平面图 4- 可选的一个局部条件

黄丹君, 吕静*, 王维凡

浙江师范大学数学与计算机科学学院, 金华 321004

E-mail: hdanjun@zjnu.cn, 771825798@qq.com, ww@zjnu.cn

收稿日期: 2018-07-31; 接受日期: 2018-12-28; 网络出版日期: 2019-06-14; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11771402) 和浙江省自然科学基金 (批准号: LY18A010014) 资助项目

摘要 给定图 G 的一个 k - 色列表 L , 若存在 G 的一个正常染色 c 且满足 $c(v) \in L(v)$, 则称 G 是 L - 列表可染的. 若对任意 k - 色列表 L , G 都是 L - 列表可染的, 则称 G 是 k - 可选的. 本文给出平面图 4- 可选的一个局部条件, 即若平面图 G 的每个点不同时与 3-、4-、5- 和 6- 圈相关联, 则 G 是 4- 可选的.

关键词 平面图 选择性 圈

MSC (2010) 主题分类 05C15

1 引言

本文考虑的图均为简单有限的无向图. 文中未加说明的定义和概念参见文献 [1].

若存在一个映射 $c: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, 满足对 $\forall xy \in E(G)$, 都有 $c(x) \neq c(y)$, 则称 c 是 G 的正常顶点染色, 也称图 G 是 k - 可染的. 图 G 的一个 k - 色列表 L 是一个颜色集簇, 它给 G 的每个顶点 v 一个色集 $L(v)$, 并且 $|L(v)| \geq k$. 给定图 G 的一个 k - 色列表 L , 如果存在一个正常顶点染色 c , 满足 $c(v) \in L(v)$, 则称 c 为 G 的 L - 列表染色且称 G 是 L - 列表可染的. 若对任意的 k - 色列表 L , G 都是 L - 列表可染的, 则称 G 是 k - 可选的.

如果可以把图 G 画在平面上, 使得它的边仅在顶点处相交, 则称 G 为可平面图. 可平面图在平面内的嵌入称作平面图. 对一个已经嵌在平面内的图 G , 我们用 $V(G)$ 、 $E(G)$ 和 $F(G)$ 分别表示 G 的顶点集、边集和面集. $N_G(v)$ 表示 G 中与 v 相邻的顶点组成的集合, 且 $d_G(v) = |N_G(v)|$ 为点 v 的度. 图 G 中与面 f 相关联的边数称为面 f 的度 (每条割边计算两次), 记为 $d_G(f)$. 设 $v \in V(G)$. 如果 $d_G(v) = k$ 、 $d_G(v) \geq k$ 或 $d_G(v) \leq k$, 就称 v 为 k -、 k^+ - 或 k^- - 点. 同样可以定义 k -、 k^+ - 或 k^- - 面. 称 $\delta(G) = \min\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$ 为 G 的最小度. 在图 G 中, 与面 f 关联的 k - 点个数记为 $n_k^G(f)$, 与点 v 关联的 k - 面个数记为 $f_k^G(v)$. 类似地, 我们可以定义 $n_{k^+}^G(f)$ 和 $n_{k^-}^G(f)$. 两个圈或面相邻是指它们至少有一条公共边. 两个圈或面正常相邻是指它们恰好只有一条公共边. 与面 f 相邻的 3- 面个数记

英文引用格式: Huang D J, Lyu J, Wang W F. A local condition for planar graphs to be 4-choosable (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1273–1288, doi: 10.1360/N012018-00188

为 $t_G(f)$. 一个 $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ - 丛是指与 v 相关联的连续面 $f_1, f_2, \dots, f_k$ 满足 $d_G(f_i) = d_i, 1 \leq i \leq k$. 类似地, 可以定义 $(d_1, d_2, \dots, d_k^-)$ - 丛.

列表染色的概念由 Vizing^[2] 和 Erdős 等^[3] 分别独立提出. Thomassen^[4] 证明了任意平面图 G 都是 5- 可选的. 由此引入了一个问题: 是否任何一个平面图都是 4- 可选的? Voigt^[5] 和 Mirzakhani^[6] 分别找到了一个非 4- 可选的平面图. 随后, Gutner^[7] 证明了判断一个平面图是否是 4- 可选是 NP- 困难的. 众所周知, 每个不含 3- 圈的平面图 G 是 3- 退化的, 从而是 4- 可选的. 现已证明了不含 4- 圈^[8]、5- 圈^[9]、6- 圈^[10] 和 7- 圈^[11] 的平面图是 4- 可选的. Wang 和 Lih^[12] 证明了不含相交 3- 圈的平面图是 4- 可选的. Borodin 和 Ivanova^[13] 证明了 4- 圈不与 3- 圈相邻的平面图是 4- 可选的. Xu 和 Wu^[14] 证明了 5- 圈不同时相邻 3- 圈和 4- 圈的平面图是 4- 可选的. Hu 和 Wu^[15] 证明了不含相交 5- 圈的平面图是 4- 可选的. 本文推广了文献 [8-10, 13] 中的结果, 证明了以下定理:

定理 1.1 若平面图 G 的每一个顶点都不同时与 3-、4-、5- 和 6- 圈相关联, 则 G 是 4- 可选的.

2 主要结果与证明

我们用反证法来证明定理 1.1. 设 G 是不满足定理 1.1 且顶点个数尽可能少的一个平面图, 即 G 的每一个顶点都不同时与 3-、4-、5- 和 6- 圈相关联, 但 G 不是 4- 可选的. 显然, G 是连通图. G 具有以下性质:

(P1) $\delta(G) \geq 4$ (参见文献 [8]).

(P2) G 不含导出偶圈且偶圈上的点的度都为 4.

证明 假设 G 含一个导出偶圈 $C = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$, 且 $d_G(v_i) = 4, i = 1, 2, \dots, n$. 任给 G 的一个 4- 色列表 L , 由 G 的极小性知, $G - C$ 有一个 L - 列表染色 c . 令 C 的 L' - 列表如下: $\forall u \in V(C), L'(u) = L(u) \setminus \{c(u') \mid u'u \in E(G) \text{ 且 } u' \in V(G) \setminus V(C)\}$. 显然, $\forall u \in V(C)$, 有 $|L'(u)| \geq 2$. 因为任意偶圈都是 2- 可选的, 从而, C 是 L' - 列表可染的. 故 G 是 L - 列表可染的, 矛盾. $\square$

设 $C = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$ 是 G 的一个圈. 称边 $v_i v_j \in E(G) \setminus E(C)$ 为圈 C 的弦, 其中 $1 \leq i, j \leq n$. 由两个 3- 点 u 和 v 及连接 u 和 v 的 3 条内不交的路组成的图称为 θ - 图. 显然, 只有一条弦的圈是一个特殊的 θ - 图. θ - 子图是指 G 的一个同构于 θ - 图的导出子图. 我们用 $S\theta$ 来表示 G 的一个特殊的 θ - 子图 H , 满足 H 是只有一条弦 uv 的圈, 其中 $d_G(u) \leq 5$ 且 $d_G(v') = 4 (\forall v' \in V(H) - \{u\})$.

(P3) G 不含 $S\theta$ (参见文献 [16]).

(P4) G 不含 4- 面 $f = [v_1 v_2 v_3 v_4]$, 使得 $d_G(v_i) = 4, i = 1, 2, 3, 4$.

证明 设 G 含一个 4- 面 $f = [v_1 v_2 v_3 v_4]$, 使得 $d_G(v_i) = 4, i = 1, 2, 3, 4$. 由 (P2) 和 (P3) 得 f 至少存在两条弦 $v_1 v_3$ 和 $v_2 v_4$, 这与 G 的平面性矛盾. $\square$

由 G 的每个点都不同时与 3-、4-、5- 和 6- 圈相关联易知性质 (P5) 及引理 2.1 成立.

(P5) 3- 面相邻的所有情形如图 1 所示. 在图 1 及后面的图 2 和 3 中, 实方块点表示所对应的两点重合, 如 C_4 中只有 5 个点; 黑点表示与该点相邻的所有边都表示出来了.

引理 2.1 G 满足下列论述.

- (1) C_2 至多只能与一个 4- 面相邻, 且 C_2 与 4- 面相邻只有一种情形, 见图 2(a).
- (2) C_2 至多只能与一个 5- 面相邻, 且 C_2 与 5- 面相邻只有一种情形, 见图 2(b).
- (3) C_3 至多只能与一个 4- 面相邻, 且 C_3 与 4- 面相邻只有一种情形, 见图 2(c).
- (4) C_3 至多只能与一个 5- 面相邻, 且 C_3 与 5- 面相邻只有一种情形, 见图 2(d).

图 1 (P5) 中所用的构型

图 2 引理 2.1 中所用的构型

图 3 (P6) 所用的构型. 在 G_2 中, $v_1v_3 \notin E(G)$ 且 $v_2v_4 \notin E(G)$

(5) C_4 和 C_5 不与 k -面相邻, $k \in \{3, 4, 5\}$.

引理 2.2 (1) G 不含 $(3, 4, 3)$ -、 $(4, 3, 5)$ -、 $(3, 3, 3, 5)$ -、 $(3, 3, 4, 5^-)$ -、 $(3, 3, 5, 5^-)$ -、 $(3, 4, 4, 5^-)$ - 和 $(5, 3, 3, 5^-)$ - 丛.

(2) 如果 G 含 $(3, 5, 3)$ - 丛或 $(5, 3, 5)$ - 丛, 则它们只能正常相邻.

(3) $(3, 5)$ - 丛若正常相邻, 则它们只能构成一个 θ -子图.

证明 (1) 我们仅证明 G 不含 $(4, 3, 5)$ - 丛和 $(3, 3, 3, 5)$ - 丛, 其余结构参见文献 [17]. 先证 G 不含 $(3, 3, 3, 5)$ - 丛. 假设 G 含 $(3, 3, 3, 5)$ - 丛, 即 $f_1 = [v_1vv_2]$, $f_2 = [v_2vv_3]$, $f_3 = [v_3vv_4]$. 显然, G 中存在与 v 相关联的 3-圈 $v_1vv_2v_1$ 、4-圈 $v_1vv_3v_2v_1$ 和 5-圈 $v_1vv_4v_3v_2v_1$. 故 f_4 与 f_3 不能正常相邻, 即 $f_4 = [v_4vv_5v_3u]$ 且 $u \notin \{v_1, v_2\}$, 则 G 中存在与 v 相关联的 6-圈 $v_1vv_4uv_3v_2v_1$, 矛盾. 再证 G 不含 $(4, 3, 5)$ - 丛. 假设 G 含 $(4, 3, 5)$ - 丛, 即 $f_1 = [v_1vv_2x]$, $f_2 = [v_2vv_3]$. 显然, G 中存在与 v 相关联的 3-圈 vv_2v_3v 、4-圈 vv_1xv_2v 和 5-圈 $vv_1xv_2v_3v$. 故 f_3 与 f_2 不能正常相邻, 即 $f_3 = [v_3vv_4v_2u]$ 且 $u \notin \{v_1, x\}$, 则 G 中存在与 v 相关联的 6-圈 $v_1vv_3uv_2xv_1$, 矛盾.

(2) 假设 G 含非正常相邻的 $(3, 5, 3)$ - 丛, 即 $f_1 = [v_1vv_2]$, $f_3 = [v_3vv_4]$, $f_2 = [v_2u_1u_2v_3v]$. 根据对称

性及 $\delta(G) \geq 4$ 得 $u_2 = v_1$ 或 $u_1 = v_4$, 不妨设 $u_2 = v_1$, 则 G 中存在与 v 相关联的 3- 圈 $v_1vv_2v_1$ 、4- 圈 $v_1vv_2u_1v_1$ 、5- 圈 $vv_3v_1u_1v_2v$ 和 6- 圈 $vv_4v_3v_1u_1v_2v$, 矛盾. 类似地, 我们可以证明, 若 G 含 $(5, 3, 5)$ - 丛, 则它们只能正常相邻.

