三维定常 Navier-Stokes 方程有限元/有限体积方法非奇异解束 L^∞ 优化阶分析研究

献给林群教授 80 华诞

李剑^{①*}, 陈掌星^{②③}

① 宝鸡文理学院数学与信息科学学院, 宝鸡 721013;

② Department of Chemical & Petroleum Engineering, University of Calgary, Calgary T2N 1N4, Canada;

③ 西安交通大学数学与统计学院计算地学中心, 西安 710049

E-mail: jiaaali@gmail.com, zhachen@ucalgary.ca

收稿日期: 2014-08-22; 接受日期: 2015-04-01; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371031)、教育部新世纪优秀人才支持计划 (批准号: NCET-11-1041) 和宝鸡文理学院重点启动基金 (批准号: ZK15040) 资助项目

摘要 本文主要对三维定常 Navier-Stokes 方程有限元/有限体积方法非奇异解束 L^∞ 优化阶分析进行研究, 利用低阶宏元逼近、精细的三线性项估计技巧及 Green 函数和加权技巧, 得到相应的有限元方法关于速度梯度和压力变量 L^∞ 的优化阶分析; 以有限元解为插值, 利用有限元与有限体积方法之间等价性, 突破有限体积体系试验函数与检验函数不在同一空间且仅有 $O(h)$ 阶误差的限制, 得到有限体积方法与有限元方法解之间有趣的结果: 速度梯度和压力变量 L^2 模具有 $O(h^{3/2})$ 阶的超逼近结果, 且 L^∞ 模具有 $O(h)$ 阶的优化收敛结果. 进一步得到相应的有限体积方法非奇异解束 L^∞ 模的优化阶收敛分析.

关键词 Navier-Stokes 方程 非奇异解束 有限元方法 有限体积方法 L^∞ 优化阶分析

MSC (2010) 主题分类 35L70, 65N30, 76D06

1 引言

Navier-Stokes 方程是一种典型的非线性方程, 它能够刻画流体的运动规律, 如大气运动、海洋流动、轴承润滑、透平机械内部流动、血液流动和油藏流动等, 其研究对人们认识和控制相关物理现象显得尤为重要. 对于 Navier-Stokes 方程, 理论研究仍有很多问题没有得到完全解决. 科学计算是伴随着计算机的出现而迅速发展并得到广泛应用的交叉学科, 已与理论和实验研究一起成为当今世界科学研究的主要手段. 由于人们对非线性现象的本质认识有限, 因而数值模拟就成为一种十分重要的研究方法. 因此, 构造简单高效且能保持其物理性质的算法就显得尤为重要.

在流体计算中, 最初由于研究问题几何形状简单, 有限差分可简单高效解决相应的问题. 随着计算流体力学的发展, 计算的对象愈加复杂, 有限体积和有限元方法便成为一种较为流行的方法. 有限元方法适合处理复杂区域, 精度可选、计算量大, 但有完善的数值分析理论. 有限体积方法类似于有限差分方法, 但求解非常灵活. 与有限元方法相比, 可以保持物理局部守恒; 与有限差分方法比较, 可以

英文引用格式: Li J, Chen Z X. Optimal L^∞ analysis of non-singular finite element methods/finite volume methods for the stationary 3D Navier-Stokes equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1281–1298, doi: 10.1360/N012014-00150

处理复杂的边界. 尽管有限体积方法是一种具有吸引力的方法, 但与有限元方法相比, 关于非线性问题不可压缩流 Navier-Stokes 方程的理论仍不完善.

本文主要分析三维定常 Navier-Stokes 方程有限元/有限体积方法非奇异解束 L^∞ 优化阶理论. 关于不可压缩流问题有限元/有限体积分析结果主要集中在速度 H^1 范数^[1-5] 和压力的 L^2 优化阶分析^[6-10]. 关于不可压缩流非线性问题有限体积方法的速度 L^2 优化阶分析仍然是难点问题^[9-11]. 关于相关有限元/有限体积方法的 L^∞ 分析研究较少^[11-15] 且相关结果含有次优化阶因子 $O(|\log h|)$. 直至最近关于不可压缩流问题上的研究 (参见文献^[16-18]), 利用 Green 函数和加权技巧^[11, 16] 得到了速度梯度和压力 L^∞ 的优化阶结果. 另一方面, 对于非线性不可压缩问题, 由于有限体积框架下三线性项的复杂性且不再满足有限元方法下的反对称性、Petrov-Galerkin 方法的不对称性和有限体积与有限元试验函数之间仅具有 $O(h)$ 阶误差精度^[6, 7, 9, 10, 19], 使得非线性问题理论上存在诸多难点. 特别对于三维不可压缩流 Navier-Stokes 方程, 有限体积方法相关 L^∞ 优化阶的理论分析仍然没有得到突破.

本文中, 在定常不可压缩流非奇异解束理论框架下^[2, 7, 18, 20, 21], 我们主要利用正规化的 Green 函数以及相关加权技巧^[11, 16] 和精细的三线性项技巧^[3, 16] 得到三维定常不可压缩流问题低阶宏元逼近有限元方法优化 L^∞ 分析. 根据低阶元有限元与有限体积之间的等阶性^[5, 6, 8], 我们首先建立相关的有限体积方法框架下的非奇异解束理论, 得到相关问题有限体积方法与有限元方法非奇异解束之间关于速度梯度和压力的 L^2 模有趣的超逼近结果、速度梯度和压力 L^∞ 模的 $O(h)$ 优化阶收敛结果, 进而可保证定常 Navier-Stokes 方程有限体积方法非奇异解束问题 L^∞ 模的优化阶收敛结果.

特别地, 根据 L^∞ 分析技巧^[11] 和 Navier-Stokes 方程有限元/有限体积分析技巧^[2, 3, 6, 7, 10, 19, 22], 得到三维情形下相关定常 Navier-Stokes 方程有限元/有限体积方法之间的逼近性质; 并在有限元和有限体积方法两种体系下, 几乎相同的情形下 (不提高定常 Navier-Stokes 方程解的正则性), 得到了两种方法非奇异解束之间具有相同的优化阶结果. 值得注意的是, 关于不可压缩流线性 Stokes 问题^[6, 17], 我们可得到两种体系解相应的 L^2 和 L^∞ 模均具有 $O(h^2)$ 阶的超逼近的收敛阶. 而定常 Navier-Stokes 方程由于三线性的复杂性, 仅可以得到两种体系解 L^2 和 L^∞ 模具有 $O(h^{3/2})$ 阶和 $O(h)$ 的收敛性. 与二维情形下定常 Navier-Stokes 方程数值分析^[18] 分别比较, 二维/三维情形下均可得到有限体积方法非奇异解束 L^∞ 的优化阶结果, 但二维情形下有限元与有限体积方法非奇异解束之间 L^2 模具有 $O(|\log h|^{1/2}h^2)$ 阶的超逼近收敛阶.

本文的结构如下: 第 2 节主要给出定常不可压缩流 Navier-Stokes 方程的预备知识, 回忆非奇异解束框架下相关有限元/有限体积方法的有用结果; 第 3 节分析定常 Navier-Stokes 方程有限元方法非奇异解束的 L^∞ 模稳定性和优化阶收敛性; 第 4 节主要以有限元方法非奇异解束作为插值算子, 分析两种体系非奇异解束之间的超逼近性, 并由此得到定常 Navier-Stokes 方程有限体积方法非奇异解束 L^∞ 优化阶收敛性; 第 5 节总结我们截止目前得到的二维/三维情形下定常 Navier-Stokes 方程有限元/有限体积方法非奇异解束的优化阶最优结果.

2 预备知识

设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 上的有界开集, 其边界 Γ 是 C^2 光滑的. 定常 Navier-Stokes 方程定义如下:

$$-\Delta u + \lambda \nabla p = \lambda \left(f - (u \cdot \nabla)u - \frac{1}{2}(\operatorname{div} u)u \right), \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (2.1a)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (2.1b)$$

$$u|_{\Gamma}=0, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上}, \quad (2.1c)$$

其中 $u = (u_1, u_2, u_3)$ 表示三维速度向量, $p = p(x)$ 表示压力, $f(x)$ 表示体积力, $\lambda > 0$ 表示黏性. 为了定义相应的 Navier-Stokes 方程变分问题, 我们介绍以下有用的 Sobolev 空间:

$$\begin{aligned} X &= [H_0^1(\Omega)]^3, \quad M = L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q dx = 0 \right\}, \quad Z = [L^{3/2}(\Omega)]^3, \\ \bar{X} &= X \times M, \quad Y = [H^{-1}(\Omega)]^3, \quad V = \{v \in X : \operatorname{div} v = 0\}, \\ H &= \{v \in [L^2(\Omega)]^3 : \operatorname{div} v = 0\}, \quad D(A) = [H^2(\Omega)]^3 \cap V, \end{aligned}$$

$\|\cdot\|_i$ 表示 Sobolev 空间 $H^i(\Omega)$ 或 $[H^i(\Omega)]^3$, $i = 0, 1, 2$ 的范数. $(\cdot, \cdot)$ 和 $\|\cdot\|_0$ 分别表示空间 $L^2(\Omega)$ 或 $[L^2(\Omega)]^3$ 上的内积和范数. 空间 $H_0^1(\Omega)$ 和 X 的内积和范数分别定义为

$$((u, v)) = (\nabla u, \nabla v), \quad \|\nabla u\|_0 = ((u, u))^{1/2},$$

这里空间 $H_0^1(\Omega)$ 或 X 的半范与全范数等价. 此外, 标准的内积和范数应用于 Sobolev 空间 $W^{m,r}(\Omega)$, $m, r > 0$ (参见文献 [23]).

