P'(M, H)$ 的充要条件是, 与主丛 $P(M, G)$ 相配的、以齐性空间 G/H 为纤维的配丛 $E(M, G/H, G, P)$ 允许一截面 $\sigma: M \rightarrow E = P/H$, 而且 H -子丛 P' 与配丛 E 的截面是一一对应的.

定理 3 若群 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 中有子空间 $\mathfrak{M}$, 满足 $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{M}$ (直和), 且 $ad(H)\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ (其中 $\mathfrak{H}$ 为子群 H 的李代数), 则主丛 $P(M, G)$ 上的联络 ω 限制在子丛 $P'(M, H)$ 上并取其 $\mathfrak{H}$ 分量, 就得到 H -子丛 $P'(M, H)$ 上的联络 ω' .

以 SO_3 规范场的情形为例. 由磁单极的纤维丛描述^[3], 磁单极的电磁场用一以四维时空

本文 1977 年 6 月 11 日收到.

* 东方晓同志参加了部分工作.

M^4 (除去磁单极的世界线) 为底的 U_1 -主丛 $P(M^4, U_1)$ 来描写, 磁荷就是相应的 U_1 -主丛的第一阵类. 因而讨论 SO_3 规范理论中的磁单极时, 除用 SO_3 主丛 $P(M^4, SO_3)$ 来描写 SO_3 规范场外, 还需要它的一个 SO_2 -子丛 $P'(M^4, SO_2)$ 来描写磁单极 ($SO_2 \cong U_1$). 由**定理 1**, SO_3 -主丛可以约化为 (亦即有一个) SO_2 -子丛的充要条件是, 主丛 $P(M^4, SO_3)$ 上存在一个整体规范, 使其中所有的联接函数都取值在 SO_2 子群上. 在下面的讨论中, 我们总是选取这样的整体规范.

由**定理 2**, 主丛 $P(M^4, SO_3)$ 的 SO_2 -子丛 $P'(M^4, SO_2)$ 与配丛 $E(M^4, SO_3/SO_2, SO_3, P)$ 上的截面 T 一一对应. 已知齐性空间 SO_3/SO_2 同胚于二维球面 S^2_2 , 它可用 SO_3 李代数 (三维同位旋空间) 中的单位球面 $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1$ 来表示. 在配丛 E 上取局部主坐标, 则 E 的截面 T 在 M^4 的每一坐标邻域 W_i 内可用取值在 S^2_2 上的函数 $\vec{i}(x)$ 来表示. 在重叠区 $W_i \cap W_j$ 中, $\vec{i}_i(x)$ 与 $\vec{i}_j(x)$ 相差一 SO_3 规范变换. $\vec{i}(x)$ 作为时空 M^4 上的标量, 同位旋空间中的矢量, 就是么模 Higgs 场. 为确定 $\vec{i}(x)$ 与 SO_2 -子丛之间的对应关系, 需要 SO_3 群的陪集分解. 取 SO_3 子群 H 为同位旋空间中绕第三轴的转动子群. 当 $\vec{i} \approx (0, 0, -1)$ 时, 令^[4]

$$\phi_1(\vec{i}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t_1^2}{1+t_3} & -\frac{t_1 t_2}{1+t_3} & t_1 \\ -\frac{t_1 t_2}{1+t_3} & 1 - \frac{t_2^2}{1+t_3} & t_2 \\ -t_1 & -t_2 & t_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

当 $\vec{i} \approx (0, 0, 1)$ 时, 令^[4]

$$\phi_2(\vec{i}) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{t_1^2}{1-t_3} & -\frac{t_1 t_2}{1-t_3} & t_1 \\ \frac{t_1 t_2}{1-t_3} & 1 - \frac{t_2^2}{1-t_3} & t_2 \\ -t_1 & t_2 & t_3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

则 SO_3 群的陪集分解为: 对 $R \in SO_3$,

$$R = \phi_1(\vec{i}) \cdot r \quad (\vec{i} \approx (0, 0, -1), r \in H), \quad (3)$$

或

$$R = \phi_2(\vec{i}) \cdot r' \quad (\vec{i} \approx (0, 0, 1), r' \in H), \quad (4)$$

$\phi_1(\vec{i})$ 或 $\phi_2(\vec{i})$ 可视为 SO_3 群对 SO_2 子群 H 的左陪集的代表元素. 它们给出同构关系 $S^2_2 \cong SO_3/SO_2$.