(3) 假设 G 含正常相邻的 $(3, 5)$ - 丛, 即 $f_1 = [v_1vv_2]$, $f_2 = [v_2u_1u_2v_3v]$. 若它不是一个 θ - 子图, 说明圈 $v_1v_2u_1u_2v_3vv_1$ 除弦 vv_2 外, 至少还有一条弦 e . 注意到此时 G 中存在与 v 相关联的 3- 圈 $v_1vv_2v_1$ 、5- 圈 $v_2vv_3u_2u_1v_2$ 和 6- 圈 $v_1vv_3u_2u_1v_2v_1$. 如果 e 是圈 $vv_2u_1u_2v_3v$ 的弦, 则显然会存在一个 4- 圈与点 v 关联, 矛盾. 因此, 由对称性, 可设 e 为 v_1u_1 或 v_1u_2 , 则分别得到与点 v 关联的 4- 圈 $v_1vv_2u_1v_1$ 或 $v_1vv_3u_2v_1$, 矛盾. $\square$

(P6) G 不含 G_i ($i = 1, 2$) 作为子图, 如图 3 所示.

证明 用反证法. 假设 G 含 G_i ($i = 1, 2$) 作为子图. 任给 G 的一个 4- 色列表 L , 由 G 的极小性知, $G - G_i$ 有一个 L - 列表染色 c_i . 令 G_i 的 L' - 列表如下: $\forall u \in V(G_i)$, $L'(u) = L(u) \setminus \{c_i(u') \mid u'u \in E(G) \text{ 且 } u' \in V(G) \setminus V(G_i)\}$. 下面将 c_i 延拓到图 G 上, 即证 G_i 是 L' - 列表可染的. 从而, G 是 L - 列表可染的, 即 G 是 4- 可选的, 矛盾.

情形 1 G 含 G_1 作为子图.

由引理 2.2(2) 知, f_2 、 f_3 和 f_4 正常相邻. 故 G 中存在与 v 相关联的 3- 圈 vv_2v_3v 、5- 圈 $vv_3u_1u_2v_4v$ 和 6- 圈 $vv_2v_3u_1u_2v_4v$. 从而, G 中不存在与 v 相关联的 4- 圈. 易见 $u_i \notin \{v_1, v_6\}$, $w_i \notin \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ ($i = 1, 2$). 若 w_1 与 u_1 或 u_2 重合, 则 G 中存在与 v 关联的 4- 圈 $v_5vv_3u_1v_5$ 或 $v_5vv_4u_2v_5$, 矛盾. 若 w_2 与 u_1 或 u_2 重合, 则 G 中存在与 v 关联的 4- 圈 $v_6vv_3u_1v_6$ 或 $v_6vv_4u_2v_6$, 矛盾.

• 若 G_1 是 G 的导出子图, 则 $|L'(v_i)| \geq 2$, $|L'(u_i)| \geq 2$, $|L'(w_i)| \geq 2$, $|L'(v_j)| \geq 3$, 且 $|L'(v)| \geq 4$, 其中 $i = 1, 2$, $j = 3, 4, 5, 6$. 若存在颜色 $a \in L'(v) \setminus L'(v_3)$, 则先用 a 染点 v , 再依次染 v_2 、 v_1 、 v_6 、 w_2 、 w_1 、 v_5 、 v_4 、 u_2 、 u_1 和 v_3 . 否则, $|L'(v_3)| = |L'(v)| \geq 4$, 则依次染 v 、 v_2 、 v_1 、 v_6 、 w_2 、 w_1 、 v_5 、 v_4 、 u_2 、 u_1 和 v_3 即可.

• 设 G_1 不是 G 的导出子图. 令 $E' = \{uw \in E(G) \setminus E(G_1) \mid u, w \in V(G_1)\}$, 则 $E' \neq \emptyset$. 由前面讨论知, G 中不存在与 v 相关联的 4- 圈. 故 u 或 $w \notin \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$, 且 $w_1u_2 \notin E(G)$. 从而, $1 \leq |E'| \leq 3$.

设 $|E'| = 1$. 由对称性, 不妨设 $E' = \{w_2u_2\}$ 或 $E' = \{w_2u_1\}$. 若 $E' = \{w_2u_1\}$, 则 G 中存在一个导出 6- 圈 $w_2w_1v_5v_4u_2u_1w_2$, 且圈上每个点都为 4- 点, 与 (P2) 矛盾. 若 $E' = \{w_2u_2\}$, 则有 $|L'(v_i)| \geq 2$, $|L'(u_1)| \geq 2$, $|L'(w_1)| \geq 2$, $|L'(v_j)| \geq 3$, $|L'(w_2)| \geq 3$, $|L'(u_2)| \geq 3$, 且 $|L'(v)| \geq 4$, 其中 $i = 1, 2$, $j = 3, 4, 5, 6$. 若存在颜色 $a \in L'(v) \setminus L'(v_3)$, 则先用 a 染点 v , 再依次染 v_2 、 v_1 、 v_6 、 w_2 、 w_1 、 v_5 、 v_4 、 u_2 、 u_1 和 v_3 . 否则, $|L'(v_3)| = |L'(v)| \geq 4$, 则依次染 v 、 v_2 、 v_1 、 v_6 、 w_2 、 w_1 、 v_5 、 v_4 、 u_2 、 u_1 和 v_3 即可.

设 $|E'| \geq 2$. 如果 $w_2u_2 \in E'$, 那么 $w_1u_1 \notin E'$, 否则与 G 的平面性相矛盾. 故 $|E'| \leq 2$. 从而, $E' = \{w_2u_1, w_2u_2\}$ 或 $E' = \{w_2u_1, w_1u_1\}$, 则易见 G 中含有 $S\theta$ 图: 带弦 w_2u_2 的 6- 圈 $w_2w_1v_5v_4u_2u_1w_2$ 或带弦 w_1u_1 的 6- 圈 $w_2w_1v_5v_4u_2u_1w_2$, 与 (P3) 矛盾.

情形 2 G 含 G_2 作为子图.

设 G 含 G_2 作为子图, 则 $|L'(v_j)| \geq 3$, $|L'(v)| \geq 4$, $|L'(v_i)| \geq 2$, $i = 2, 3$, $j = 1, 4$. 先设 $|L'(v_2)| \geq 3$. 若 $\exists \alpha \in L(v) \setminus L'(v_2)$, 则先用 α 染 v , 再依次染 v_3 、 v_4 、 v_1 和 v_2 . 否则, $|L'(v_2)| = |L'(v)| \geq 4$, 则依次染 v 、 v_3 、 v_4 、 v_1 和 v_2 即可. 下设 $|L'(v_2)| = 2$. 由对称性, 可设 $|L'(v_3)| = 2$. 若 $L'(v_2) \neq L'(v_3)$, 则用 $\alpha \in L'(v_2) \setminus L'(v_3)$ 染 v_2 , 用 $\beta \in L'(v) \setminus (L'(v_3) \cup \{\alpha\})$ 染 v , 再依次染 v_1 、 v_4 和 v_3 . 故 $L'(v_2) = L'(v_3) = \{a, b\}$. 先用 a 染 v_2 , b 染 v_3 , $c \in L'(v) \setminus \{a, b\}$ 染 v , $d \in L'(v_4) \setminus \{c, b\}$ 染 v_4 . 若 $L'(v_1) \neq \{d, c, a\}$, 则用 $L'(v_1) \setminus \{d, c, a\}$ 中的颜色染 v_1 . 否则, $L'(v_1) = \{a, c, d\}$, 则分别用 a 、 b 、 a 和 c

染 v_1, v_2, v_3 和 v , 用 $d' \in L'(v_4) \setminus \{c, a\}$ 染 v_4 . $\square$

接下来构造图 H : 如果 G 是一个 2-连通图, 则令 $H = G$; 如果 G 有割点, 则令 H 为 G 的一个终端块 B . 显然, H 是 2-连通图. 若 G 是 2-连通图, 令 $V_0(H) = V(G)$; 否则, 令 $V_0(H) = V(B) \setminus \{v_0\}$, 其中 B 是 G 的终端块且 $v_0 \in V(B)$ 是 G 的割点. 显然, 若 $v \in V_0(H)$, 则 $d_H(v) = d_G(v)$. 令 $v_0 \in V(H) \setminus V_0(H)$, 称与 v_0 相关联的面为外面, 不与 v_0 相关联的面为内面. 从性质 (P2)–(P6) 及引理 2.1 和 2.2 的证明过程可见, 若涉及的面或圈不与 $v_0 \in V(H) \setminus V_0(H)$ 相关联, 则它们在 H 中仍成立. 我们对图 H 用权转移方法: 定义 $v \in V(H)$ 的初始权函数为 $w(v) = 2d_H(v) - 6$, $f \in F(H)$ 的初始权函数为 $w(f) = d_H(f) - 6$. 应用 Euler 公式 $|V(H)| - |E(H)| + |F(H)| = 2$ 、握手引理 $\sum_{v \in V(H)} d_H(v) = 2|E(H)|$ 和 $\sum_{f \in F(H)} d_H(f) = 2|E(H)|$ 可得

$$\sum_{v \in V(H)} (2d_H(v) - 6) + \sum_{f \in F(H)} (d_H(f) - 6) = -6(|V(H)| - |E(H)| + |F(H)|) = -12.$$

接下来定义一些权转移规则. 令 $x \in V(H) \cup F(H)$, 记 $w'(x)$ 为元素 x 经权转移之后的最终权. 我们将证明 $\sum_{v \in V(H)} w'(v) \geq -10$ 和 $\sum_{f \in F(H)} w'(f) \geq 0$. 这样, 我们就可以得到一个显然的矛盾:

$$-10 \leq \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} w'(x) = \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} w(x) = -12.$$

这就说明了图 H 是不存在的, 从而这样的极小反例图 G 也是不存在的, 即定理得证.

设 v 是 H 中的 k -点. 令 $v_1, v_2, \dots, v_k$ 是 v 在 H 中的邻点且在平面上按顺时针方向排列, f_i 是与 v 相关联且以 vv_i 和 vv_{i+1} 为边界的面, 其中 $v_{k+1} = v_1$. 若 $d_H(f_i) = 3$, 即 $v_i v_{i+1} \in E(H)$, 则记 $f_{v_i v_{i+1}}$ 为与 $v_i v_{i+1}$ 相关联且不同于 f_i 的面. 若 f_i 只与 $V_0(H)$ 中的 4-点相关联, 则称面 f_i 是轻面. 若 $d_H(v) = 5$, f_1, f_2 和 f_4 为 3-面, $N_H(v) \subseteq V_0(H)$ 且 $d_H(v_2) = 4$, 则称 v 为特殊 5-点且称 v 是其度为 4 的邻点的汇点. 若 $d_H(v) = 6$, f_1, f_2, f_4 和 f_5 为 3-面, $N_H(v) \subseteq V_0(H)$ 且 $d_H(v_i) = 4$, $i = 1, 2, 3, 5$, 则称 v 为特殊 6-点, 且称 v 是 v_1, v_2 和 v_3 的汇点.

对任意的 $x, y \in V(H) \cup F(H)$, 令 $\tau(x \rightarrow y)$ 是从 x 向 y 转的权. 定义权规则如下:

(R0) 设 $v \in V(H) \setminus V_0(H)$. 若 $d_H(v) \leq 4$, 则 $\tau(v \rightarrow v_i) = 1$, $\tau(v \rightarrow f_i) = 2$; 若 $d_H(v) \geq 5$, 则 $\tau(v \rightarrow f_i) = 2$.