为了介绍非奇异解束理论, 我们定义线性算子 $T : Y \rightarrow \bar{X}$, 使得对任意的 $g \in Y$, 如下 Stokes 方程:

$$\begin{aligned} -\Delta v + \lambda \nabla q &= g, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ \operatorname{div} v &= 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ v|_{\Gamma} &= 0, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上} \end{aligned}$$

的解可表示为 $\tilde{v}(\lambda) = (v, \lambda q) = Tg \in \bar{X}$.

进一步, 对定常 Navier-Stokes 方程, 我们定义 C^2 -投影 $G : \mathbb{R}^+ \times \bar{X} \rightarrow Y$,

$$G(\lambda, \tilde{v}(\lambda)) = \lambda \left((v \cdot \nabla)v + \frac{1}{2}(\operatorname{div} v)v - f \right).$$

然后定义

$$F(\lambda, \tilde{v}(\lambda)) = \tilde{v}(\lambda) + TG(\lambda, \tilde{v}(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad \tilde{v}(\lambda) \in \bar{X}.$$

因此, 定常 Navier-Stokes 方程非奇异解束^[2, 20] 定义如下:

Λ 为 $\mathbb{R}^+$ 上的紧区间, 称 $\{(\lambda, \tilde{u}(\lambda))\}$ ($\tilde{u}(\lambda) = (u, \lambda p)$) 为方程

$$F(\lambda, \tilde{u}(\lambda)) = 0 \quad (2.2)$$

的非奇异解束当且仅当对任意的 $\lambda \in \Lambda$, $D_u F(\lambda, \tilde{u}(\lambda))$ 是 $\bar{X} \rightarrow Y$ 的一个同构.

如果研究区域 Ω 的边界是三维的且边界 Γ 是 C^2 光滑的, 以下的不等式成立,

$$\|v\|_{L^4} \leq C_0 \|v\|_{L^2}^{1/4} \|\nabla v\|_{L^2}^{3/4}, \quad \|v\|_{L^2} \leq C_1 \|\nabla v\|_{L^2}, \quad \forall v \in X, \quad (2.3)$$

$$\|v\|_{L^\infty} \leq C_2 \|v\|_{L^2}^{1/2} \|Av\|_{L^2}^{1/2}, \quad \forall v \in X \cap [H^2(\Omega)]^3, \quad (2.4)$$

其中 $Av = -\Delta v$. 由分部积分, 可得定常 Navier-Stokes 方程 (2.1) 的连续的变分形式: 求解 $(u, p) \in \bar{X}$ 满足

$$a(u, v) - \lambda d(v, p) + \lambda d(u, q) + \lambda b(u, u, v) = \lambda(f, v), \quad \forall (v, q) \in \bar{X}, \quad (2.5)$$

其中双线性 $a(\cdot, \cdot)$ 和 $d(\cdot, \cdot)$ 定义如下:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= (\nabla u, \nabla v), \quad \forall u, v \in X, \\ d(v, q) &= (\operatorname{div} v, q), \quad \forall (v, q) \in \bar{X}. \end{aligned}$$

显然, 双线性项 $a(\cdot, \cdot)$ 在 $X \times X$ 上是连续的和强制的; 双线性项 $d(\cdot, \cdot)$ 是连续的且满足如下的 inf-sup 条件: 存在仅依赖 Ω 的正数 $\beta_1 > 0$, 使得对所有的 $q \in M$, 有

$$\sup_{v \in X} \frac{d(v, q)}{\|\nabla v\|_{L^2}} \geq \beta_1 \|q\|_{L^2}. \quad (2.6)$$

此外, 三线性项 $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在 $X \times X \times X$ 上是连续的且满足

$$\begin{aligned} b(u, v, w) &= ((u \cdot \nabla)v, w) + \frac{1}{2}((\operatorname{div} u)v, w) \\ &= \frac{1}{2}((u \cdot \nabla)v, w) - \frac{1}{2}((u \cdot \nabla)w, v), \quad \forall u, v, w \in X \end{aligned}$$

和

$$b(u, v, w) = -b(u, w, v), \quad \forall u, v, w \in X, \quad (2.7a)$$

$$|b(u, v, w)| \leq C_3 \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \|\nabla w\|_{L^2}, \quad \forall u, v, w \in X, \quad (2.7b)$$

$$\begin{aligned} |b(u, v, w)| + |b(v, u, w)| + |b(w, u, v)| &\leq C_3 \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2}^{1/2} \|Av\|_{L^2}^{1/2} \|w\|_{L^2}, \\ \forall u \in X, \quad v \in D(A), \quad w &\in [L^2(\Omega)]^2. \end{aligned} \quad (2.7c)$$

进一步, 方程 (2.5) 的存在唯一性可参见文献 [2, 7].

引理 2.1 ^[2, 7] 若 λ 满足下面的唯一性条件:

$$\lambda < \lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{C_3 \|f\|_{H^{-1}}}},$$

则 (2.5) 允许有唯一解 (u, p) . 同时, 方程 (2.5) 的解 $(u, p) \in \bar{X}$ 当且仅当 $\tilde{u}(\lambda) \in \bar{X}$ 是方程 (2.2) 的解. 当 $f \in [L^2(\Omega)]^3$, $\tilde{u}(\lambda) \in D(A) \times [H^1(\Omega) \cap M]$ 和 $G(\lambda, \tilde{u}(\lambda)) \in Y$, 有

$$\|u\|_{H^2} + \lambda \|p\|_{H^1} \leq C_4 \|f\|_{L^2}. \quad (2.8)$$

K_h 表示正则、拟一致的有限元剖分, $Z_h(K)$ 表示单元 K 的顶点的集合; $(X_h, M_h) \subset (X, M)$ 表示速度 - 压力的有限元的空间. 进一步, 假设速度和压力的有限元空间配对 (X_h, M_h) 满足离散的 inf-sup 条件:

$$\sup_{v_h \in X_h} \frac{d(v_h, q_h)}{\|\nabla v_h\|_{L^2}} \geq \beta_2 \|q_h\|_{L^2}, \quad \forall q_h \in M_h, \quad (2.9)$$

其中 $\beta_2 > 0$ 为不依赖于 h 的常数. 满足条件 (2.9) 的有限元配对包括 Taylor-Hood 有限元、mini 元和宏元形式的低次有限元配对 ^[24-26]. 这里主要关注在三角剖分情形下, 在实际应用中非常流行的低次等阶有限元和低次元两种类型:

$$\begin{aligned} X_h &= \{v_h \in [C^0(\bar{\Omega})]^3 \cap X : v_h|_K \in [P_1(K)]^3, \forall K \in K_h\}, \\ M_h &= \{q_h \in C^0(\bar{\Omega}) \cap M : q_h|_K \in R_i(K), i = 0, 1, \forall K \in K_h\}, \end{aligned}$$

其中 $R_i(K)$, $i = 0, 1$ 表示分片线性或常数有限元空间. 众所周知, 这两种有限元均不满足离散的 inf-sup 条件 (2.9). 我们主要利用宏元思想^[26] 稳定相应的有限元配对, 即在宏元上通过一致加细 K_h 取得 $K_{h/2}$ 的方式逼近 P_2 速度场, 从而满足离散 inf-sup 条件. 这两种有限元配对通过宏元思想稳定的方法称为拟 $P_2 - P_i$, $i = 0, 1$ 方法. 相应的有限元方法是稳定的, 且取得优化阶的收敛性结果^[25, 26].

相应地, 设 $\bar{X}_h \equiv X_h \times M_h$, 定义在 $\bar{X}_h \times \bar{X}_h$ 上双线性项定义为

$$\mathcal{B}_h((\bar{u}_h, \lambda \bar{p}_h), (v_h, \lambda q_h)) = a(\bar{u}_h, v_h) - \lambda d(v_h, \bar{p}_h) + \lambda d(\bar{u}_h, q_h), \quad \forall (\bar{u}_h, \bar{p}_h), (v_h, q_h) \in \bar{X}_h. \quad (2.10)$$

此双线性项满足连续性和弱强制性^[25, 26] 分别为

$$|\mathcal{B}_h((\bar{u}_h, \lambda \bar{p}_h), (v_h, \lambda q_h))| \leq C \|(\bar{u}_h, \lambda \bar{p}_h)\| \| (v_h, \lambda q_h) \|, \quad (2.11)$$

$$\sup_{(v_h, \lambda q_h) \in \bar{X}_h} \frac{|\mathcal{B}_h((u_h, \lambda p_h), (v_h, \lambda q_h))|}{\| (v_h, \lambda q_h) \|} \geq \beta_3 \|(\bar{u}_h, \lambda \bar{p}_h)\|, \quad (2.12)$$

其中常数 $\beta_3 > 0$ 不依赖于网格参数 h , 范数 $\|\cdot\|$ 定义为

$$\|\tilde{v}(\lambda)\| \equiv \|(v, \lambda q)\| = (\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \lambda \|q\|_{L^2}^2)^{1/2}.$$

类似地, 为了方便我们定义

$$\|\tilde{v}(\lambda)\|_\infty \equiv \|(v, \lambda q)\|_\infty = (\|\nabla v\|_{L^\infty}^2 + \lambda \|q\|_{L^\infty}^2)^{1/2}.$$

定常 Navier-Stokes 方程相应的有限元变分方程可表示为, 求解 $u_h(\lambda) \equiv (\bar{u}_h, \lambda \bar{p}_h) \in \bar{X}_h$, 对所有的 $(v_h, \lambda q_h) \in \bar{X}_h$, 满足

$$\mathcal{B}_h((\bar{u}_h, \lambda \bar{p}_h), (v_h, \lambda q_h)) + \lambda b(\bar{u}_h, \bar{u}_h, v_h) = \lambda(f, v_h), \quad (2.13a)$$

即

$$F(\lambda, \tilde{u}_h(\lambda)) \equiv \tilde{u}_h(\lambda) + T_h G(\lambda, \tilde{u}_h(\lambda)) = 0, \quad (2.13b)$$

其中 T_h 是算子 T 对应的离散算子.