取 SO_3 的生成元 (SO_3 李代数的基) $X_a (a = 1, 2, 3)$ 为

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

X_3 即 SO_2 子群 H 的生成元. 令 $\mathfrak{M}$ 为由 X_1, X_2 支成的子空间, 不难验证**定理 3** 的条件是满足的. 主丛 $P(M^4, SO_3)$ 上的联络为: ($B_\mu = B_\mu^a X_a$, B_μ^a 为 SO_3 规范势)

$$\omega = R^{-1} dR + R^{-1} B_\mu R dx^\mu. \quad (5)$$

按照纤维丛理论中关于配丛 E 上的截面 $\vec{i}(x)$ 与 SO_2 -子丛 $P'(M^4, SO_2)$ 的对应关系, 将 $R = \phi(\vec{i}) \cdot r$ 代入 (5) 式, 就得到 ω 在子丛 P' 上的限制

$$\omega|_{P'} = r^{-1} dr + r^{-1} B'_\mu r dx^\mu, \quad (6)$$

$$B'_\mu = \phi^{-1} \partial_\mu \phi + \phi^{-1} B_\mu \phi, \quad (7)$$

其中 $\phi = \phi(\vec{i}(x))$, 取 $\omega|_{P'}$ 的 X_3 分量, 得 SO_2 子丛 $P'(M^4, SO_2)$ 上的联络

$$\begin{aligned}\omega' &= r^{-1}dr + r^{-1}A_\mu r dx^\mu, \\ A_\mu &= B'_\mu = B'_\mu \text{ 的 } X_3 \text{ 分量.}\end{aligned}\quad (8)$$

当 $t_3(x) \approx -1$ 时, 取 $\phi = \phi_1(\vec{i}(x))$, 有

$$A_\mu = \vec{i} \cdot \vec{B}_\mu - \frac{t_1 \partial_\mu t_2 - t_2 \partial_\mu t_1}{1 + t_3}; \quad (9)$$

当 $t_3(x) \approx +1$ 时, 取 $\phi = \phi_2(\vec{i}(x))$, 有

$$\tilde{A}_\mu = \vec{i} \cdot \vec{B}_\mu + \frac{t_1 \partial_\mu t_2 - t_2 \partial_\mu t_1}{1 - t_3}. \quad (10)$$

(9) 与 (10) 二式仅差一 SO_2 规范变换

$$S(x) = \phi_1^{-1}(\vec{i}(x))\phi_2(\vec{i}(x)) = \exp \left\{ 2 \operatorname{arctg} \frac{t_2(x)}{t_1(x)} X_3 \right\}.$$

A_μ 与 $\tilde{A}_\mu$ 相应于同一个 SO_2 规范场强表达式:

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu \\ &= \partial_\mu (\vec{i} \cdot \vec{B}_\nu) - \partial_\nu (\vec{i} \cdot \vec{B}_\mu) - \vec{i} (\partial_\mu \vec{i} \times \partial_\nu \vec{i}) \\ &= \vec{i} \cdot \vec{F}_{\mu\nu} - \vec{i} \cdot D_\mu \vec{i} \times D_\nu \vec{i},\end{aligned}\quad (11)$$

其中 $D_\mu \vec{i} = \partial_\mu \vec{i} + \vec{B}_\mu \times \vec{i}$, $\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{B}_\nu - \partial_\nu \vec{B}_\mu + \vec{B}_\mu \times \vec{B}_\nu$. 显然, (11) 式正是 't Hooft 的电磁场强张量定义.