(R1) 设 $v \in V_0(H)$, $d_H(v) = 4$.

(R1.1) 若 f_i 是外 3-面, 则 $\tau(v \rightarrow f_i) = \frac{1}{2}$.

(R1.2) 若 f_i 是轻 k -面, $k = 3, 5$, 则 $\tau(v \rightarrow f_i) = \frac{6-k}{k}$.

(R1.3) 若 f_i 是内 4-面, 则 $\tau(v \rightarrow f_i) = \frac{2}{5}$.

(R1.4) 设 f_i 是内 3-面且 f_i 不是轻面.

(R1.4.1) 若 $f_3(v) = 1$, 则 $\tau(v \rightarrow f_i) = 1$.

(R1.4.2) 若 $f_3(v) = 2$, 则 $\tau(v \rightarrow f_i) = \frac{4}{5}$.

(R1.4.3) 若 $f_3(v) = 3$, 则 $\tau(v \rightarrow f_i) = \frac{2}{3}$.

(R1.4.4) 若 $f_3(v) = 4$, 则 $\tau(v \rightarrow f_i) = \frac{1}{2}$.

(R1.5) 设 f_i 是内 5-面且 f_i 不是轻面.

(R1.5.1) 若 $d(f_{i-1}) = d(f_{i+1}) = 3$ 且 v_i 和 v_{i+1} 都是 4-点, 则 $\tau(v \rightarrow f_i) = 0$.

(R1.5.2) 若 $d(f_{i-1}) = d(f_{i+1}) = 3$ 且 v_i 和 v_{i+1} 中恰有一个是 4-点, 则 $\tau(v \rightarrow f_i) = \frac{1}{10}$.

(R1.5.3) 其他, 则 $\tau(v \rightarrow f_i) = \frac{1}{5}$.

(R2) 设 f 是一个 7^+ - 面 $[v_1v_2 \cdots v_i]$, $i \geq 7$. 若 f 相邻 3- 面 $[v_1v_2u]$, 则

$$\tau(f \rightarrow u) = \frac{d_H(f) - 6}{t_H(f)}.$$

设 $\alpha(f)$ 和 $\beta(v)$ 分别表示经过 (R0) 和 (R2) 后, 5^- - 面 f 所得的权, 及 4- 点 v 剩余的权.

(R3) 设 $v \in V_0(H)$ 且 $d_H(v) \geq 5$. 令 f 是与 v 相关联的 5^- - 面, 则

$$\tau(v \rightarrow f) = \max \left\{ \frac{6 - d_H(f) - \alpha(f)}{n_{5^+}^H(f)}, 0 \right\}.$$

(R4) 设 $w \in V_0(H)$ 且 w 是特殊点. 令 $v \in V_0(H)$ 是与 w 相邻的 4- 点, 则 $\tau(v \rightarrow w) = \frac{\beta(v)}{n_s^H(v)}$, 其中 $n_s^H(v)$ 是指 H 中与 v 相邻的汇点的个数.

由权转移规则显然可得到以下引理:

引理 2.3 设 $f = [v_1v_2v_3]$ 是 H 的 3- 面, $d_H(v_1) \geq 5$ 且 $v_1 \in V_0(H)$.

(1) 若 f 是外面, 则 $\tau(v_1 \rightarrow f) \leq \frac{1}{2}$.

(2) 若 f 是内面且 $d_H(v_i) \geq 5$ ($i = 2, 3$), 则 $\tau(v_1 \rightarrow f) \leq 1$.

(3) 若 f 是内面且 $d_H(v_3) = 4$, $d_H(v_2) \geq 5$, 则 $\tau(v_1 \rightarrow f) \leq \frac{5}{4}$.

(4) 设 f 是内面且 $d_H(v_i) = 4$ ($i = 2, 3$).

(4.1) 若 v_2 关联 4 个 3- 面, 则 v_3 至多关联两个 3- 面. 故 $\tau(v_1 \rightarrow f) \leq \frac{17}{10}$.

(4.2) 若 v_2 和 v_3 都关联 3 个 3- 面, 则 $\tau(v_1 \rightarrow f) \leq \frac{5}{3}$.

(4.3) 若 v_2 关联 3 个 3- 面, v_3 关联两个 3- 面, 则 $\tau(v_1 \rightarrow f) \leq \frac{23}{15}$.

(4.4) 若 v_2 和 v_3 至多关联两个 3- 面, 则 $\tau(v_1 \rightarrow f) \leq \frac{7}{5}$.

引理 2.4 设 $v \in V_0(H)$, 且 $d_H(v) \geq 5$, f 是与 v 关联的 4- 面.

(1) 若 f 是外面, 则 $\tau(v \rightarrow f) = 0$.

(2) 若 f 是内面, 则 $\tau(v \rightarrow f) \leq \frac{2 - \frac{2}{5}n_4^H(f)}{4 - n_4^H(f)} \leq \frac{4}{5}$.

引理 2.5 设 $v \in V_0(H)$, 且 $d_H(v) \geq 5$, f 是与 v 关联的 5- 面.

(1) 若 f 是外面, 则 $\tau(v \rightarrow f) = 0$.

(2) 若 f 是内面且 f 至少与两个 5^+ - 点关联, 则 $\tau(v \rightarrow f) \leq \frac{2}{5}$.

(3) 设 f 是内面且 f 只与一个 5^+ - 点关联,

(3.1) 若 f 至少与两个 4^+ - 面相邻, 则 $\tau(v \rightarrow f) \leq \frac{3}{5}$.

(3.2) 若 f 只与一个 4^+ - 面相邻, 则 $\tau(v \rightarrow f) \leq \frac{7}{10}$.

(3.3) 若 f 不与 4^+ - 面相邻, 则 $\tau(v \rightarrow f) \leq \frac{4}{5}$.

引理 2.6 设 $v \in V_0(H)$, $d_H(v) \geq 5$, 且 v 与 3 个连续的 3- 面 f_1 、 f_2 和 f_3 相关联, 则

$$\sum_{i=1}^3 \tau(v \rightarrow f_i) \leq \frac{21}{5}.$$

证明 令 $f_1 = [v_1vv_2]$, $f_2 = [v_2vv_3]$, $f_3 = [v_3vv_4]$. 若 $\exists i \in \{1, 2, 3\}$, 使得 f_i 为外面, 则由引理 2.3(1) 知, $\tau(v \rightarrow f_i) \leq \frac{1}{2}$. 故由引理 2.3, 有 $\sum_{i=1}^3 \tau(v \rightarrow f_i) \leq \frac{1}{2} + \frac{17}{10} \times 2 = \frac{39}{10}$. 下设 $v_i \in V_0(H)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), 则 $d_H(f_4) \neq 3$ 且 $d_H(f_{v_2v_3}) \neq 3$. 如果 v_2 和 v_3 中至少有一个为 5^+ - 点, 那么由引理 2.3 得 $\sum_{i=1}^3 \tau(v \rightarrow f_i) \leq \frac{5}{4} \times 2 + \frac{17}{10} = \frac{21}{5}$. 下设 $d_H(v_2) = d_H(v_3) = 4$. 若 v_1 和 v_4 全为 5^+ - 点, 则由引理 2.3 知,

$$\sum_{i=1}^3 \tau(v \rightarrow f_i) \leq \frac{5}{4} \times 2 + \frac{17}{10} = \frac{21}{5}.$$

若 v_1 和 v_4 中只有一个为 5^+ 点, 不妨设 $d_H(v_1) \geq 5$, $d_H(v_4) = 4$. 此时可以证明 v_2 和 v_4 至多只能与两个 3- 面关联. 事实上, 假设 v_2 至少与 3 个 3- 面关联. 由于 $d_H(f_{v_2v_3}) \neq 3$, 所以, 与 v_2 关联的第 3 个 3- 面必为 $[v_1v_2u]$. 从而, 由 (P5) 知, $u = v_4$. 但此时 v_3 是 H 的割点, 与 H 是 2- 连通图矛盾. 假设 v_4 至少与 3 个 3- 面关联. 由 (P5) 知, 与 v_4 关联的另两个 3- 面为 $[v_4v_3v_1]$ 和 $[v_4v_1u]$, 且 $u \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, 与引理 2.1(5) 矛盾. 故 v_2 和 v_4 至多只能与两个 3- 面相邻. 由 $d_H(f_{v_2v_3}) \neq 3$ 知, v_3 至多与 3 个 3- 面关联. 因此, 由引理 2.3 及 (R1) 和 (R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq \frac{3-\frac{4}{5}}{2} = \frac{11}{10}$ 且 $\sum_{i=1}^3 \tau(v \rightarrow f_i) \leq \frac{23}{15} \times 2 + \frac{11}{10} < \frac{21}{5}$. 若 $d_H(v_1) = d_H(v_4) = 4$, 则类似上面讨论可得 v_1, v_2, v_3 和 v_4 至多只能与两个 3- 面关联, 故由引理 2.3 知, $\sum_{i=1}^3 \tau(v \rightarrow f_i) \leq \frac{7}{5} \times 3 = \frac{21}{5}$. $\square$

引理 2.7 设 $v \in V_0(H)$, $d_H(v) \geq 5$. 如果 $d_H(f_1) = 3$, $d_H(f_k) = 5$, 且 f_1 与 f_k 正常相邻, 那么, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq \frac{7}{5}$. 更进一步, 若 $d_H(f_{k-1}) \neq 3$, 则有 $\tau(v \rightarrow f_1) + \tau(v \rightarrow f_k) \leq \frac{9}{5}$.

证明 由 v 不同时与 3-、4-、5- 和 6- 圈相关联可知, $d_H(f_2) \neq 3$ 且 $d_H(f_{v_1v_2}) \neq 3$. 令 $f_k = [v_1vv_ku_1u_2]$. 若 f_1 是外面, 则由引理 2.3 和 2.5 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq \frac{1}{2}$, 且 $\tau(v \rightarrow f_1) + \tau(v \rightarrow f_k) \leq \frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{13}{10}$. 故 $d_H(v_i) = d_G(v_i) \geq 4$, $i = 1, 2$. 因此, 当 v_1 或 v_2 是 4 点时, 其至多与两个 3- 面关联. 从而, 由引理 2.3 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq \frac{7}{5}$. 若 f_k 是外面, 则由 (R0)–(R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_k) = 0$. 从而, $\tau(v \rightarrow f_1) + \tau(v \rightarrow f_k) \leq \frac{7}{5}$. 下设 $u_1, u_2, v_k \in V_0(H)$, 则由 (P3) 知, v_1, v_2, u_1, u_2 和 v_k 中至少有一个 5^+ 点. 假设 v_1, v_k, u_1 和 u_2 中至少有一个 5^+ 点, 则由引理 2.5 得 $\tau(v \rightarrow f_k) \leq \frac{2}{5}$. 所以, $\tau(v \rightarrow f_1) + \tau(v \rightarrow f_k) \leq \frac{7}{5} + \frac{2}{5} = \frac{9}{5}$. 故可设 $d_H(v_2) \geq 5$. 由 (R1) 和 (R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq \frac{3-\frac{4}{5}}{2} = \frac{11}{10}$. 进而, 若 $d_H(f_{k-1}) \neq 3$, 则由引理 2.5(3) 知, $\tau(v \rightarrow f_k) \leq \frac{7}{10}$. 故 $\tau(v \rightarrow f_1) + \tau(v \rightarrow f_k) \leq \frac{11}{10} + \frac{7}{10} = \frac{9}{5}$. $\square$

我们将在下面两个引理中分别证明 $\sum_{f \in F(H)} w'(f) \geq 0$ 和 $\sum_{v \in V(H)} w'(v) \geq -10$.