下面介绍相应的有限体积方法: 定义 N_h 是与三角剖分 K_h 有关所有内节点的集合, N 为节点的总数. 为了定义有限体积方法, 我们介绍相应的对偶网格 $\tilde{K}_h$. 相应的单元称为对偶单元或有限体积单元. 它可由以下的方式来决定: 二维情形下, 利用每个有限元中的重心与其边中点直线相连, 构成以顶点为中心的封闭多边形即为二维情形下的有限体积单元; 三维情形, 在四面体中任选一点 z , 与其二维面上的重心与其每边中点直线相连, 构成以 z 为中心的封闭图形即为三维情形下的有限体积单元.

相应的三维情形下对偶有限元空间定义如下:

$$\tilde{X}_h = \{v \in [L^2(\Omega)]^3 : v|_{\tilde{K}} \in [P_0(\tilde{K})]^3, \forall \tilde{K} \in \tilde{K}_h; v|_{\partial \tilde{K}} = 0\},$$

此对偶有限元空间与相应的有限元空间 X_h 具有相同的维数. 进一步, 存在逆线性的投影 $\Gamma_h : X_h \rightarrow \tilde{X}_h$, 满足

$$\Gamma_h v_h(x) = \sum_{j=1}^N v_h(P_j) \chi_j(x), \quad x \in \Omega, \quad v_h \in X_h, \quad (2.14)$$

其中

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^N v_h(P_j) \phi_j(x), \quad x \in \Omega, \quad v_h \in X_h,$$

$\{\phi_j\}$ 和 $\{\chi_j\}$ 分别表示有限元空间 X_h 和有限体积方法空间 $\tilde{X}_h$ 的基函数. 特别地, 与对偶剖分 $\tilde{K}_h$ 有关的有限体积方法空间是由下面的特征函数来定义,

$$\chi_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in \tilde{K}_j \in \tilde{K}_h, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

在 Petrov-Galerkin 体系中, 其试验函数和检验函数不在同一空间. 最早李荣华教授在研究椭圆问题时, 介绍的投影算子 Γ_h 建立了两者之间的关系. 且满足以下的性质:

引理 2.2 ^[19] 如果 $v_h \in X_h$ 且 $1 \leq r \leq \infty$, 则

$$\int_K (v_h - \Gamma_h v_h) dx = 0, \quad (2.15)$$

$$\|v_h - \Gamma_h v_h\|_{L^r(K)} \leq C_5 h_K \|v_h\|_{W^{1,r}(K)}, \quad \|\Gamma_h v_h\|_{L^2} \leq C_6 \|v_h\|_{L^2}, \quad (2.16)$$

其中 h_K 为有限元 $K \in K_h$ 的直径.

为了建立方程 (2.1) 相应的有限体积变分形式, 我们对方程 (2.1a) 乘以 $\Gamma_h v_h \in \tilde{X}_h$ 在对偶单元 $\tilde{K} \in \tilde{K}_h$ 上进行积分且对于方程 (2.1b) 乘以 $q_h \in M_h$ 并在有限元单元 $K \in K_h$ 上进行积分, 利用 Green 公式可得定常 Navier-Stokes 方程有限体积方法的变分形式: 求解 $\tilde{u}_h(\lambda) = (u_h, \lambda p_h) \in \bar{X}_h \subset \bar{X}$ 使得

$$F_h(\lambda, \tilde{u}_h(\lambda)) \equiv \tilde{u}_h(\lambda) + T_h G(\lambda, \tilde{u}_h(\lambda)) = 0, \quad (2.17a)$$

即

$$\mathcal{C}_h((u_h, \lambda p_h), (v_h, \lambda q_h)) + \lambda b(u_h, u_h, \Gamma_h v_h) = \lambda(f, \Gamma_h v_h), \quad \forall (v_h, q_h) \in \bar{X}_h, \quad (2.17b)$$

这里定义在 $\bar{X}_h \times \bar{X}_h$ 上的双线性形式 $\mathcal{C}_h((\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot))$ 为

$$\mathcal{C}_h((u_h, \lambda p_h), (v_h, \lambda q_h)) = A(u_h, \Gamma_h v_h) + \lambda D(\Gamma_h v_h, p_h) + \lambda d(u_h, q_h), \quad (2.18)$$

其中

$$\begin{aligned} A(u_h, \Gamma_h v_h) &= - \sum_{j=1}^N v_h(P_j) \cdot \int_{\partial \tilde{K}_j} \frac{\partial u_h}{\partial \vec{n}} ds, \quad u_h, v_h \in X_h, \\ D(\Gamma_h v_h, p_h) &= - \sum_{j=1}^N v_h(P_j) \cdot \int_{\partial \tilde{K}_j} p_h \vec{n} ds, \quad p_h \in M_h, \\ (f, \Gamma_h v_h) &= \sum_{j=1}^N v_h(P_j) \cdot \int_{\tilde{K}_j} f dx, \quad v_h \in X_h, \end{aligned}$$

这里 $\vec{n}$ 是边界 $\partial \tilde{K}_j$ 指向外部的单位法向量. 有限体积方法的三线性项 $b(\cdot, \cdot, \cdot) : X_h \times X_h \times \tilde{X}_h \rightarrow \mathbb{R}$:

$$b(u_h, v_h, \Gamma_h w_h) = \left((u_h \cdot \nabla) v_h + \frac{1}{2} (\operatorname{div} u_h) v_h, \Gamma_h w_h \right), \quad \forall u_h, v_h, w_h \in X_h.$$

这里定义的有限体积的三线性项 $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ 依然可以保证与连续情形下协调. 有限体积体系下的三线性项与有限元体系下的三线性项的最根本的区别在于, 有限体积方法下的检验函数和试验函数不在同一空间且只有 $O(h)$ 阶的误差, 增加优化估计的难度. 在 Galerkin 有限元体系下的反对性性质在有限体积体系下不再满足. 因此, 定常 Navier-Stokes 方程的有限体积方法比相应的有限元方法理论分析更加复杂.

我们主要的思想是, 利用相应的有限元方法与有限体积方法之间的等阶性, 及完善的有限元理论, 分析解决相应的有限体积方法的优化阶结果. 下面给出它们之间的一些等阶性结果 (参见文献 [5, 6, 8, 13]):

引理 2.3 对于双线性项 $A(u_h, \Gamma_h v_h)$, 我们有

$$A(u_h, \Gamma_h v_h) = a(u_h, v_h), \quad \forall u_h, v_h \in X_h, \quad (2.19a)$$

且双线性项 $D(\cdot, \cdot)$ 满足

$$D(\Gamma_h v_h, q_h) = -d(v_h, q_h), \quad \forall (v_h, q_h) \in \bar{X}_h. \quad (2.19b)$$

由引理 2.3, 可得双线性项 $\mathcal{C}_h((\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot))$ 连续性和弱强制性为

$$|\mathcal{C}_h((u_h, \lambda p_h), (v_h, \lambda q_h))| \leq C \| (u_h, \lambda p_h) \| \| (v_h, \lambda q_h) \|, \quad \forall (u_h, \lambda p_h), (v_h, \lambda q_h) \in \bar{X}_h \quad (2.20)$$

和

$$\sup_{(v_h, \lambda q_h) \in \bar{X}_h} \frac{|\mathcal{C}_h((u_h, \lambda p_h), (v_h, \lambda q_h))|}{\| (v_h, \lambda q_h) \|} \geq \beta_4 \| (u_h, \lambda p_h) \|, \quad \forall (u_h, \lambda p_h) \in \bar{X}_h, \quad (2.21)$$

其中常数 $\beta_4 > 0$ 不依赖于网格尺度 h .

3 有限元方法 L^∞ 分析

本节主要分析定常 Navier-Stokes 方程有限元方法非奇异解束存在性和优化阶误差分析.

为了分析方便, 我们介绍 Laplace 算子 $A = \Delta$ 对应的离散算子 A_h (参见文献 [4]) 为

$$(A_h u_h, v_h) = (\nabla u_h, \nabla v_h), \quad u_h, v_h \in X_h,$$

定义

$$V_h = \{v_h \in X_h : d(v_h, q_h) = 0, \forall q_h \in M_h\},$$

其中 A_h 在 V_h 的限制是可逆的, 其逆算子为 A_h^{-1} . 此外, A_h 是自伴的、正定的. 特别地, 对任意的 $r \in \mathbb{R}$, 我们定义在 V_h 上离散的 Sobolev 范数为

$$\|v_h\|_{H^r} = \|A_h^{r/2} v_h\|_{L^2}, \quad v_h \in V_h.$$

由于非线性 Navier-Stokes 方程的复杂性, 有限元方法解的存在唯一性可参见文献 [2, 3, 7].