3. 如上所述, 根据纤维丛理论, 为确定磁单极所相应的 SO_2 -子丛, 描写 SO_3 规范理论中的磁单极需要引入一个么模的 Higgs 场 $\vec{i}(x)$. 从物理上看, 这也是很自然的. 电磁作用破坏 SO_3 对称性, 它决定了同位旋空间中一个特殊方向作为电荷方向, 绕此方向的同位旋转动即为电荷规范群. 按照当初引入规范场的基本思想, 由于自然界不存在超距作用, 时空各点处同位旋空间中的电荷方向没有理由都是一样的. 因而在讨论 SO_3 破缺规范理论中的电磁现象时, 需要引入一个么模同位矢量场 $\vec{i}(x)$, 来标记时空各点处同位旋空间中的电荷方向.

在通常(无磁单极)的理论中, 总是讨论整个时空中可以找到一个非奇异的 SO_3 规范变换, 使各点的 $\vec{i}(x)$ 都沿同位旋第三轴的情形. 这时函数 $\vec{i}(x)$ 不明显出现, 而电磁势就定义为 SO_3 规范势 $\vec{B}_\mu$ 的第三分量. 在一般有磁单极的情形下, 在整个时空中做不到这一点. 但局部地总可以通过非奇异的 SO_3 规范变换 $\phi(x)$, 使某一时空邻域内各点的同位旋第三轴都转到 $\vec{i}(x)$ 方向. 由于在转动后的同位旋标架看来, 该时空邻域中的 $\vec{i}(x)$ 都沿新的第三轴方向了, 所以可取规范变换后的 SO_3 规范势 $\vec{B}'_\mu$ 的第三分量定义为电磁势.

不难验证, 把同位旋空间第三轴(即生成元 X_3)变到 $\vec{i}(x)$ 方向(即生成元 $t_a(x)X_a$)的 SO_3 规范变换, 当 $t_3(x) \approx -1$ 时可取为 $\phi = \phi_1(\vec{i}(x))$, 当 $t_3(x) \approx 1$ 时可取为 $\phi = \phi_2(\vec{i}(x))$, 因为它们都满足

$$\phi(\vec{i}(x))X_3\phi^{-1}(\vec{i}(x)) = t_a(x)X_a, \quad (12)$$

在此规范变换下, SO_3 规范势 $\vec{B}_\mu$ 变为

$$\vec{B}'_\mu \cdot \vec{X} = \phi^{-1}(\vec{i})\vec{B}_\mu \cdot \vec{X}\phi(\vec{i}) + \phi^{-1}(\vec{i})\partial_\mu\phi(\vec{i}). \quad (13)$$

例如, 取 $\phi = \phi_1(\vec{i}(x))$, 我们便得到

$$\vec{B}'_\mu \cdot \vec{X} = \vec{i} \cdot \vec{B}_\mu - \frac{t_1 \partial_\mu t_2 - t_2 \partial_\mu t_1}{1 + t_3}, \quad (14)$$

$$B_\mu^1 = -D_\mu t_2 + \frac{t_2 D_\mu t_3}{1+t_3}, \quad B_\mu^2 = D_\mu t_1 - \frac{t_1 D_\mu t_3}{1+t_3}. \quad (15)$$

依上所述,可定义此时空邻域内的电磁势 A_μ 为规范变换后的 B_μ^3 . 注意到(13)式就是(7)式,(14)式就是(9)式,因此纤维丛理论中从主丛 $P(M^4, SO_3)$ 的联络 ω 诱导出 SO_2 子丛 $P'(M^4, SO_2)$ 的联络 ω' , 物理上相当于做把同位旋第三轴转到电荷方向 $\vec{i}(x)$ 的规范变换,并定义变换后的 SO_3 规范势的第三分量为 SO_2 规范势.

B_μ^1 、 B_μ^2 可解释为带电中间玻色子所相应的势分量. 由(15)式可知,仅当 $D_\mu \vec{i} = 0$ 时, SO_3 规范势 $\vec{B}_\mu$ 可以约化为 SO_2 规范势: 此时只有电磁势 B_μ^3 , 没有带电中间玻色子势 B_μ^1 、 B_μ^2 .

4. 对 SU_2 破缺规范理论中的磁单极,可与上述完全相似的讨论,可得出与(9—11)式一样的电磁势和电磁场强张量的表达式,与(15)式一样的带电中间玻色子势的表达式. 不过由于 SU_2 和 SO_3 群的整体拓扑性质不同,在讨论磁荷量子化条件及其与 Higgs 场的拓扑性质的关系时,二者将有所不同.