引理 2.8 $\sum_{f \in F(H)} w'(f) \geq 0$.

证明 令 $f \in F(H)$. 设 f 是外面. 当 $d_H(f) \geq 7$ 且 $t_H(f) \geq 1$ 时, 由 (R0) 和 (R2) 知, $w'(f) \geq d_H(f) - 6 + 2 - \frac{d_H(f)-6}{t_H(f)} \times t_H(f) = 2$. 当 $d_H(f) \geq 7$ 且 $t_H(f) = 0$ 时, 由 (R0) 和 (R2) 知, $w'(f) \geq d_H(f) - 6 + 2 \geq 3$. 当 $4 \leq d_H(f) \leq 6$ 时, 由 (R0) 知, $w'(f) \geq d_H(f) - 6 + 2 \geq 0$. 当 $d_H(f) = 3$, 且 f 与 $V_0(H)$ 中的一个 5^+ 点相关联时, 由 (R0)–(R3) 知,

$$w'(f) \geq d_H(f) - 6 + \alpha(f) + \max \left\{ 0, \frac{6 - d_H(f) - \alpha(f)}{n_{5^+}^H(f)} \right\} \times n_{5^+}^H(f) \geq 0.$$

下设 f 不与 $V_0(H)$ 中的 5^+ 点相关联. 由 (R0) 和 (R1) 知, $w'(f) \geq d_H(f) - 6 + 2 + \frac{1}{2} \times 2 = 0$.

设 f 是内面. 当 $d_H(f) \geq 7$ 且 $t_H(f) \geq 1$ 时, 由 (R0) 和 (R2) 知, $w'(f) \geq d_H(f) - 6 - \frac{d_H(f)-6}{t_H(f)} \times t_H(f) = 0$. 当 $d_H(f) \geq 7$ 且 $t_H(f) = 0$ 时, 由 (R0) 和 (R2) 知, $w'(f) = w(f) > 0$. 当 $d_H(f) = 6$ 时, $w'(f) = w(f) = 0$. 当 $d_H(f) \leq 5$ 且 f 与 5^+ 点相关联时, 由 (R0)–(R3) 知,

$$w'(f) \geq d_H(f) - 6 + \alpha(f) + \max \left\{ 0, \frac{6 - d_H(f) - \alpha(f)}{n_{5^+}^H(f)} \right\} \times n_{5^+}^H(f) \geq 0.$$

当 $d_H(f) \leq 5$ 且 f 是轻面时, 由 (P4) 知, $d_H(f) = 3$ 或 $d_H(f) = 5$. 从而, 由 (R1) 知, $w'(f) = d_H(f) - 6 - \frac{6-d_H(f)}{d_H(f)} \times d_H(f) = 0$. $\square$

引理 2.9 $\sum_{v \in V(H)} w'(v) \geq -10$.

证明 设 $v \in V(H) \setminus V_0(H)$. 当 $d_H(v) \leq 4$ 时, 由 (R0) 知, $w'(v) \geq 2d_H(v) - 6 - 2d_H(v) - d_H(v) = -d_H(v) - 6 \geq -10$. 当 $d_H(v) \geq 5$ 时, $w'(v) \geq 2d_H(v) - 6 - 2d_H(v) = -6$. 下设 $v \in V_0(H)$, 则

$d_H(v) = d_G(v) \geq 4$. 称 v 不同时与 3-、4-、5- 和 6- 圈相关联为 v 具有性质 $\mathcal{P}$. 按 $d_H(v)$ 的值分情形讨论.

情形 1 $d_H(v) = 4$.

此时 $w(v) = 2$. 由权转移规则知, 要证 $w'(v) \geq 0$, 只需证 $\beta(v) \geq 0$. 当 $f_3^H(v) = 0$ 时, 由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - \frac{2}{5} \times 4 = \frac{2}{5}$. 当 $f_3^H(v) = 1$ 且 $f_{6^+}^H(v) \geq 1$ 时, 由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - 1 - \frac{2}{5} \times 2 = \frac{1}{5}$. 设 $f_3^H(v) = 1$ 且 $f_{6^+}^H(v) = 0$. 不妨设 $d_H(f_1) = 3$. 当 f_1 是外面时, 由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \times 3 = \frac{3}{10}$. 当 f_i ($2 \leq i \leq 4$) 是外面时, 由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - 1 - \frac{2}{5} \times 2 = \frac{1}{5}$. 下设 v 不与外面相关联. 由引理 2.2 知, $(3, 4, 4, 5^-)$ - 丛不存在, 故 $f_5^H(v) \geq 1$. 由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - 1 - \frac{2}{5} \times 2 - \frac{1}{5} = 0$. 故可设 $f_3^H(v) \geq 2$.

情形 1.1 $f_3^H(v) = 2$.

设 v 至少与两个外面相关联. 故由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - \max\{\frac{1}{2} \times 2 + \frac{2}{5} \times 2, \frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{5}, 1 \times 2\} = 0$. 下设 v 至多与一个外面相关联. 从而, $v_i \in V_0(H)$ ($\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$).

设 $d_H(f_1) = d_H(f_2) = 3$. 若 $f_{6^+}^H(v) = 2$ 或 v 与一个外面及一个内 6^+ - 面相关联, 则由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - 1 \times 2 = 0$. 下设 v 至少与一个内 5^- - 面相关联. 不妨设 f_3 是内 5^- - 面. 当 f_3 是内 4^- - 面, 由引理 2.1(1) 知, $f_3 = [vv_3v_1v_4]$. 容易验证 $d_H(f_{v_1v_2}) \geq 7$, $d_H(f_{v_2v_3}) \geq 7$ 且 $d_H(f_4) \geq 6$. 由 (R2) 知, $\tau(f_{v_1v_2} \rightarrow v) \geq \frac{d_H(f_{v_1v_2})-6}{d_H(f_{v_1v_2})} \geq \frac{1}{7}$ 且 $\tau(f_{v_2v_3} \rightarrow v) \geq \frac{d_H(f_{v_2v_3})-6}{d_H(f_{v_2v_3})} \geq \frac{1}{7}$. 若 $\max\{d_H(v_1), d_H(v_2), d_H(v_3)\} \geq 5$, 由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - 1 - \frac{4}{5} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \times 2 = \frac{3}{35}$. 若 $d_H(v_1) = d_H(v_2) = d_H(v_3) = 4$, 则 $f_{v_1v_2}$ 和 $f_{v_2v_3}$ 至少与两个 4^+ - 面相邻. 由 (R2) 知, $\tau(f_{v_1v_2} \rightarrow v) \geq \frac{d_H(f_{v_1v_2})-6}{d_H(f_{v_1v_2})-2} \geq \frac{1}{5}$ 且 $\tau(f_{v_2v_3} \rightarrow v) \geq \frac{d_H(f_{v_2v_3})-6}{d_H(f_{v_2v_3})-2} \geq \frac{1}{5}$. 由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - 1 \times 2 - \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times 2 = 0$. 当 f_3 是内 5^- - 面, 由引理 2.1(2) 知, $f_3 = [vv_3xv_2v_4]$, 故 $d_H(v_2) \geq 5$. 当 f_4 为外面时, 由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - \frac{4}{5} \times 2 - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$. 当 f_4 为内面时, 由引理 2.2 知, $(3, 3, 5, 5^-)$ - 丛不存在, 即 $d_H(f_4) \geq 6$. 从而, 由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - \frac{4}{5} \times 2 - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$.

设 $d_H(f_1) = d_H(f_3) = 3$. 由引理 2.2, 以及 $(3, 4, 3)$ - 丛不存在知, f_2 和 f_4 不为内 4^- - 面. 若 f_2 或 f_4 为内 5^- - 面, 不妨设 f_2 为内 5^- - 面. 由引理 2.2(2) 知, f_1 与 f_2 、 f_2 与 f_3 正常相邻. 故由引理 2.2(3) 知, f_1 与 f_2 、 f_2 与 f_3 构成 G 的 θ - 子图. 由 (P3) 知, f_1 与 f_2 、 f_2 与 f_3 至少关联一个 G 中的 5^+ - 点. 设 f_1 和 f_3 都是轻面, 可证 $\tau(v \rightarrow f_i) = 0$ ($i = 2, 4$). 事实上, 若 f_i 是外面或内 6^+ - 面, 则 $\tau(v \rightarrow f_i) = 0$. 下设 f_i 是内 5^- - 面. 由上面讨论知, f_i 非轻. 故由 (R1.4) 知, $\tau(v \rightarrow f_i) = 0$. 从而, 由 (R1) 知, $w'(v) \geq 2 - 1 \times 2 = 0$. 设 f_1 是轻面, 则可证 $\tau(v \rightarrow f_i) \leq \frac{1}{10}$ ($i = 2, 4$). 事实上, 若 f_i 是外面或内 6^+ - 面, 则 $\tau(v \rightarrow f_i) = 0$. 下设 f_i 是内 5^- - 面. 由上面讨论知, f_i 非轻. 从而, 由 (R1.4) 知, $\tau(v \rightarrow f_i) = \frac{1}{10}$. 故由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - 1 - \frac{4}{5} - \frac{1}{10} \times 2 = 0$. 若 f_1 和 f_3 都不是轻面, 由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - \frac{4}{5} \times 2 - \frac{1}{5} \times 2 = 0$.

情形 1.2 $f_3^H(v) = 3$, 即 $d_H(f_1) = d_H(f_2) = d_H(f_3) = 3$.

由性质 $\mathcal{P}$ 知, $d_H(f_4) \geq 7$ 或 f_4 为外 4^+ - 面. 故 $\tau(v \rightarrow f_4) = 0$. 又由 H 的平面性知, $v_1v_3 \notin E(H)$ 或 $v_2v_4 \notin E(H)$. 不妨设 $v_1v_3 \notin E(H)$, 从而, f_1 与 f_2 构成一个 θ - 子图. 若 v_2 (或 v_3) $\in V(H) \setminus V_0(H)$, 则由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - 1 - \frac{1}{2} \times 2 = 0$. 故 $v_2, v_3 \in V_0(H)$. 由性质 (P3) 可知, f_1 和 f_2 不能同时为轻面. 由性质 $\mathcal{P}$ 知, $d_H(f_{v_2v_3}) \geq 7$; $d_H(f_{v_1v_2}) = 3, 4$ 或 $d_H(f_{v_1v_2}) \geq 7$. 且当 $d_H(f_{v_1v_2}) = 3$ 时, 有 $f_{v_1v_2} = [v_1v_2v_4]$; 当 $d_H(f_{v_1v_2}) = 4$ 时, 有 $f_{v_1v_2} = [v_4v_1v_2]$ 且 $v_1 \in V(H) \setminus V_0(H)$. 由性质 $\mathcal{P}$ 和 $v_1v_3 \notin E(H)$ 知, $d_H(f_{v_3v_4}) \geq 7$.

当 f_1 、 f_2 和 f_3 都不为轻面时, 由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - \frac{2}{3} \times 3 = 0$.