引理 3.1 假设边界 $\partial\Omega$ 是 C^2 光滑的, 方程 (2.12) 的解 $\tilde{u}_h = (\bar{u}_h, \lambda \bar{p}_h) \in \bar{X}_h$ 满足

$$\|\nabla \bar{u}_h\|_{L^2} + \lambda \|\bar{p}_h\|_{L^2} \leq C_7, \quad \|A_h \bar{u}_h\|_{L^2} \leq C_8, \quad (3.1)$$

其中常数 $C_7 > 0$ 和 $C_8 > 0$ 仅依赖于参数 (λ, Ω, f) .

下面给出不可压缩流 Navier-Stokes 方程有限元方法非奇异解束的定义:

称 $\{(\lambda, \tilde{u}_h(\lambda))\}$ ($\tilde{u}_h(\lambda) = (\bar{u}_h, \lambda \bar{p}_h)$) 是方程 (2.13) 的有限元方法的非奇异解束当且仅当对所有的 $\lambda \in \Lambda$,

$$D_{\bar{u}_h} F(\lambda, \tilde{u}_h(\lambda)) \text{ 是 } \bar{X}_h \text{ 到 } Y \text{ 的一个同构.} \quad (3.2)$$

进一步, 由已有的结果 (参见文献 [2, 20, 21, 27]) 可得下面的命题:

命题 3.2 $\tilde{u}_h(\lambda) \in \bar{X}_h$ 是 (2.13) 的非奇异解束当且仅当存在仅依赖于 (λ, f, Ω) 的常数 $\gamma > 0$, 满足

$$\sup_{(v_h, \lambda q_h) \in \bar{X}_h} \frac{\bar{B}_\lambda((\bar{w}_h, \lambda \bar{\chi}_h); (v_h, \lambda q_h))}{\|(v_h, \lambda q_h)\|} \geq \gamma \|(\bar{w}_h, \lambda \bar{\chi}_h)\|, \quad (\bar{w}_h, \lambda \bar{\chi}_h) \in \bar{X}_h, \quad (3.3)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{B}_\lambda((\bar{w}_h, \lambda \bar{\chi}_h); (v_h, \lambda q_h)) &\equiv A_\lambda(\bar{u}_h; \bar{w}_h, v_h) - \lambda d(v_h, \bar{\chi}_h) + \lambda d(\bar{w}_h, q_h), \\ A_\lambda(\bar{u}_h; w_h, v_h) &= a(w_h, v_h) + \lambda b(\bar{u}_h, w_h, v_h) + \lambda b(w_h, \bar{u}_h, v_h). \end{aligned}$$

参见文献 [2, 7, 18], 为了分析定常 Navier-Stokes 方程有限元方法非奇异解束理论, 我们作如下假设:

假设 A1 存在 Banach 空间 $Z \subseteq Y$, 连续嵌入到 Y , 且满足

$$D_u G(\lambda, \tilde{u}(\lambda)) \in \mathcal{L}(\bar{X}, Z), \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad \tilde{u} \in \bar{X}, \quad (3.4a)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(T_h - T)g\|_{\bar{X}} = 0, \quad \forall g \in Y, \quad (3.4b)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(T_h - T)\|_{\mathcal{L}(Z, \bar{X})} = 0. \quad (3.4c)$$

由文献 [2, 21], 我们可得下面的结果:

定理 3.3 假设 G 是从 $\Lambda \times \bar{X}$ 到 Y 上的一个 C^2 - 投影, 投影 $D_{uu} G(\lambda, \tilde{u}(\lambda))$ 在 $\Lambda \times \bar{X}$ 上的所有的有界子集是有界的, 且假设 A1 成立, $\{(\lambda, \tilde{u}(\lambda)); \lambda \in \Lambda\}$ 是 (2.2) 或 (2.5) 的非奇异解束, 则存在 $\bar{X}$ 的邻域 ϑ , 对于足够小的 h ($0 < h \leq h_0$), 唯一的 C^2 - 函数 $\lambda \in \Lambda \rightarrow \tilde{u}_h(\lambda) \in \bar{X}_h$ 满足

$$\{(\lambda, \tilde{u}_h(\lambda)); \lambda \in \Lambda\} \text{ 是方程 (2.13) 的非奇异解束,} \quad (3.5a)$$

$$\tilde{u}_h(\lambda) - \tilde{u}(\lambda) \in \vartheta, \quad \forall \lambda \in \Lambda. \quad (3.5b)$$

进一步, 存在不依赖于网格参数 h 和 λ 的常数 $\kappa > 0$, 对所有的 $\lambda \in \Lambda$, 满足

$$\|\bar{u}_h - u\|_{L^2} + h \|\tilde{u}_h(\lambda) - \tilde{u}(\lambda)\| \leq \kappa h^2 (\|u\|_{H^2} + \|p\|_{H^1} + \|f\|_{L^2}). \quad (3.6)$$

注意, (3.6) 为不可压缩流 Navier-Stokes 方程真解与离散解误差的优化阶收敛结果. 在相同的光滑条件下, 若真解与离散解误差收敛阶低于 (3.6) 的收敛阶, 则其收敛阶为次优化收敛阶; 若在一定条件下, 真解与离散解误差收敛阶优于 (3.6) 的收敛阶, 则称其为超收敛.

本节主要目的是研究定常 Navier-Stokes 方程有限元方法非奇异解束 L^∞ 的稳定性和优化阶收敛性. 关于定常 Stokes 问题关于速度梯度和压力的 L^∞ 模分析结果, 主要的难点在于收敛分析依赖于

$O(|\log h|)$ 因子^[11,15]. 直至文献 [16], 他们得到了相关的去掉 $O(|\log h|)$ 因子的 L^∞ 优化阶结果. 本节主要利用加权的 Sobolev 范数^[11,15,16], 通过分析 $\sigma^{\mu/2}$, 并吸收文献 [11,16–18] 中的分析技巧去掉 $O(|\log h|)$ 因子.

首先, 我们给如下假设.

假设 A2^[16] 首先要求插值算子 I_h 和 J_h 满足下面的性质:

(1) I_h 是拟局部的: 对任意的 $K \in K_h$, 有

$$\begin{aligned} \|I_h v - v\|_{L^2(K)} + h_K \|\nabla(I_h v - v)\|_{L^2(K)} &\leq Ch_K^2 |v|_{H^2(\Delta K)}, \\ \|\nabla I_h v\|_{L^2(K)} &\leq C |v|_{H^1(\Delta K)}. \end{aligned}$$

(2) I_h 满足离散的保散度性质:

$$d(I_h v - v, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in \overline{M}_h.$$

(3) J_h 是拟局部的: 对任意的 $K \in K_h$, 有

$$\|J_h q - q\|_{L^2(K)} \leq Ch_K |q|_{H^1(\Delta K)},$$

其中 ΔK 是包含剖分 K_h 中至多 L 个单元 (包括单元 K) 的一个宏元, L 是一个不依赖于网格参数 h 给定的整数; $\overline{M}_h$ 是在 M_h 中无零均值限制的函数.

这里, 为了分析定常 Navier-Stokes 方程有限元方法非奇异解束 L^∞ 优化阶分析, 我们收集了一些关于 Stokes 方程正则性和 Green 函数基本的假设. 首先, 我们介绍正则 Green 函数^[11,14]. 设在固定矩阵 ∇u_h , 即 $\frac{\partial u_{h,i}}{\partial x_j}$ 中的一个单元 $K \in K_h$ 中, 在逼近点 $x_0 \in K$ 可使 $|\frac{\partial u_{h,i}}{\partial x_j}|$ 取得最大值. 在单元 K 中定义逼近的磨光子 δ_M , 满足

$$D\delta_M = \frac{\partial(\delta_M e_i)}{\partial x_j}, \quad \int_{\Omega} \delta_M dx = 1, \quad \left\| \frac{\partial u_{h,i}}{\partial x_j} \right\|_{L^\infty} = \left(\delta_M, \frac{\partial u_{h,i}}{\partial x_j} \right), \quad (3.7)$$

其中 e_i 为在 i 方向 ($i = 1$ 或 2) 的单位向量. 进一步, 我们定义正规 Green 函数如下:

$$a(G, v) - \lambda d(v, Q) + \lambda b(v, u, G) + \lambda b(u, v, G) = -(D\delta_M, v), \quad \forall v \in X, \quad (3.8a)$$

$$\lambda d(G, q) = 0, \quad \forall q \in M. \quad (3.8b)$$

相似地, 下面的估计成立 (参见文献 [16]),

$$\|\sigma^{\mu/2-1} \nabla G\|_{L^2} + \|\sigma^{\mu/2-1} Q\|_{L^2} \leq Ch^{\theta/2-1}, \quad (3.9a)$$

$$\|\sigma^{\mu/2} \Delta G\|_{L^2} + \|\sigma^{\mu/2} \nabla Q\|_{L^2} \leq Ch^{\theta/2-1}, \quad (3.9b)$$

其中 $\sigma(x) = [|x - x_0|^2 + (\kappa h)^2]^{1/2}$ ($|x - x_0| < R$, $R > 0$), $\mu = 2 + \theta$ 且 $0 < \theta < 1$, $C > 0$ 不依赖于常数 $\kappa > 1$ 和网格尺度 h .