设 S_M^2 为一类空的闭合曲面. 将 M^4 限制于 S_M^2 , 得到的子丛 $P'(S_M^2, SO_2)$ 或 $P'(S_M^2, U_1)$ 的第一陈类,便是 S_M^2 所包围的磁荷. 用两个邻域 W_1, W_2 覆盖 S_M^2 :

$$W_1: S_M^2 \text{—南极}, \quad W_2: S_M^2 \text{—北极}$$

$W_1 \cap W_2$ 中联接函数记为 S_{21} . SU_2 与 SO_3 群的整体拓扑性质上的差别表现为^[3,4]: 主丛 $P'(S_M^2, SU_2)$ 只有一个规范型,都同构于乘积丛(平凡丛),因而可取整体规范使联接函数 $S_{21}(x) = e$ (么元素);而主丛 $P'(S_M^2, SO_3)$ 有两个规范型,除乘积丛外还有一个非平凡丛,对非平凡丛不可能做到 $S_{21}(x) = e$. 因此讨论磁荷时, SU_2 与 SO_3 应分别进行.

对 SU_2 , 第一陈类即磁荷为

$$D = -\frac{1}{2} \int_{S_M^2} \vec{i} \cdot \partial_\mu \vec{i} \times \partial_\nu \vec{i} dx_\mu^\alpha dx_\nu^\beta = -K, \quad (16)$$

这里 K 为整数,表示映射 $\vec{i}: S_M^2 \rightarrow S_0^2$ 的映射度. 当 $K \neq 0$ 时,不能通过非奇异的规范变换把 S_M^2 上所有点的 $\vec{i}(x)$ 都变换为同一个方向.

在 SO_3 情形下,对乘积丛,上述 SU_2 的结果同样适用. 对非平凡丛 $P(S_M^2, SO_3)$, 有

$$D = \frac{1}{2} \oint_{S^1} \{ \vec{i}^{(1)} \cdot \vec{B}_\mu^{(1)} - \vec{i}^{(2)} \cdot \vec{B}_\mu^{(2)} \} dx^\mu \\ - \frac{1}{2} \left\{ \int_{S_M^2 \text{上半球}} \vec{i}^{(1)} \cdot \partial_\mu \vec{i}^{(1)} \times \partial_\nu \vec{i}^{(1)} dx_\mu^\alpha dx_\nu^\beta + \int_{S_M^2 \text{下半球}} \vec{i}^{(2)} \cdot \partial_\mu \vec{i}^{(2)} \times \partial_\nu \vec{i}^{(2)} dx_\mu^\alpha dx_\nu^\beta \right\}, \quad (17)$$

其中 S^1 为赤道大圆, $\vec{i}^{(i)}, \vec{B}_\mu^{(i)}$ 分别为 W_i 内的 Higgs 场和 SO_3 规范势. 此时由于 $S_{21}(x) \neq e$, 上式第一项一般不为零,因而不能说磁荷数值仅仅由 Higgs 场的拓扑性质决定,需要另行讨论.

对 SU_2 和 SO_3 乘积丛,磁荷量子化条件都是 $eg = D = \text{整数}$. 但最小电荷 $e_{\min}$ 与 e 的关系二者不同^[3]: 对 SU_2 , $e_{\min} = e/2$, 对 SO_3 , $e_{\min} = e$. 所以

$$e_{\min g} = D/2 \text{ (对 } SU_2), \quad e_{\min g} = D \text{ (对 } SO_3), \quad (18)$$

即对 SU_2 为 Dirac 量子化条件,对 SO_3 为 Schwinger 量子化条件.

5. 本文的处理具有普遍性. 当 G 为任意紧致李群,而 H 为其极大环子群时,可以证明定理 3 的条件成立. 因而不难将本文的处理方法直接推广到这种情形. 又如,目前不少文献讨论把 Yang-Mills 类粒子解安装到更大的对称群中去的问题^[5]. 这也就是研究更大对称性群 G 中

[下转 178 页]