当 f_1 、 f_2 和 f_3 恰有一个为轻面时, $d_H(v_2) = 4$ 或 $d_H(v_3) = 4$. 若 $d_H(f_{v_1v_2}) \geq 7$, 由 (R1) 和 (R2) 知, $\beta(v) \geq 2 - 1 - \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{7} \times 3 = \frac{2}{21}$. 若 $d_H(f_{v_1v_2}) = 4$, 则 v_1 是 G 的割点. 由 (R1) 和 (R2) 知, $\beta(v) \geq 2 - 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} \times 2 = \frac{5}{42}$. 下设 $d_H(f_{v_1v_2}) = 3$, 即 $f_{v_1v_2} = [v_1v_2v_4]$. 当 $d_H(v_3) = 4$ 时, $f_{v_2v_3}$

(或 $f_{v_3v_4}$) 至少与一个 7^+ - 面 $f_{v_3v_4}$ (或 $f_{v_2v_3}$) 相邻. 由 (R2) 知, $\tau(f_{v_2v_3} \rightarrow v) \geq \frac{d_H(f_{v_2v_3})-6}{d_H(f_{v_2v_3})-1} \geq \frac{1}{6}$ 且 $\tau(f_{v_3v_4} \rightarrow v) \geq \frac{d_H(f_{v_3v_4})-6}{d_H(f_{v_3v_4})-1} \geq \frac{1}{6}$. 由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - 1 - \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{6} \times 2 = 0$. 下设 $d_H(v_2) = 4$. 若 $d_H(f_{v_2v_3}) = 7$, 则 $f_{v_2v_3} = [v_3v_2v_4x_1x_2x_3x_4]$. 从而, v_3 与 3- 圈 $v_3v_2vv_3$ 、4- 圈 $v_3v_2v_1vv_3$ 、5- 圈 $v_3v_2v_1vv_4v_3$ 和 6- 圈 $v_3x_4x_3x_2x_1v_4v_3$ 相关联, 矛盾. 故 $d_H(f_{v_2v_3}) \geq 8$. 由 (R2) 知, $\tau(f_{v_2v_3} \rightarrow v) \geq \frac{d_H(f_{v_2v_3})-6}{d_H(f_{v_2v_3})-1} \geq \frac{1}{4}$. 由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - 1 - \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} = \frac{5}{84}$.

当 f_1 、 f_2 和 f_3 恰有两个轻面时, 由之前的讨论知, f_2 和 f_3 为轻面, 则 $d_H(v_2) = d_H(v_3) = d_H(v_4) = 4$ 且 $v_4 \in V_0(H)$. 从而, $v_2v_4 \in E(H)$, 否则 f_2 和 f_3 构成一个 $S\theta$ 图, 与 (P3) 矛盾. 类似于前面讨论知, $d_H(f_{v_2v_3}) \geq 8$. 注意到, 若 $d_H(f_{v_1v_2}) = 3$, 即 $f_{v_1v_2} = [v_1v_2v_4]$, 则 v_3 是 H 的割点, 与 H 是 2- 连通图矛盾. 设 $d_H(f_{v_1v_2}) \geq 7$. 故 $f_{v_1v_2}$ (或 $f_{v_3v_4}$) 至少与一个 7^+ - 面 $f_{v_2v_3}$ 相邻. 由 (R2) 知, $\tau(f_{v_1v_2} \rightarrow v) \geq \frac{d_H(f_{v_1v_2})-6}{d_H(f_{v_1v_2})-1} \geq \frac{1}{6}$, $\tau(f_{v_2v_4} \rightarrow v) \geq \frac{d_H(f_{v_2v_4})-6}{d_H(f_{v_2v_4})-1} \geq \frac{1}{6}$, $\tau(f_{v_2v_3} \rightarrow v) \geq \frac{d_H(f_{v_2v_3})-6}{d_H(f_{v_2v_3})-2} \geq \frac{1}{3}$. 由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - 1 \times 2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{3} = 0$. 从而, $d_H(f_{v_1v_2}) = 4$, 即 $f_{v_1v_2} = [v_4vv_1v_2]$ 且 $v_1 \in V(H) \setminus V_0(H)$. 注意到 $f_{v_2v_3}$ 至少与两个 4^+ - 面相邻, $f_{v_3v_4}$ 至少与一个 4^+ - 面相邻. 由 (R2) 知, $\tau(f_{v_2v_3} \rightarrow v) \geq \frac{1}{3}$ 且 $\tau(f_{v_3v_4} \rightarrow v) \geq \frac{1}{6}$. 由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - 1 \times 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 0$.

情形 1.3 $f_3^H(v) = 4$.

假设 f_1 、 f_2 、 f_3 和 f_4 都不是轻面, 由 (R1) 知, $w'(v) \geq 2 - \frac{1}{2} \times 4 = 0$. 假设 f_1 、 f_2 、 f_3 和 f_4 中至少有一个轻面. 不妨设 f_1 为轻面, 即 $v_1, v_2 \in V_0(H)$ 且 $d_H(v_1) = d_H(v_2) = 4$. 若 $v_3 \in V_0(H)$ 且 $d_H(v_3) = 4$, 则 $v_1v_3 \in E(H)$, 否则 f_1 与 f_2 构成一个 $S\theta$, 与 (P3) 矛盾. 但此时 v_2 为 H 的割点, 与 H 是 2- 连通图矛盾. 故 $v_3 \in V(H) \setminus V_0(H)$, 或 $v_3 \in V_0(H)$ 且 $d_H(v_3) \geq 5$. 类似可证 $v_4 \in V(H) \setminus V_0(H)$, 或 $v_4 \in V_0(H)$ 且 $d_H(v_4) \geq 5$. 从而, f_2 、 f_3 和 f_4 都不是轻面. 若 $d_H(v_3) \geq 4$ 且 $d_H(v_4) \geq 4$, 则易验证 $\min\{d_H(f_{v_1v_2}), d_H(f_{v_2v_3}), d_H(f_{v_3v_4}), d_H(f_{v_4v_1})\} \geq 7$. 由 (R1) 和 (R2) 知, $\beta(v) \geq 2 - 1 - \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{7} \times 4 = \frac{1}{14}$. 故可设 $d_H(v_3) \leq 3$, 即 $v_3 \in V(H) \setminus V_0(H)$. 由 (R0) 知, $\tau(v_3 \rightarrow v) = 1$. 由 (R1) 知, $\beta(v) \geq 2 - 1 - \frac{1}{2} \times 3 + 1 = \frac{1}{2}$.

情形 2 $d_H(v) = 5$.

此时 $w(v) = 4$ 且 $f_3^H(v) \leq 3$. 当 $f_3^H(v) = 0$ 时, 由引理 2.4 和 2.5 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{4}{5} \times 5 = 0$. 下设 $f_3^H(v) \geq 1$.

情形 2.1 $f_3^H(v) = 1$.

不妨设 $d_H(f_1) = 3$. 当 f_1 是外面时, 由引理 2.3–2.5 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{1}{2} - \frac{4}{5} \times 4 = \frac{3}{10}$. 下设 f_1 是内面. 由 $d_H(f_2) \neq 3$ 和 $d_H(f_5) \neq 3$ 知, 若 $d_H(v_1) = d_H(v_2) = 4$, 则 $f_3^H(v_1) + f_3^H(v_2) \leq 6$. 设 $d_H(v_1) = d_H(v_2) = 4$ 且 $f_3^H(v_1) + f_3^H(v_2) = 6$, 则 $f_3^H(v_1) = f_3^H(v_2) = 3$. 不妨设与 v_2 相关联的另两个 3- 面为 $f_{v_1v_2} = [v_1v_2x]$ 和 $f' = [v_2xy]$, 则由性质 $\mathcal{P}$ 知, 与 v_1 相关联的另两个 3- 面为 $f_{v_1v_2}$ 和 $f'' = [v_1xy]$. 从而, $x \in V(H) \setminus V_0(H)$, 即与 v 相关联的面都是内面. 易验证此时 $d_H(f_2) \geq 6$, $d_H(f_5) \geq 6$. 从而, 由引理 2.3–2.5 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{5}{3} - \frac{4}{5} \times 2 = \frac{11}{15}$. 故若 $d_H(v_1) = d_H(v_2) = 4$ 时可设 $f_3^H(v_1) + f_3^H(v_2) \leq 5$. 由引理 2.3 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq \frac{23}{15}$. 若 $f_6^+(v) \geq 1$ 或 v 至少与一个外面相关联, 由引理 2.4 和 2.5 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{23}{15} - \frac{4}{5} \times 3 = \frac{1}{15}$. 下设 $f_6^+(v) = 0$ 且 v 不与外面相关联. 由引理 2.2, 以及 $(3, 4, 4, 5^-)$ - 丛不存在知, $f_5^H(v) \geq 2$.

先设 $d_H(f_2) = 4$, 即 $f_2 = [vv_2xv_3]$, 则 v 与 3- 圈 vv_1v_2v 、4- 圈 vv_2xv_3v 和 5- 圈 $vv_1v_2xv_3v$ 相关联. 由引理 2.2, 以及 G 不含 $(4, 3, 5)$ - 丛知, $d_H(f_5) = 4$. 由 v 不与 6- 圈相关联知, $d_H(f_{v_1v_2}) \neq 3$. 又由引理 2.2, 以及 $(3, 4, 3)$ - 丛不存在知, 若 v_1 (或 v_2) 是 4- 点, 则有 $f_3^H(v_1) = 1$ (或 $f_3^H(v_2) = 1$). 故由 (R0)、(R1) 和 (R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq 1$. 另一方面, 由引理 2.5 知, $\tau(v \rightarrow f_i) \leq \frac{3}{5}$ ($i = 3, 4$). 因此, 由引

理 2.4 知, $w'(v) \geq 4 - 1 - \frac{4}{5} \times 2 - \frac{3}{5} \times 2 = \frac{1}{5}$.

故可设 $d_H(f_2) = d_H(f_5) = 5$. 由引理 2.2 知, f_2 与 f_1 、 f_1 与 f_5 正常相邻, 即 $f_2 = [vv_2x_1x_2v_3]$, $f_5 = [vv_5y_1y_2v_1]$. 此时易见 v 与 3- 圈、5- 圈和 6- 圈相关联. 从而, $d_H(f_3) = d_H(f_4) = 5$, $d_H(f_{v_1v_2}) \neq 3$. 由引理 2.3 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq \frac{7}{5}$. 由引理 2.5 知, $\tau(v \rightarrow f_i) \leq \frac{3}{5}$, $\tau(v \rightarrow f_j) \leq \frac{7}{10}$, 其中 $i = 3, 4$, $j = 2, 5$. 因此, $w'(v) \geq 4 - \frac{7}{5} - \frac{7}{10} \times 2 - \frac{3}{5} \times 2 = 0$.

情形 2.2 $f_3^H(v) = 2$.