同时, 我们定义如下 Stokes 问题 (G, Q) 的投影 $(G_h, Q_h) \in \bar{X}_h$, 满足

$$a(G - G_h, v_h) - \lambda d(v_h, Q - Q_h) = 0, \quad \forall v_h \in X_h, \quad (3.10a)$$

$$\lambda d(G - G_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in M_h. \quad (3.10b)$$

在假设 A2 情形下, 则有 (参见文献 [16])

$$\|\nabla G_h\|_{L^2} + \|Q_h\|_{L^2} \leq C(\|\nabla G\|_{L^2} + \|Q\|_{L^2}). \quad (3.11)$$

进一步, 满足

$$\|\sigma^{\mu/2}\nabla(G - G_h)\|_{L^2} + \|\sigma^{\mu/2}(Q - Q_h)\|_{L^2} \leq Ch^{\theta/2}. \quad (3.12)$$

关于定常 Navier-Stokes 方程有限元方法非奇异解束, 我们首先研究 $\|\nabla \bar{u}_h\|_{L^\infty}$ 和 $\|\bar{p}_h\|_{L^\infty}$ 的稳定性.

引理 3.4 假设定理 3.3 和假设 A2 成立, $\{\lambda, \tilde{u}(\lambda); \lambda \in \Lambda\}$ 和 $\{\lambda, \tilde{u}_h(\lambda); \lambda \in \Lambda\}$ 分别是 (2.2) (或 (2.5)) 和 (2.13) 的非奇异解束, 则有

$$\|\nabla \bar{u}_h\|_{L^\infty} \leq C(\|\nabla u\|_{L^\infty} + \|p\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^2}). \quad (3.13)$$

证明 在正规 Green 函数方程 (3.8) 中, 我们取 $(v, q) = (\bar{u}_h, \bar{p}_h)$, 则有

$$\|\nabla \bar{u}_h\|_{L^\infty} = a(G, \bar{u}_h) - \lambda d(\bar{u}_h, Q) - \lambda d(G, \bar{p}_h) + \lambda b(\bar{u}_h, u, G) + \lambda b(u, \bar{u}_h, G),$$

结合方程 (3.10), 可得

$$\|\nabla \bar{u}_h\|_{L^\infty} = a(G_h, \bar{u}_h) - \lambda d(\bar{u}_h, Q_h) - \lambda d(G_h, \bar{p}_h) + \lambda b(\bar{u}_h, u, G) + \lambda b(u, \bar{u}_h, G). \quad (3.14)$$

由 (2.2) (或 (2.5)) 和 (2.13) 可得

$$a(u - \bar{u}_h, v_h) - \lambda d(v_h, p - \bar{p}_h) + \lambda d(u - \bar{u}_h, q_h) + \lambda b(u, u, v_h) - \lambda b(\bar{u}_h, \bar{u}_h, v_h) = 0. \quad (3.15)$$

在 (3.15) 中取 $(v_h, q_h) = (G_h, -Q_h)$, 在 (3.8b) 中取 $q = p$, 结合 (3.14), 且注意到 $d(u, Q_h) = 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \|\nabla \bar{u}_h\|_{L^\infty} &= a(u, G_h) - \lambda d(G_h, p) + \lambda b(u, u, G_h) - \lambda b(\bar{u}_h, \bar{u}_h, G_h) + \lambda b(\bar{u}_h, u, G) + \lambda b(u, \bar{u}_h, G) \\ &= a(u, G_h - G) + a(u, G) - \lambda d(G_h - G, p) + \lambda b(u, u, G_h) - \lambda b(\bar{u}_h, \bar{u}_h, G_h) \\ &\quad + \lambda b(\bar{u}_h, u, G) + \lambda b(u, \bar{u}_h, G). \end{aligned} \quad (3.16)$$

在 (3.8a) 取 $v = u$, 利用 (2.1b) 可推出

$$a(u, G) = -2\lambda b(u, u, G) - (D\delta_M, u). \quad (3.17)$$

由 (3.16) 和 (3.17) 可得

$$\begin{aligned} \|\nabla \bar{u}_h\|_{L^\infty} &= -(D\delta_M, u) + a(u, G_h - G) - \lambda d(G_h - G, p) \\ &\quad + \lambda b(u - \bar{u}_h, u, G_h) - \lambda b(u - \bar{u}_h, u - \bar{u}_h, G_h) + \lambda b(u, u - \bar{u}_h, G_h) \\ &\quad + \lambda b(\bar{u}_h, u, G) + \lambda b(u, \bar{u}_h, G) - 2\lambda b(u, u, G). \end{aligned} \quad (3.18)$$

显然,

$$-(D\delta_M, u) = \|\nabla u\|_{L^\infty}.$$

由 Hölder 不等式可得

$$|a(u, G_h - G) - \lambda d(G_h - G, p)| \leq (\|\nabla u\|_{L^\infty} + \|p\|_{L^\infty})\|\nabla(G - G_h)\|_{L^1}.$$

对于三线性项, 我们有

$$\begin{aligned} |b(u - \bar{u}_h, u, G_h) + b(u, u - \bar{u}_h, G_h)| &\leq C \|\nabla u\|_{L^2} (\|\nabla G\|_{L^2} + \|Q\|_{L^2}) \|\nabla(u - \bar{u}_h)\|_{L^2}, \\ |b(u - \bar{u}_h, u - \bar{u}_h, G_h)| &\leq C (\|\nabla G\|_{L^2} + \|Q\|_{L^2}) \|\nabla(u - \bar{u}_h)\|_{L^2}^2, \\ |b(\bar{u}_h, u, G) + b(u, \bar{u}_h, G) - 2b(u, u, G)| &= |b(\bar{u}_h - u, u, G) + b(u, \bar{u}_h - u, G)| \\ &\leq C \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla G\|_{L^2} \|\nabla(u - \bar{u}_h)\|_{L^2}, \end{aligned}$$

其中 $\|\nabla(G_h - G)\|_{L^1}$ 可被估计如下:

$$\|\nabla(G_h - G)\|_{L^1} = \int_{\Omega} \nabla(G_h - G) dx \leq \left(\int_{\Omega} \sigma^{\mu} |\nabla(G_h - G)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \sigma^{-\mu} dx \right)^{1/2}. \quad (3.19)$$

由文献 [16] 中的技巧可得上式中最后一项的估计为

$$\int_{\Omega} \sigma^{-\mu} dx \leq Ch^{-\theta}, \quad 0 < \theta < 1, \quad \mu = 2 + \theta. \quad (3.20)$$

因此, 我们由 (3.12)、(3.19) 和 (3.20) 可得

$$\|\nabla(G_h - G)\|_{L^1} \leq C. \quad (3.21)$$

对于 $\|\nabla G\|_{L^2}$, 利用 Hölder 不等式和 (3.9a), 可得

$$\|\nabla G\|_{L^2}^2 \leq \max \sigma^{2-\mu} \int_{\Omega} \sigma^{\mu-2} |\nabla G|^2 dx \leq \kappa h^{2-\mu} \|\sigma^{\mu/2-1} \nabla G\|_{L^2}^2 \leq Ch^{-2}. \quad (3.22a)$$

相似地,

$$\|Q\|_{L^2} \leq Ch^{-1}. \quad (3.22b)$$

由 (3.18) 和 (3.18)–(3.22) 之间不等式估计结果, 结合定理 3.3 可得 (3.13). $\square$

关于定常 Navier-Stokes 方程压力的 L^∞ 范数, 不再需要离散 inf-sup 条件和上述的结果. 我们需要给定另外一个正则 Green 函数^[11, 14]

$$a(U, v) + \lambda d(v, V) + \lambda b(v, u, U) + \lambda b(u, v, U) = 0, \quad v \in X, \quad (3.23a)$$

$$\lambda d(U, q) = (\delta_M - B, q), \quad q \in M, \quad (3.23b)$$

其中 B 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 中固定的函数, 满足

$$\int_{\Omega} B(x) dx = 1.$$

因此, $\delta_M - B \in L_0^2(\Omega)$. 类似地, 上述问题的解满足 (参见文献 [16])

$$\|\sigma^{\mu/2-1} \nabla U\|_{L^2} + \|\sigma^{\mu/2-1} V\|_{L^2} \leq Ch^{\theta/2-1}. \quad (3.24)$$

同时, 我们定义了相应的 Stokes 投影 $(U_h, V_h) \in \bar{X}_h$:

$$a(U - U_h, v_h) + \lambda d(v_h, V - V_h) - \lambda d(U - U_h, q_h) = 0, \quad \forall (v_h, q_h) \in \bar{X}_h, \quad (3.25)$$

它有如下的结果 (参见文献 [16]):

$$\|\nabla U_h\|_{L^2} + \|V_h\|_{L^2} \leq C(\|\nabla U\|_{L^2} + \|V\|_{L^2}), \quad (3.26a)$$

$$\|\sigma^{\mu/2}\nabla(U - U_h)\|_{L^2} + \|\sigma^{\mu/2}(V - V_h)\|_{L^2} \leq Ch^{\theta/2}. \quad (3.26b)$$

基于上述准备, 我们将在下面的引理估计 $\|\bar{p}_h\|_{L^\infty}$.

引理 3.5 假设在定理 3.3 和假设 A2 条件下, $\{\lambda, \tilde{u}(\lambda); \lambda \in \Lambda\}$ 和 $\{\lambda, \tilde{u}_h(\lambda); \lambda \in \Lambda\}$ 分别是 (2.2) (或 (2.5)) 和 (2.13) 的非奇异解束, 则有

$$\|\bar{p}_h\|_{L^\infty} \leq C(\|\nabla u\|_{L^\infty} + \|p\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^2}). \quad (3.27)$$

证明 在 (3.23) 中取

$$(v, q) = (u - \bar{u}_h, p - \bar{p}_h),$$

可得

$$\begin{aligned} (\delta_M - B, \bar{p}_h - p) &= a(U, u - \bar{u}_h) + \lambda d(u - \bar{u}_h, V) - \lambda d(U, p - \bar{p}_h) \\ &\quad + \lambda b(u - \bar{u}_h, u, U) + \lambda b(u, u - \bar{u}_h, U). \end{aligned} \quad (3.28)$$

在 (3.15) 中取 $(v_h, q_h) = (U_h, V_h)$, 可得

$$a(u - \bar{u}_h, U_h) - \lambda d(U_h, p - \bar{p}_h) + \lambda d(u - \bar{u}_h, V_h) + \lambda b(u, u, U_h) - \lambda b(\bar{u}_h, \bar{u}_h, U_h) = 0. \quad (3.29)$$

注意到

$$d(U - U_h, \bar{p}_h) = 0,$$

结合 (3.28) 和 (3.29), 可得

$$\begin{aligned} \|\bar{p}_h\|_{L^\infty} &= a(u - \bar{u}_h, U - U_h) + \lambda d(u - \bar{u}_h, V - V_h) - \lambda d(U - U_h, p) + (B, \bar{p}_h - p) \\ &\quad + (\delta_M, p) - \lambda b(u - \bar{u}_h, u, U_h) - \lambda b(\bar{u}_h, u - \bar{u}_h, U_h) \\ &\quad + \lambda b(u - \bar{u}_h, u, U) + \lambda b(u, u - \bar{u}_h, U). \end{aligned} \quad (3.30)$$

由 Hölder 不等式、三角不等式和 (3.13), 我们有

$$\begin{aligned} &|a(u - \bar{u}_h, U_h - U) - \lambda d(u - \bar{u}_h, V_h - V) + \lambda d(U_h - U, p)| \\ &\leq (\|\nabla(u - \bar{u}_h)\|_{L^\infty} + \|p\|_{L^\infty})(\|\nabla(U_h - U)\|_{L^1} + \|V_h - V\|_{L^1}) \\ &\leq (\|\nabla u\|_{L^\infty} + \|p\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^2})(\|\nabla(U_h - U)\|_{L^1} + \|V_h - V\|_{L^1}). \end{aligned}$$

对于三线性项, 我们由相关结果可得

$$\begin{aligned} |\lambda b(u - \bar{u}_h, u, U) + \lambda b(u, u - \bar{u}_h, U)| &\leq C\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla(u - \bar{u}_h)\|_{L^2}\|\nabla U\|_{L^2}, \\ |b(u - \bar{u}_h, u, U_h) + b(\bar{u}_h, u - \bar{u}_h, U_h)| &\leq C\|\nabla(u - \bar{u}_h)\|_{L^2}(\|\nabla u\|_{L^2} + \|\nabla \bar{u}_h\|_{L^2})(\|\nabla U\|_{L^2} + \|V\|_{L^2}). \end{aligned}$$

此外, 由传统分析可得

$$|(B, p - \bar{p}_h) - (\delta_M, p)| \leq C(\|u\|_{L^\infty} + \|p\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^2}).$$

借鉴引理 3.4 中证明, 我们可得 $\|\nabla(U - U_h)\|_{L^1(\Omega)}$, $\|V - V_h\|_{L^1(\Omega)}$, $\|\nabla U\|_{L^2}$ 和 $\|V\|_{L^2}$ 中的估计

$$\|\nabla U\|_{L^2} + \|V\|_{L^2} \leq Ch^{-1}, \quad \|\nabla(U - U_h)\|_{L^1} + \|V - V_h\|_{L^1} \leq C. \quad (3.31)$$

结合这些不等式和定理 3.3 中的结果, 我们完成本引理的证明. $\square$

基于上述定常 Navier-Stokes 方程有限元方法非奇异解束问题 L^∞ 模稳定性分析, 利用 $I_h u_h - \bar{u}_h$ 和 $J_h p - \bar{p}_h$ 代替引理 3.4 和 3.5 中的 $\bar{u}_h$ 和 $\bar{p}_h$, 利用传统的技巧容易得到如下相应的 L^∞ 优化阶收敛分析.

定理 3.6 假设 G 是从 $\Lambda \times \bar{X}$ 到 Y 上的一个 C^2 -投影, 投影 $D_{uu}G(\lambda, \tilde{u}(\lambda))$ 在 $\Lambda \times \bar{X}$ 上的所有的有界子集是有界的, 且假设 A1 成立, $\{(\lambda, \tilde{u}(\lambda)); \lambda \in \Lambda\}$ 是 (2.2) (或 (2.5)) 的非奇异解束, 则存在 $\bar{X}$ 的邻域 ϑ , 对于足够小的 h 满足 $0 < h \leq h_0$, 唯一的 C^2 -函数 $\lambda \in \Lambda \rightarrow \tilde{u}_h(\lambda) \in \bar{X}_h$ 满足

$$\{(\lambda, \tilde{u}_h(\lambda)); \lambda \in \Lambda\} \text{ 是方程 (2.13) 的非奇异解束,} \quad (3.32a)$$

$$\tilde{u}_h(\lambda) - \tilde{u}(\lambda) \in \vartheta, \quad \forall \lambda \in \Lambda. \quad (3.32b)$$

进一步, 存在不依赖于网格参数 h 和 λ 的常数 $\kappa > 0$, 对所有的 $\lambda \in \Lambda$, 满足

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_\infty \leq \kappa h(|u|_{W^{2,\infty}} + |p|_{W^{1,\infty}} + \|f\|_{L^2}). \quad (3.33)$$

4 有限体积方法 L^∞ 分析

基于第 3 节关于三维定常 Navier-Stokes 方程有限元方法非奇异解束 L^∞ 优化阶分析, 本节主要建立三维相应有限体积方法非奇异解束理论, 并给出相关的有限体积方法非奇异解束 L^∞ 优化阶分析.

首先给出一些现有的结论 (参见文献 [7, 9]):

引理 4.1 假设边界 $\partial\Omega$ 是 C^2 光滑的, 方程 (2.17) 的非奇异解束 $\tilde{u}_h(\lambda)$ 满足

$$\|\nabla u_h\|_{L^2} + \lambda \|p_h\|_{L^2} \leq C_9, \quad \|A_h u_h\|_{L^2} \leq C_{10}, \quad (4.1)$$

其中常数 $C_9 > 0$ 和 $C_{10} > 0$ 仅依赖于参数 (λ, Ω, f) .

类似地, 我们给出以下关于定常 Navier-Stokes 方程有限体积方法非奇异解束的判定命题:

命题 4.2 $\tilde{u}_h(\lambda) \in \bar{X}_h$ 是 (2.17) 的非奇异解束当且仅当存在仅依赖于 (λ, f, Ω) 常数 $\gamma^* > 0$, 满足

$$\sup_{(v_h, \lambda q_h) \in \bar{X}_h} \frac{B_\lambda((w_h, \lambda \chi_h); (v_h, \lambda q_h))}{\|(v_h, \lambda q_h)\|} \geq \gamma^* \|(w_h, \lambda \chi_h)\|, \quad (w_h, \lambda \chi_h) \in \bar{X}_h, \quad (4.2)$$

其中

$$\begin{aligned} B_\lambda((w_h, \lambda \chi_h); (v_h, \lambda q_h)) &\equiv A_\lambda(u_h; w_h, v_h) + \lambda D(\Gamma_h v_h, \chi_h) + \lambda d(w_h, q_h), \\ A_\lambda(u_h; w_h, v_h) &= A(w_h, \Gamma_h v_h) + \lambda b(u_h, w_h, \Gamma_h v_h) + \lambda b(w_h, u_h, \Gamma_h v_h). \end{aligned}$$

下一步, 说明定常 Navier-Stokes 方程的有限体积方法非奇异解束和相应的有限元方法的非奇异解束具有超逼近的性质.

定理 4.3 (超逼近分析) 在定理 3.3 假设下, $\{(\lambda, \tilde{u}(\lambda)); \lambda \in \Lambda\}$ 是 (2.2) 或 (2.5) 的非奇异解束, 则存在 $\bar{X}$ 的邻域 ϑ , 对于足够小的 h 满足 $0 < h \leq h_0$, 唯一的 C^2 - 函数 $\lambda \in \Lambda \rightarrow \tilde{u}_h(\lambda) \in \bar{X}_h$ 满足

$$\{(\lambda, \tilde{u}_h(\lambda)); \lambda \in \Lambda\} \text{ 是方程 (2.17) 的非奇异解束,} \quad (4.3a)$$

$$\tilde{u}_h(\lambda) - \tilde{u}(\lambda) \in \vartheta, \quad \forall \lambda \in \Lambda. \quad (4.3b)$$

进一步, 存在常数 $\kappa > 0$, 不依赖于网格参数 h 和 λ , 对所有的 $\lambda \in \Lambda$, 满足

$$\|\tilde{u}_h(\lambda) - \tilde{u}(\lambda)\| \leq \kappa h^{3/2} \|f\|_{H^1}, \quad (4.4)$$

其中 $\tilde{u}_h(\lambda)$ 为 (2.13) 关于有限元方法的非奇异解束.