先设 $d_H(f_1) = d_H(f_2) = 3$. 若 $\exists i \in \{1, 2, 3\}$, 使得 $v_i \in V(H) \setminus V_0(H)$, 由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 4 - \max\{\frac{1}{2} \times 2 + \frac{4}{5} \times 3, \frac{1}{2} + \frac{17}{10} + \frac{4}{5} \times 2\} = \frac{1}{5}$. 故对任意 $i \in \{1, 2, 3\}$, 有 $v_i \in V_0(H)$. 设 $\min\{d_H(f_3), d_H(f_5)\} \leq 5$. 不妨设 $d_H(f_3) \leq 5$. 当 $d_H(f_3) = 4$ 时, 由引理 2.1(1) 知, $f_3 = [vv_3v_1v_4]$, 且 $d_H(f_5) \geq 6$. 若 $v_4 \in V(H) \setminus V_0(H)$, 则 f_3 和 f_4 是外面. 由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{17}{10} \times 2 = \frac{3}{5}$. 故可设 $v_4 \in V_0(H)$. 由 v 有性质 $\mathcal{P}$ 知, $d_H(f_4) \geq 6$. 若 $\max\{d_H(v_1), d_H(v_2), d_H(v_3)\} \geq 5$, 由引理 2.3 和 2.4 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{17}{10} - \frac{5}{4} - \frac{4}{5} = \frac{1}{4}$. 下设 $d_H(v_1) = d_H(v_2) = d_H(v_3) = 4$. 故 $f_3^H(v_1) = 1$, $f_3^H(v_2) \leq 3$, $f_3^H(v_3) \leq 2$. 由 (R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq 3 - 1 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, $\tau(v \rightarrow f_2) \leq 3 - \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{23}{15}$. 由引理 2.4 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{4}{3} - \frac{23}{15} - \frac{4}{5} = \frac{1}{3}$. 当 $d_H(f_3) = 5$ 时, 由引理 2.1(2) 知, $f_3 = [vv_3xv_2v_4]$. 容易验证 $d_H(f_5) \geq 6$ 且 $d_H(v_2) \geq 5$. 由引理 2.3 和 2.5 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{5}{4} \times 2 - \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$. 故可设 $\min\{d_H(f_3), d_H(f_5)\} \geq 6$. 若 $\max\{d_H(v_1), d_H(v_2), d_H(v_3)\} \geq 5$, 由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{5}{4} - \frac{17}{10} - \frac{4}{5} = \frac{1}{4}$. 下设 $d_H(v_1) = d_H(v_2) = d_H(v_3) = 4$. 由 (P3) 知, $v_1v_3 \in E(G)$, 则 $f_3^H(v_2) \leq 3$, 否则, v 是 H 的割点与 H 是 2- 连通图矛盾. 当 $f_3^H(v_2) = 2$ 时, 由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{7}{5} \times 2 - \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$. 当 $f_3^H(v_2) = 3$ 时, 不妨设 $d_H(f_{v_1v_2}) \neq 3$. 从而, $f_3^H(v_1) = 1$. 由 (R1) 和 (R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq 3 - 1 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. 从而, 由引理 2.4 和 2.5 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{17}{10} - \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{1}{6}$.

再设 $d_H(f_1) = d_H(f_3) = 3$. 若 $v_1 \in V(H) \setminus V_0(H)$, 则 f_1 和 f_5 是外面. 由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{1}{2} - \frac{4}{5} \times 2 - \frac{17}{10} = \frac{1}{5}$. 故 $v_1 \in V_0(H)$. 同理可证 $v_2, v_3, v_4 \in V_0(H)$. 由引理 2.2 知, $d_H(f_2) \neq 4$. 由 $d_H(f_2) \neq 3$ 和 $d_H(f_5) \neq 3$ 知, 若 $d_H(v_1) = d_H(v_2) = 4$, 则有 $f_3^H(v_1) \leq 3$ 且 $f_3^H(v_2) \leq 3$. 从而, 由引理 2.3 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq \frac{5}{3}$. 设 $d_H(v_1) = d_H(v_2) = 4$ 且 $f_3^H(v_1) = f_3^H(v_2) = 3$. 令与 v_2 相关联的另两个 3- 面为 $f_{v_1v_2} = [v_1v_2x]$ 和 $f' = [v_2xy]$, 则由 v 有性质 $\mathcal{P}$ 知, 与 v_1 相关联的另两个 3- 面为 $f_{v_1v_2}$ 和 $f'' = [v_1xy]$. 从而, $x \in V(H) \setminus V_0(H)$, 即与 v 相关联的面皆为内面. 易验证此时 $d_H(f_2) \geq 6$, $d_H(f_5) \geq 6$, 且若 $d_H(v_3) = d_H(v_4) = 4$ 有 $f_3^H(v_3) + f_3^H(v_4) \leq 5$. 由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{5}{3} - \frac{23}{15} - \frac{4}{5} = 0$. 故若 $d_H(v_1) = d_H(v_2) = 4$ 时可设 $f_3^H(v_1) + f_3^H(v_2) \leq 5$, 则由引理 2.3 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq \frac{23}{15}$. 类似可证 $\tau(v \rightarrow f_3) \leq \frac{23}{15}$. 若 f_2, f_4 和 f_5 中至多有一个内 5- 面, 由引理 2.4 和 2.5 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{23}{15} \times 2 - \frac{4}{5} = \frac{2}{15}$. 故可设 f_2, f_4 和 f_5 中至少有两个内 5- 面. 当 f_4 为内 4- 面时, 由 v 有性质 $\mathcal{P}$ 知, $d_H(f_2) \geq 6$, $d_H(f_5) \geq 6$, 矛盾. 同理, f_5 不为内 4- 面. 又 f_2 不为内 4- 面, 所以, f_2, f_4 和 f_5 中至少有两个内 5- 面. 假设 f_2 和 f_4 为内 5- 面, f_5 为 6+- 面或外面. 由引理 2.2 知, f_1 与 f_2 正常相邻. 再由引理 2.5 和 2.7 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{9}{5} - \frac{4}{5} - \frac{7}{5} = 0$. 假设 f_4 和 f_5 为内 5- 面, f_2 为 6+- 面或外面. 由 G 有性质 $\mathcal{P}$ 知, f_3 与 f_4 正常相邻, f_1 与 f_5 正常相邻. 由引理 2.7 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{9}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$. 假设 f_2, f_4 和 f_5 为内 5- 面. 由引理 2.2 知, f_i 与 f_{i+1} 正常相邻, $i = 1, 2, \dots, 5$ 且 $f_6 = f_1$. 当 f_2, f_4 和 f_5 中至少有一个面与两个 5+- 点相关联时, 由引理 2.5 和 2.7 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{9}{5} \times 2 - \frac{2}{5} = 0$. 故可设 $d_H(v_i) = 4$, $i = 1, 2, \dots, 5$, 且 $n_4^H(f_j) = 4$, $j = 2, 4, 5$. 由引理 2.2 知, f_1 与 f_2 构成一个 $S\theta$, 与 (P3) 矛盾.

情形 2.3 $f_3^H(v) = 3$.

情形 2.3.1 $d_H(f_1) = d_H(f_2) = d_H(f_3) = 3$.

由 v 有性质 $\mathcal{P}$ 知, $d_H(f_4) \neq 5$ 且 $d_H(f_5) \neq 5$. 下证 f_4 与 f_5 不能同时为 4- 面. 假设 $d_H(f_4) = d_H(f_5) = 4$, 即 $f_4 = [vv_4xv_5]$, 则由 v 有性质 $\mathcal{P}$ 知, $x = v_3$ 或 $x = v_2$. 当 $x = v_3$ 时, 有 $d_H(v_4) = 2$, 即 $v_4 \in V(H) \setminus V_0(H)$, 则 f_5, f_1 和 f_2 皆为内面. 由引理 2.1(3) 知, $f_5 = [vv_5v_3v_1]$. 从而, $d_H(v_5) = 2$, 即 $v_5 \in V(H) \setminus V_0(H)$, 矛盾. 故可设 $x = v_2$. 由对称性知, $f_5 = [vv_5v_3v_1]$ 与 H 是平面图矛盾. 从而, f_4 与 f_5 不能同时为 4- 面. 不妨设 $d_H(f_5) \geq 6$. 当 $v_2 \in V(H) \setminus V_0(H)$ 时, 由引理 2.3 知, $\tau(v \rightarrow f_i) \leq \frac{1}{2}$ ($i = 1, 2$), $\tau(v \rightarrow f_3) \leq \frac{17}{10}$. 由引理 2.6 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{17}{10} - \frac{4}{5} = \frac{1}{2}$. 故 $v_2 \in V_0(H)$. 类似可证 $v_3 \in V_0(H)$. 从而, 由引理 2.1 和 (P5) 知, $d_H(f_{v_2v_3}) \geq 7$. 由 (R2) 知, $\tau(f_{v_2v_3} \rightarrow v) \geq \frac{1}{7}$. 当 $v_4 \in V(H) \setminus V_0(H)$ 时, 由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{1}{2} - \frac{17}{10} \times 2 = \frac{1}{10}$. 故 $v_4 \in V_0(H)$. 若 $d_H(f_4) = 4$, 由引理 2.1(3) 知, $f_4 = [vv_4v_2v_5]$. 由 (R0)、(R1) 和 (R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_4) \leq \max\{0, \frac{2-\frac{2}{5} \times 2}{2}\} = \frac{3}{5}$. 注意到, 由 (P5) 知, $d_H(f_{v_1v_2}) \neq 3$ 且 $d_H(f_{v_3v_4}) \neq 3$. 若 $v_1 \in V(H) \setminus V_0(H)$, 由引理 2.3 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq \frac{1}{2}$, $\tau(v \rightarrow f_2) \leq \frac{5}{4}$. 故 $w'(v) \geq 4 - \frac{1}{2} - \frac{5}{4} - \frac{17}{10} - \frac{3}{5} + \frac{1}{7} = \frac{13}{140}$. 故 $v_1 \in V_0(H)$. 故若 $d_H(v_i) = 4, i = 1, 3$, 则有 $f_3^H(v_i) \leq 2$; 若 $d_H(v_4) = 4$, 则有 $f_3^H(v_4) \leq 1$. 从而, 由 (R1) 和 (R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq \max\{\frac{3-\frac{4}{5}}{2}, \frac{3}{3}\} = \frac{11}{10}$. 类似可证 $\tau(v \rightarrow f_2) \leq \frac{11}{10}$, $\tau(v \rightarrow f_3) \leq \frac{6}{5}$. 从而, $w'(v) \geq 4 - \frac{11}{10} \times 2 - \frac{6}{5} - \frac{3}{5} = 0$. 下设 $d_H(f_4) \geq 6$. 若 $v_1 \in V(H) \setminus V_0(H)$, 由引理 2.3 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{1}{2} - \frac{17}{10} \times 2 = \frac{1}{10}$. 故 $v_1 \in V_0(H)$. 由 v 有性质 $\mathcal{P}$ 知, $d_H(f_{v_1v_2}) = 3$ 或 $d_H(f_{v_1v_2}) \geq 7$, $d_H(f_{v_3v_4}) = 3$ 或 $d_H(f_{v_3v_4}) \geq 7$, 且 $f_{v_1v_2}$ 与 $f_{v_3v_4}$ 不同时为 3- 面. 不妨设 $d_H(f_{v_3v_4}) \geq 7$. 从而, 由 (R2) 及引理 2.6 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{21}{5} + \frac{1}{7} \times 2 = \frac{3}{35}$.

情形 2.3.2 $d_H(f_1) = d_H(f_2) = d_H(f_4) = 3$.