证明 关于三维定常 Navier-Stokes 方程有限元与有限体积方法非奇异解束之间的超逼近性质可参见文献 [7] 的证明. $\square$

进一步由文献 [7] 的证明技巧可得下面结论:

定理 4.4 ^[7] (L^2, H^1 优化阶分析) 假设 G 是从 $\Lambda \times \bar{X}$ 到 Y 上的一个 C^2 - 投影, 投影 $D_{uu}G(\lambda, \tilde{u}(\lambda))$ 在 $\Lambda \times \bar{X}$ 上的所有的有界子集是有界的, 且假设 A1 成立, $\{(\lambda, \tilde{u}(\lambda)); \lambda \in \Lambda\}$ 是 (2.2) (或 (2.5)) 的非奇异解束, 则存在 $\bar{X}$ 的邻域 ϑ , 对于足够小的 h 满足 $0 < h \leq h_0$, 唯一的 C^2 - 函数 $\lambda \in \Lambda \rightarrow \tilde{u}_h(\lambda) \in \bar{X}_h$ 满足

$$\{(\lambda, \tilde{u}_h(\lambda)); \lambda \in \Lambda\} \text{ 是方程 (2.17) 的非奇异解束,} \quad (4.5a)$$

$$\tilde{u}_h(\lambda) - \tilde{u}(\lambda) \in \vartheta, \quad \forall \lambda \in \Lambda. \quad (4.5b)$$

进一步, 存在不依赖于网格参数 h 和 λ 的常数 $\kappa > 0$, 对所有的 $\lambda \in \Lambda$, 满足

$$\|\tilde{u}_h(\lambda) - \tilde{u}(\lambda)\| \leq \kappa h (\|u\|_{H^2} + \|p\|_{H^1} + \|f\|_{L^2}), \quad (4.6)$$

且

$$\|u_h - u\|_{L^2} \leq \kappa h^2 (\|u\|_{H^2} + \|p\|_{H^1} + \|f\|_{H^1}). \quad (4.7)$$

基于上述准备, 我们可得到下面的定理:

定理 4.5 (L^∞ 优化阶分析) 假设 G 是从 $\Lambda \times \bar{X}$ 到 Y 上的一个 C^2 - 投影, 投影 $D_{uu}G(\lambda, \tilde{u}(\lambda))$ 在 $\Lambda \times \bar{X}$ 上的所有的有界子集是有界的, 且假设 A1 成立, $\{(\lambda, \tilde{u}(\lambda)); \lambda \in \Lambda\}$ 是 (2.2) (或 (2.5)) 的非奇异解束, 则存在 $\bar{X}$ 的邻域 ϑ , 对于足够小的 h 满足 $0 < h \leq h_0$, 唯一的 C^2 - 函数 $\lambda \in \Lambda \rightarrow \tilde{u}_h(\lambda) \in \bar{X}_h$ 满足 (4.5) 且

$$\|\tilde{u}(\lambda) - \tilde{u}_h(\lambda)\|_\infty \leq \kappa h (|u|_{W^{2,\infty}} + |p|_{W^{1,\infty}} + \|f\|_{H^1}). \quad (4.8)$$

证明 在 Green 函数 (3.8) 中, 取

$$(v, q) = (e_h, \eta_h) = (u_h - \bar{u}_h, p_h - \bar{p}_h),$$

可得

$$\|\nabla e_h\|_{L^\infty} = a(G, e_h) - \lambda d(e_h, Q) - \lambda d(G, \eta_h) + \lambda b(e_h, u, G) + \lambda b(u, e_h, G). \quad (4.9)$$

结合投影方程 (3.10) 可得

$$\|\nabla e_h\|_{L^\infty} = a(G_h, e_h) - \lambda d(e_h, Q_h) - \lambda d(G_h, \eta_h) + \lambda b(e_h, u, G) + \lambda b(u, e_h, G). \quad (4.10)$$

由方程 (2.13)、(2.17) 和引理 2.3 可得

$$a(e_h, v_h) - \lambda d(v_h, \eta_h) - \lambda d(e_h, q_h) + \lambda b(u_h, u_h, \Gamma_h v_h) - \lambda b(\bar{u}_h, \bar{u}_h, v_h) = (f, v_h - \Gamma_h v_h). \quad (4.11)$$

在 (4.11) 中取 $(v_h, q_h) = (G_h, Q_h)$ 代入到 (4.10) 可得

$$\begin{aligned} \|\nabla e_h\|_{L^\infty} &= a(G_h, e_h) - \lambda d(e_h, Q_h) - \lambda d(G_h, \eta_h) + \lambda b(e_h, u, G) + \lambda b(u, e_h, G) \\ &= \lambda b(e_h, u, G) + \lambda b(u, e_h, G) - \lambda b(u_h, u_h, \Gamma_h G_h) + \lambda b(\bar{u}_h, \bar{u}_h, G_h) + (f, G_h - \Gamma_h G_h) \\ &= \lambda b(e_h, u, G) + \lambda b(u, e_h, G) - \lambda b(u_h, u_h, \Gamma_h G_h - G_h) - \lambda b(e_h, e_h, G_h) \\ &\quad - \lambda b(\bar{u}_h, e_h, G_h) - \lambda b(e_h, \bar{u}_h, G_h) + (f, G_h - \Gamma_h G_h). \end{aligned} \quad (4.12)$$

对于三线性项的估计, 我们有

$$\begin{aligned} |\lambda b(e_h, u, G) + \lambda b(u, e_h, G)| &\leq C \|e_h\|_{L^2} \|Au\|_{L^2} \|\nabla G\|_{L^2}, \\ |\lambda b(e_h, e_h, G_h)| &\leq C \|\nabla e_h\|_{L^2} \|\nabla e_h\|_{L^2} \|\nabla G_h\|_{L^2}, \\ |\lambda b(\bar{u}_h, e_h, G_h) + \lambda b(e_h, \bar{u}_h, G_h)| &\leq C \|A_h \bar{u}_h\|_{L^2} \|e_h\|_{L^2} \|\nabla G_h\|_{L^2}, \end{aligned}$$

此外, 令 $\hat{\pi}_h$ 为平均插值算子, 满足

$$\hat{\pi}_h f|_K = \frac{1}{|K|} \int_K f dx,$$

且

$$\|f - \hat{\pi}_h f\|_{L^r(K)} \leq Ch_K \|f\|_{W^{1,r}(K)}, \quad 1 \leq r \leq \infty. \quad (4.13)$$

因此, 可得

$$|(f, v_h - \Gamma_h v_h)| = (f - \hat{\pi}_h f, v_h - \Gamma_h v_h) \leq Ch^{1+i} \|f\|_{H^i} \|\nabla v_h\|_{L^2}, \quad i = 0, 1. \quad (4.14)$$

对于 (4.12) 中第三项估计, 利用 (3.13) 和 (4.1) 可得

$$\begin{aligned} |b(u_h, u_h, G_h - \Gamma_h G_h)| &= \left| ((u_h - \hat{\pi}_h u_h) \cdot \nabla) u_h + \frac{1}{2} \operatorname{div} u_h (u_h - \hat{\pi}_h u_h), G_h - \Gamma_h G_h \right| \\ &\leq \left\{ \|\nabla u_h\|_{L^\infty} + \frac{1}{2} \|\nabla u_h\|_{L^\infty} \right\} \|u_h - \hat{\pi}_h u_h\|_{L^2} \|G_h - \Gamma_h G_h\|_{L^2} \\ &\leq Ch^2 \|A_h u_h\|_{L^2} \|\nabla u_h\|_{L^2} \|\nabla G_h\|_{L^2} (\|\nabla u\|_{L^\infty} + \|p\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^2}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

注意到文献 [7, 9] 的结果,

$$\|A_h u_h\|_{L^2} \leq C.$$

结合 (4.12)–(4.15) 之间的不等式可得

$$\|\nabla e_h\|_{L^2} \leq \kappa h (|u|_{W^{2,\infty}} + |p|_{W^{1,\infty}} + \|f\|_{H^1}). \quad (4.16)$$

由三角不等式和 (4.16), 有

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^\infty} \leq \|\nabla(u - \bar{u}_h)\|_{L^\infty} + \|\nabla e_h\|_{L^\infty} \leq \kappa h(|u|_{W^{2,\infty}} + |p|_{W^{1,\infty}} + \|f\|_{H^1}). \quad (4.17)$$

另一方面, 在 Green 函数 (3.23) 中取

$$(v, q) = (e_h, \eta_h) = (u_h - \bar{u}_h, p_h - \bar{p}_h),$$

可得

$$(\delta_M - B, \eta_h) = a(U, e_h) + \lambda d(e_h, V) - \lambda d(U, \eta_h) + \lambda b(e_h, u, U) + \lambda b(u, e_h, U). \quad (4.18)$$

在 (4.11) 中取

$$(v_h, q_h) = (U_h, V_h),$$

结合 (3.25), 可推出

$$\begin{aligned} \|\eta_h\|_{L^\infty} &= a(U_h, e_h) + \lambda d(e_h, V_h) - \lambda d(U_h, \eta_h) + \lambda b(e_h, u, U) + \lambda b(u, e_h, U) + (B, \eta_h) \\ &= \lambda b(e_h, u, U) + \lambda b(u, e_h, U) - \lambda b(u_h, u_h, \Gamma_h U_h) + \lambda b(\bar{u}_h, \bar{u}_h, U_h) + (f, U_h - \Gamma_h U_h) \\ &= \lambda b(e_h, u, U) + \lambda b(u, e_h, U) - \lambda b(u_h, u_h, \Gamma_h U_h - U_h) - \lambda b(e_h, e_h, U_h) \\ &\quad - \lambda b(\bar{u}_h, e_h, U_h) - \lambda b(e_h, \bar{u}_h, U_h) + (f, U_h - \Gamma_h U_h). \end{aligned} \quad (4.19)$$

对 (4.19), 利用与 (4.12) 相似的分析可得

$$\|\eta_h\|_{L^2} \leq \kappa h(|u|_{W^{2,\infty}} + |p|_{W^{1,\infty}} + \|f\|_{H^1}). \quad (4.20)$$

进一步可得

$$\|p - p_h\|_{L^\infty} \leq \|p - \bar{p}_h\|_{L^\infty} + \|\eta_h\|_{L^\infty} \leq \kappa h(|u|_{W^{2,\infty}} + |p|_{W^{1,\infty}} + \|f\|_{H^1}). \quad (4.21)$$

定理证毕. $\square$

注 4.6 本定理证明过程中以有限元方法非奇异解作为插值, 得到关于有限体积方法的优化误差结果. 在三维情形下, 我们发现 $\|\tilde{u}_h(\lambda) - \tilde{u}_h(\lambda)\|_\infty$ 的误差阶只能得到 $O(h)$. 远远低于 $\|\tilde{u}_h(\lambda) - \tilde{u}_h(\lambda)\|_\infty$ 的误差阶 $O(h^{3/2})$. 其主要原因是由于 $\|\nabla G\|_{L^2} + \|\nabla U\|_{L^2}$ 的阶只能达到 $O(h^{-1})$ 阶, 降低了三线性的估计阶, 但整个系统的 L^∞ 仍可以达到优化阶 $O(h)$. 若研究模型为线性 Stokes 模型时, $\|\tilde{u}_h(\lambda) - \tilde{u}_h(\lambda)\|_\infty$ 误差阶可到达超逼近收敛结果 $O(h^2)$.

5 总结

关于定常 Navier-Stokes 方程有限元/有限体积方法优化阶分析, 有限元方法结论较为完善. 由于有限体积框架下三线性项的复杂性且不再满足有限元方法下的反对称性、Petrov-Galerkin 方法的不对称性以及有限体积与有限元试验函数之间仅具有 $O(h)$ 阶的误差精度^[6,7,9,10,18,19], 使得非线性问题理论上存在很多难点. 特别地, 不提高真解正则性情形下, 关于速度 L^2 模、速度梯度和压力 L^∞ 模优化阶分析研究结果仍然很少. 截止目前, 我们在此问题上关于二维/三维定常 Navier-Stokes 方程低阶有限元/有限体积方法的一系列结果见表 1 和 2 (参见文献 [7,9,18]), 这里统一用 $\tilde{u}^h(\lambda)$ 表示相应有限元 (FEM) 或有限体积方法 (FVM) 非奇异解束.

表 1 二维定常 Navier-Stokes 方程低阶有限元/有限体积方法收敛阶比较

误差	$\ u - u^h\ _{L^2}$	$\ \tilde{u}(\lambda) - \tilde{u}^h(\lambda)\ $	$\ \tilde{u}(\lambda) - \tilde{u}^h(\lambda)\ _\infty$	$\ \tilde{u}_h(\lambda) - \tilde{\tilde{u}}_h(\lambda)\ $	$\ \tilde{u}_h(\lambda) - \tilde{\tilde{u}}_h(\lambda)\ _\infty$
FEM	$O(h^2)$	$O(h)$	$O(h)$	$O(\log h ^{1/2}h^2)$	$O(h)$
FVM	$O(h^2)$	$O(h)$	$O(h)$	$O(\log h ^{1/2}h^2)$	$O(h)$

表 2 三维定常 Navier-Stokes 方程低阶有限元/有限体积方法收敛阶比较

误差	$\ u - u^h\ _{L^2}$	$\ \tilde{u}(\lambda) - \tilde{u}^h(\lambda)\ $	$\ \tilde{u}(\lambda) - \tilde{u}^h(\lambda)\ _\infty$	$\ \tilde{u}_h(\lambda) - \tilde{\tilde{u}}_h(\lambda)\ $	$\ \tilde{u}_h(\lambda) - \tilde{\tilde{u}}_h(\lambda)\ _\infty$
FEM	$O(h^2)$	$O(h)$	$O(h)$	$O(h^{3/2})$	$O(h)$
FVM	$O(h^2)$	$O(h)$	$O(h)$	$O(h^{3/2})$	$O(h)$

致谢 感谢编辑和审稿人对本文提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Chou S W, Kwak D Y. A covolume method based on rotated bilinears for the generalized Stokes problem. SIAM J Numer Anal, 1998, 35: 494–507
- 2 Girault V, Raviart P A. Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms. Heidelberg: Springer-Verlag, 1986
- 3 Temam R. Navier-Stokes Equations. Amsterdam/New York: North-Holland, 1984
- 4 Heywood J G, Rannacher R. Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem, I: Regularity of solutions and second-order error estimates for spatial discretization. SIAM J Numer Anal, 1982, 19: 275–311
- 5 Ye X. On the relationship between finite volume and finite element methods applied to the Stokes equations. Numer Methods Partial Differential Equations, 2001, 5: 440–453
- 6 Li J, Chen Z X. A new stabilized finite volume method for the stationary Stokes equations. Adv Comput Math, 2009, 30: 141–152
- 7 Li J, Chen Z X, He Y N. A stabilized multi-level method for non-singular finite volume solutions of the stationary 3D Navier-Stokes equations. Numer Math, 2012, 122: 279–304
- 8 Li J, Zhao X, Wu J H. Study of stabilization of the lower order finite volume methods for the incompressible flows. Acta Math Sin, 2013, 56: 15–26
- 9 Li J, Shen L H, Chen Z X. Convergence and stability of a stabilized finite volume method for the stationary Navier-Stokes equations. BIT Numer Math, 2010, 50: 823–842
- 10 Li J, Chen Z X. On the semi-discrete stabilized finite volume method for the transient Navier-Stokes equations. Adv Comput Math, 2013, 38: 281–320
- 11 Brenner S, Scott L R. The Mathematical Theory of Finite Elements. New York: Springer-Verlag, 1991
- 12 Ciarlet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problems. Amsterdam: North-Holland, 1978
- 13 Chou S H, Li Q. Error estimates in L^2 , H^1 and L^∞ in co-volume methods for elliptic and parabolic problems: A unified approach. Math Comp, 2000, 69: 103–120
- 14 Rannacher R, Scott R. Some optimal error estimates for piecewise linear finite element approximations. Math Comp, 1982, 38: 437–445
- 15 Duran R, Nohetto R, Wang J. Sharp maximum norm error estimates for finite element approximations of the Stokes problem in 2-D. Math Comp, 1988, 15: 491–506
- 16 Girault V, Nohetto R H, Scott R. Maximum-norm stability of the finite element Stokes projection. J Math Pures Appl, 2005, 84: 279–330
- 17 Li J, Zhao X, Chen Z X. A novel L^∞ analysis for finite volume approximations of the Stokes problem. J Comput Appl Math, 2015, 279: 97–105
- 18 Li J, Chen Z X. Optimal L^2 , H^1 and L^∞ analysis of finite volume methods for the stationary Navier-Stokes equations with large data. Numer Math, 2014, 126: 75–101

- 19 Li Y H, Zhu P Q. Generalized difference methods for second order elliptic partial differential equations (I) — triangle grids. *Numer Math J Chinese Univ*, 1982, 2: 140–152
- 20 Brezzi F, Rappaz J, Raviart P A. Finite element approximation of nonlinear problems, I: Branch of nonsingular solutions. *Numer Math*, 1980, 36: 1–25
- 21 He Y N, Li J. A stabilized finite element method based on local polynomial pressure projection for the stationary Navier-Stokes equation. *Appl Numer Math*, 2008, 58: 1503–1514
- 22 Li R H, Chen Z Y, Wu W. The Generalized Difference Method for Differential Equations-Numerical Analysis of Finite Volume Methods. New York: Marcel Dekker, 2000
- 23 Adams R A. Sobolev Spaces. New York: Academic Press, 1975
- 24 Chen Z X. Finite Element Methods and Their Applications. Heidelberg: Springer-Verlag, 2005
- 25 Silvester D J. Stabilised mixed finite element methods. Numerical Analysis Report No. 262. Manchester: Manchester University, 1995
- 26 Stenberg R. Analysis of mixed finite element methods for the Stokes problem: A unified approach. *Math Comp*, 1984, 42: 9–23
- 27 Li J. An equivalent definition of the non-singular finite element/finite volume solutions of the stationary Navier-Stokes equations and its application in coupled problem. Submitted

Optimal L^∞ analysis of non-singular finite element methods/ finite volume methods for the stationary 3D Navier-Stokes equations

LI Jian & CHEN ZhangXing

Abstract In this paper, we develop and analyze the L^∞ stability and convergence analysis for non-singular finite element and finite volume solutions for the stationary 3D Navier-Stokes equations. We obtain optimal estimates for the gradient of velocity and the pressure in the L^∞ -norm by applying the stabilization of a macro-element and technical lemmas including weighted L^2 -norm estimates for the regularized Green's functions associated with the Stokes problem. Moreover, using the finite element solutions as interpolations, the relationship between the finite element method and the finite volume method is used to obtain the interesting super-close convergence rate with $O(h^{3/2})$ in the L^2 -norm and the optimal rate with $O(h)$ in the L^∞ -norm between the finite element method and the finite volume method for the velocity gradient and the pressure. Furthermore, optimal error estimates in the L^∞ -norm are derived for the first time for the velocity gradient and pressure without a logarithmic factor $O(|\log h|)$ for the stationary 3D Navier-Stokes equations.

Keywords Navier-Stokes equations, nonsingular solutions, finite element method, finite volume methods, optimal estimates

MSC(2010) 35L70, 65N30, 76D06

doi: 10.1360/N012014-00150