易见 v 与 3- 圈及 4- 圈相关联. 若 $d_H(f_3) = 5$, 由 v 有性质 $\mathcal{P}$ 知, f_3 与 f_2, f_3 与 f_4 都非正常相邻. 从而, $f_3 = [vv_3v_2v_5v_4]$. 故 $d_H(v_3) = d_H(v_4) = 2$, 即 $v_3, v_4 \in V(H) \setminus V_0(H)$. 与 H 的定义矛盾. 同理可证 $d_H(f_5) \neq 5$. 设 $d_H(f_3) = 4$, 即 $f_3 = [vv_3xv_4]$. 由 v 有性质 $\mathcal{P}$ 知, $x = v_2$. 故 $d_H(v_3) = 2$, 即 $v_3 \in V(H) \setminus V_0(H)$. 所以, f_1, f_4 和 f_5 是内面. 由引理 2.2, 以及 (3, 4, 3)- 丛不存在知, $d_H(f_5) \geq 6$. 由引理 2.3 和 2.4 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{17}{10} \times 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$. 故 $d_H(f_3) \geq 6$. 由对称性知, $d_H(f_5) \geq 6$. 若 $\exists i \in \{1, 2, 4\}$, 使 f_i 是外面, 则由引理 2.3 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{17}{10} \times 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$. 故 f_1, f_2 和 f_4 是内面, 即 $v_i \in V_0(H), i = 1, 2, \dots, 5$. 由引理 2.3 知, $\tau(v \rightarrow f_4) \leq \frac{5}{3}$. 当 $d_H(v_2) \geq 5$ 时, 由 (R1) 和 (R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_i) \leq \max\{\frac{3-\frac{4}{5}}{2}, 1\} = \frac{7}{6}, i = 1, 2$. 从而, $w'(v) \geq 4 - \frac{7}{6} \times 2 - \frac{5}{3} = 0$. 故可设 $d_H(v_2) = 4$, 即 v 是特殊 5- 点. 令 u 是 v_2 的不同于 v_1, v_3 和 v 的邻点. 设 $\tau(v \rightarrow f_4) = \frac{5}{3}$, 即 $d_H(v_4) = d_H(v_5) = 4$ 且 $f_3^H(v_4) = f_3^H(v_5) = 3$. 令与 v_4 相关联的另两个 3- 面为 $f_{v_4v_5} = [v_4v_5x]$ 和 $f' = [v_4xy]$, 则由 v 有性质 $\mathcal{P}$ 知, 与 v_5 相关联的不同于 f_4 的 3- 面必为 $f_{v_4v_5}$ 和 $f'' = [v_5xy]$. 从而, $d_H(x) = 3$, 即 $x \in V(H) \setminus V_0(H)$. 由 (R0) 知, $\tau(x \rightarrow v_i) = 1, i = 4, 5$. 从而, 由 (R1) 知, $\beta(v_i) \geq 2 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{3} (i = 4, 5)$. 而 v_4 和 v_5 至多与两个特殊点相邻. 从而, 由 (R4) 知, $\tau(v_i \rightarrow v) \geq \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3} (i = 4, 5)$. 故由引理 2.3 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{5}{3} - \frac{17}{10} \times 2 + \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{15}$. 从而在以下讨论中, 若 $d_H(v_4) = d_H(v_5) = 4$, 则有 $f_3^H(v_4) + f_3^H(v_5) \leq 5$. 由引理 2.3 知, $\tau(v \rightarrow f_4) \leq \frac{23}{15}$. 按 $f_3^H(v_2)$ 的值分类讨论.

• 设 $f_3^H(v_2) = 2$. 当 $d_H(v_1) \geq 5$ 且 $d_H(v_3) \geq 5$ 时, 由 (R1)-(R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_i) \leq \frac{3-\frac{4}{5}}{2} = \frac{11}{10} (i = 1, 2)$. 故 $w'(v) \geq 4 - \frac{11}{10} \times 2 - \frac{5}{3} = \frac{2}{15}$. 当 v_1 与 v_3 中恰有一个 5+- 点时, 不妨设 $d_H(v_1) \geq 5$, 则由 (R1)-(R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq \frac{11}{10}$ 且 $\tau(v \rightarrow f_2) \leq \frac{7}{5}$. 此时, $n_s(v_2) \leq 2$. 我们先证 $\tau(v_2 \rightarrow v) \geq \frac{1}{5}$. 易见 $d_H(f_{v_1v_2}) \neq 5$ 且 $d_H(f_{v_2v_3}) \neq 5$. 若 $d_H(f_{v_1v_2}) \neq 4$ 且 $d_H(f_{v_2v_3}) \neq 4$, 则 $\beta(v_2) = 2 - \frac{4}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$. 故由 (R4) 知, $\tau(v_2 \rightarrow v) \geq \frac{\beta(v_2)}{2} = \frac{1}{5}$. 若 $d_H(f_{v_1v_2}) = 4$, 即 $f_{v_1v_2} = [v_1v_2uv_3]$, 则 $d_H(f_{v_2v_3}) \geq 6$ 且 v 与 5- 圈 $vv_3uv_2v_1v$ 相关联. 由 v 有性质 $\mathcal{P}$ 知, $d_H(f_3) \geq 7$ 且 $d_H(f_5) \geq 7$. 从而, $\beta(v_2) \geq 2 - \frac{4}{5} \times 2 - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \times 2 = \frac{2}{7}$. 此时, v_1 和 v_3 皆不是特殊点. 故由 (R4) 知, $\tau(v_2 \rightarrow v) = \beta(v_2) \geq \frac{2}{7}$. 当 $d_H(f_{v_2v_3}) = 4$ 时, 类似可证 $\tau(v_2 \rightarrow v) \geq \frac{2}{7}$. 综上, $\tau(v_2 \rightarrow v) \geq \frac{1}{5}$. 故由 (R4) 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{11}{10} - \frac{7}{5} - \frac{23}{15} + \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$. 当

$d_H(v_1) = d_H(v_3) = 4$ 时, 由 (P3) 知, $v_1v_3 \in E(G)$, 即 $v_1v_3 \in E(H)$. 从而, $f_3^H(v_1) = f_3^H(v_3) = 1$, 否则 v 或 v_2 为割点, 与 H 是 2- 连通图矛盾. 由 (R1) 和 (R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_i) \leq 3 - 1 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$ ($i = 1, 2$). 故 $w'(v) \geq 4 - \frac{6}{5} \times 2 - \frac{23}{15} = \frac{1}{15}$.

• 设 $f_3^H(v_2) = 3$. 不妨设 $d_H(f_{v_1v_2}) = 3$, 即 $f_{v_1v_2} = [v_1v_2u]$. 由 v 有性质 $\mathcal{P}$ 知, $f_{v_2v_3} = [v_2uv_1v_3]$ 或 $d_H(f_{v_2v_3}) \geq 7$, $d_H(f_3) \geq 7$ 且 $d_H(f_5) \geq 7$. 先设 $f_{v_2v_3} = [v_1uv_2v_3]$, 则 $d_H(u) = 2$ 是 G 的割点, $v_1v_3 \in E(H)$ 且与边 v_1v_3 相关联的不同于 $f_{v_2v_3}$ 的另一个面不是 3- 面. 故 v_1 和 v_3 不是特殊点. 由 (R0)–(R3) 知, $\tau(u \rightarrow v_2) = 1$, $\beta(v_2) \geq 2 - \frac{2}{3} \times 2 - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{7} \times 2 = \frac{61}{42}$. 由 (R4) 和引理 2.3 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{17}{10} \times 2 - \frac{23}{15} + \frac{61}{42} = \frac{109}{210}$. 再设 $d_H(f_{v_2v_3}) \geq 7$. 此时可证 v_1 和 v_3 中至少有一个 5^+ - 点. 否则, 设 $d_H(v_1) = d_H(v_3) = 4$. 由 (P3) 知, $v_1v_3 \in E(G)$, 即 $v_1v_3 \in E(H)$. 从而, 圈 $C: v_1v_2v_3v_1$ 是分离圈, 即其内部、外部都有点. 不妨设 u 在圈 C 的内部. 又由 H 是 2- 连通图且 $v \in V_0(H)$ 知, v_3 的第 4 个邻点在分离圈 C 的外部. 从而, $d_H(u) = 2$, 即 $f_{v_2v_3} = [v_2uv_1v_3]$, 矛盾. 当 $d_H(v_1) \geq 5$ 且 $d_H(v_3) \geq 5$ 时, 由 (R1)–(R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_i) \leq \frac{3-\frac{2}{3}}{2} = \frac{7}{6}$ ($i = 1, 2$). 故 $w'(v) \geq 4 - \frac{7}{6} \times 2 - \frac{23}{15} = \frac{2}{15}$. 当 $d_H(v_1) \geq 5$ 且 $d_H(v_3) = 4$ 时, 有 $f_3^H(v_3) \leq 2$. 由 (R1)–(R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq \frac{7}{6}$, $\beta(v_2) \geq 2 - \frac{2}{3} \times 3 + \frac{1}{7} \times 2 = \frac{2}{7}$. 由引理 2.3 知, $\tau(v \rightarrow f_2) \leq \frac{23}{15}$. 故 $w'(v) \geq 4 - \frac{7}{6} - \frac{23}{15} \times 2 + \frac{1}{7} + \frac{\beta(v_2)}{3} = 4 - \frac{7}{6} - \frac{46}{15} + \frac{1}{7} + \frac{2}{21} = \frac{1}{210}$. 当 $d_H(v_1) = 4$ 且 $d_H(v_3) \geq 5$ 时, 有 $f_3^H(v_1) \leq 3$. 由 (R0)–(R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_2) \leq \frac{3-\frac{2}{3}}{2} = \frac{7}{6}$. 若 $f_3^H(v_1) = 3$, 则由 v 有性质 $\mathcal{P}$ 知, $v_1v_3 \in E(H)$, $v_3u \in E(H)$ 且 v_3 不是特殊点. 从而, $d_H(f_{v_2v_3}) \geq 8$, 否则设 $f_{v_2v_3} = [v_3v_2ux_1x_2x_3x_4]$, 则 u 与 3- 圈 uv_1v_2u 、4- 圈 uv_1vv_2u 、5- 圈 $uv_1vv_3v_2u$ 和 6- 圈 $ux_1x_2x_3x_4v_3u$ 相关联, 矛盾. 类似可证 $d_H(f_5) \geq 8$. 由 (R2) 知, $\tau(f_5 \rightarrow v_2) \geq \frac{d_H(f_5)-6}{d_H(f_5)} \geq \frac{1}{4}$ 且 $\tau(f_{v_2v_3} \rightarrow v) \geq \frac{d_H(f_{v_2v_3})-6}{d_H(f_{v_2v_3})} \geq \frac{1}{4}$. 由 (R1) 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq 3 - \frac{2}{3} \times 2 = \frac{5}{3}$. 当 $f_{v_1v_2}$ 不是轻面时, 由 (R1) 和 (R2) 知, $\beta(v_2) \geq 2 - \frac{2}{3} \times 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} = \frac{11}{28}$. 故由 (R4) 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{5}{3} - \frac{23}{15} - \frac{7}{6} + \frac{1}{4} + \frac{\beta(v_2)}{2} = 4 - \frac{5}{3} - \frac{23}{15} - \frac{7}{6} + \frac{1}{4} + \frac{11}{56} = \frac{67}{840}$. 当 $f_{v_1v_2}$ 是轻面, 即 $d_H(u) = 4$ 时, 由 (R1) 和 (R2) 知, $\beta(v_1) \geq 2 - 1 - \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{6}$ 且 $\beta(v_2) \geq 2 - 1 - \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} = \frac{5}{84}$. 故 $w'(v) \geq 4 - \frac{5}{3} - \frac{23}{15} - \frac{7}{6} + \frac{1}{4} + \beta(v_1) + \beta(v_2) = 4 - \frac{5}{3} - \frac{23}{15} - \frac{7}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{5}{84} = \frac{23}{210}$. 若 $f_3^H(v_1) = 2$, 由引理 2.3 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq \frac{23}{15}$. 由 (R1) 和 (R2) 知, $\beta(v_1) \geq 2 - 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$. 从而, $w'(v) \geq 4 - \frac{23}{15} \times 2 - \frac{7}{6} + \frac{1}{7} + \frac{\beta(v_1)}{2} = 4 - \frac{46}{15} - \frac{7}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} = \frac{1}{105}$.

• 设 $f_3^H(v_2) = 4$, 即 $f_{v_1v_2} = [v_1v_2u]$ 且 $f_{v_2v_3} = [v_2v_3u]$. 当 $u \in V(H) \setminus V_0(H)$ 且 $d_H(u) \leq 4$ 时, 由 (R0) 知, $\tau(u \rightarrow v_2) = 1$. 故由 (R1) 知, $\beta(v_2) \geq 2 - \frac{1}{2} \times 4 + 1 = 1$, 且 v_2 只与一个特殊点相邻. 由引理 2.3 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{17}{10} \times 2 - \frac{23}{15} + 1 = \frac{1}{15}$. 下设 $d_H(u) \geq 4$, 且当 $d_H(u) = 4$ 时, $u \in V_0(H)$. 先证 $\tau(v \rightarrow f_4) - \tau(v_5 \rightarrow v) - \tau(v_4 \rightarrow v) \leq \frac{7}{5}$. 事实上, 若 $\tau(v \rightarrow f_4) \leq \frac{7}{5}$, 则显然成立. 由前面讨论知, $\tau(v \rightarrow f_4) \leq \frac{23}{15}$, 且若 $\tau(v \rightarrow f_4) = \frac{23}{15}$, 则 $d_H(v_4) = d_H(v_5) = 4$ 且 $f_3^H(v_4) = 3$, $f_3^H(v_5) = 2$ 或 $f_3^H(v_4) = 2$, $f_3^H(v_5) = 3$. 不妨设 $f_3^H(v_4) = 3$, $f_3^H(v_5) = 2$. 由 (R2) 知, $\tau(f_{vv_4} \rightarrow v_5) = \frac{d_H(f_{vv_4})-6}{d_H(f_{vv_4})} \geq \frac{1}{7}$. 这时由 (R2) 及引理 2.3 知, $\beta(v_5) \geq 2 - 1 - \frac{4}{5} + \frac{1}{7} = \frac{12}{35}$. 从而, $\tau(v \rightarrow f_4) - \tau(v_5 \rightarrow v) \leq \frac{23}{15} - \frac{\beta(v_5)}{2} = \frac{143}{105} < \frac{7}{5}$. 由 v 有性质 $\mathcal{P}$ 知, $d_H(f_{v_1u}) \geq 7$, $d_H(f_{v_3u}) \geq 7$, 且 $d_H(f_i) \geq 7, i = 3, 5$. 当 $d_H(v_1) \geq 5$ 且 $d_H(v_3) \geq 5$ 时, 由 (R1) 和 (R2) 知, $\beta(v_2) \geq 2 - \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{7} \times 4 = \frac{4}{7}$. 由引理 2.3 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{5}{4} \times 2 - \frac{23}{15} + \frac{\beta(v_2)}{4} = \frac{23}{210}$. 由对称性, 不妨设 $d_H(v_1) = 4$, 则 $f_3^H(v_1) = 2$. 由 (R2) 知, $\tau(f_{v_1u} \rightarrow v_2) \geq \frac{d_H(f_{v_1u})-6}{d_H(f_{v_1u})-1} \geq \frac{1}{6}$, $\tau(f_5 \rightarrow v_2) \geq \frac{d_H(f_5)-6}{d_H(f_5)-1} \geq \frac{1}{6}$. 当 $d_H(v_3) = 4$ 时, 由 (P3) 知, $v_1v_3 \in E(G)$, 即 $v_1v_3 \in E(H)$. 从而, v 是 H 的割点, 与 H 是 2- 连通图矛盾. 故可设 $d_H(v_3) \geq 5$. 当 $d_H(u) \geq 5$ 时, 由 (R1) 和 (R2) 知, $\beta(v_1) \geq 2 - \frac{4}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$, $\beta(v_2) \geq 2 - \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{7} \times 2 + \frac{1}{6} \times 2 = \frac{13}{21}$. 由 (R1) 和 (R3) 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{17}{10} - \frac{5}{4} + \frac{\beta(v_2)}{3} + \frac{\beta(v_1)}{2} - \tau(v \rightarrow f_4) + \tau(v_5 \rightarrow v) + \tau(v_4 \rightarrow v) \geq 4 - \frac{17}{10} - \frac{5}{4} + \frac{13}{63} + \frac{1}{5} - \frac{7}{5} = \frac{71}{1260}$. 当 $d_H(u) = 4$ 且 $u \in V_0(H)$ 时, $f_{v_1v_2}$ 是轻面. 由 (R2) 知, $\tau(f_{v_1u} \rightarrow v_2) \geq \frac{d_H(f_{v_1u})-6}{d_H(f_{v_1u})-2} \geq \frac{1}{5}$, $\tau(f_{v_3u} \rightarrow v_2) \geq \frac{1}{6}$,

$\tau(f_5 \rightarrow v_2) \geq \frac{1}{6}$. 由 (R1) 和 (R2) 知, $\beta(v_1) \geq 2 - 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$, $\beta(v_2) \geq 2 - 1 - \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{37}{210}$. 若 $d_H(v_3) = 5$, 由 (P6), 以及 G 不含 G_2 作为子图知, $v_3 v_1 \in E(G)$, 即 $v_1 v_3 \in E(H)$. 从而, v_3 不是特殊 5- 点. 若 $d_H(v_3) = 6$, 由定义可见 v_3 不是 v_2 的汇点. 故 $n_s^H(v_2) \leq 1$. 由 (R1) 和 (R3) 知, $w'(v) \geq 4 - \frac{17}{10} - \frac{5}{4} + \beta(v_1) + \beta(v_2) - \tau(v \rightarrow f_4) + \tau(v_5 \rightarrow v) + \tau(v_4 \rightarrow v) \geq 4 - \frac{17}{10} - \frac{5}{4} + \frac{1}{5} + \frac{37}{210} - \frac{7}{5} = \frac{11}{420}$.

情形 3 $d_H(v) = k \geq 6$.

因为 v 有性质 $\mathcal{P}$, 所以, v 至多与连续的三个 3- 面相邻. 故 $f_3^H(v) \leq \lfloor \frac{3}{4}k \rfloor$. 按 v 是否与三个连续 3- 面相邻分情形讨论.

情形 3.1 v 与三个连续 3- 面相邻.

不妨设 $f_i = [vv_i v_{i+1}]$, $i = 1, 2, 3$. 则 v 与 3-、4- 和 5- 圈相关联. 由 v 有性质 $\mathcal{P}$ 知, v 不与 6- 圈相关联. 若 f_k 和 f_4 都为外面或内 6⁺- 面, 则由引理 2.3-2.6 知,

$$\begin{aligned} w'(v) &\geq 2k - 6 - \frac{21}{5} - \frac{17}{10} \times (f_3^H(v) - 3) - \frac{4}{5} \times (k - f_3^H(v) - 2) \\ &= \frac{6}{5}k - \frac{9}{10}f_3^H(v) - \frac{7}{2} \\ &\geq \frac{6}{5}k - \frac{9}{10} \times \left\lfloor \frac{3}{4}k \right\rfloor - \frac{7}{2} > 0. \end{aligned}$$

不妨设 f_4 为内 5⁻- 面. 由 v 不与 6- 圈相关联知, $d_H(f_4) \neq 5$, 即 $d_H(f_4) = 4$ 且 $f_4 = [vv_4 v_2 v_5]$. 从而, $v_4, v_2 \in V_0(H)$, $d_H(v_2) \geq 5$. 由 (R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_4) \leq \max\{0, \frac{2 - \frac{2}{5} \times n_4^H(f)}{4 - n_4^H(f)}\} \leq \frac{3}{5}$. 若 $v_1 \in V(H) \setminus V_0(H)$, 则由 (R0) 和 (R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq \frac{1}{2}$, $\tau(v \rightarrow f_k) = 0$. 又由 $d_H(v_2) \geq 5$ 和引理 2.3 知, $\tau(v \rightarrow f_2) \leq \frac{5}{4}$. 从而, 由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 2k - 6 - \frac{1}{2} - \frac{3}{5} - \frac{5}{4} - \frac{17}{10} \times (f_3^H(v) - 2) - \frac{4}{5} \times (k - f_3^H(v) - 2) = \frac{6}{5}k - \frac{9}{10}f_3^H(v) - \frac{67}{20} > 0$.

下设 $v_1 \in V_0(H)$. 从而, 由 v 不同时与 6- 圈相关联知, $d_H(f_k) \geq 7$, $d_H(f_{v_1 v_2}) \geq 7$. 故由 (R1)-(R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq \max\{1, \frac{3 - \frac{4}{5}}{2}\} = \frac{11}{10}$, $\tau(f_{v_1 v_2} \rightarrow v) \geq \frac{1}{7}$, 且 $\tau(v \rightarrow f_k) = 0$. 若 $v_3 \in V(H) \setminus V_0(H)$, 由 (R0) 和 (R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_i) \leq \frac{1}{2}$ ($i = 2, 3$). 故由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 2k - 6 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{11}{10} - \frac{3}{5} - \frac{17}{10} \times (f_3^H(v) - 3) - \frac{4}{5} \times (k - f_3^H(v) - 2) = \frac{6}{5}k - \frac{9}{10}f_3^H(v) - 2 > 0$. 故设 $v_3 \in V_0(H)$. 从而, 由 v 不与 6- 圈相关联知, $d_H(f_{v_2 v_3}) \geq 7$, $d_H(f_{v_3 v_4}) \geq 7$. 由 (R1)-(R3) 知, $\tau(v \rightarrow f_2) \leq \max\{1, \frac{3 - \frac{4}{5}}{2}\} = \frac{11}{10}$, $\tau(f_{v_i v_{i+1}} \rightarrow v) \geq \frac{1}{7}$ ($i = 2, 3$). 由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 2k - 6 - \frac{11}{10} \times 2 - \frac{3}{5} - \frac{17}{10} \times (f_3^H(v) - 2) - \frac{4}{5} \times (k - f_3^H(v) - 2) + \frac{1}{7} \times 3 = \frac{6}{5}k - \frac{9}{10}f_3^H(v) - \frac{118}{35} > 0$.

情形 3.2 v 不与三个连续 3- 面相邻.

故 v 至多与连续的两个 3- 面相邻, 即 $f_3^H(v) \leq \lfloor \frac{2}{3}k \rfloor$. 从而, 由引理 2.3-2.5 知,

$$\begin{aligned} w'(v) &\geq 2k - 6 - \frac{17}{10} \times f_3^H(v) - \frac{4}{5} \times (k - f_3^H(v)) \\ &= \frac{6}{5}k - \frac{9}{10}f_3^H(v) - 6 \end{aligned} \quad (2.1a)$$

$$\geq \frac{6}{5}k - \frac{9}{10} \times \left\lfloor \frac{2}{3}k \right\rfloor - 6. \quad (2.1b)$$

当 $k \geq 10$ 时, 由 (2.1b) 得 $w'(v) \geq \frac{6}{5} \times k - \frac{9}{10} \times \lfloor \frac{2}{3}k \rfloor - 6 \geq 0$.

当 $k = 9$ 时, 有 $w(v) = 12$ 且 $f_3^H(v) \leq \lfloor \frac{2}{3}k \rfloor = 6$. 若 $f_3^H(v) \leq 5$, 则由 (2.1a) 得 $w'(v) \geq \frac{6}{5} \times 9 - \frac{9}{10} \times 5 - 6 = \frac{3}{10}$. 若 $f_3^H(v) = 6$, 由 v 至多与连续的两个 3- 面相邻知, f_1, f_2, f_4, f_5, f_7 和 f_8 为 3- 面. 若 v 至少与一个外面相关联, 则由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 12 - \max\{\frac{17}{10} \times 5 + \frac{4}{5} \times 3 + \frac{1}{2}, \frac{17}{10} \times 6 + \frac{4}{5} \times 2\} = \frac{1}{5}$.

故 v 不与外面相关联. 由引理 2.2, 以及 $(3, 4, 3)$ - 丛和 $(3, 3, 5, 5^-)$ - 丛不存在知, $d_H(f_i) \geq 6$, $i = 3, 6, 9$. 从而, 由引理 2.3 知, $w'(v) \geq 12 - \frac{17}{10} \times 6 = \frac{9}{5}$.

当 $k = 8$ 时, 有 $w(v) = 10$ 且 $f_3^H(v) \leq \lfloor \frac{2}{3}k \rfloor = 5$. 若 $f_3^H(v) \leq 4$, 则由 (2.1a) 得 $w'(v) \geq \frac{6}{5} \times 8 - \frac{9}{10} \times 4 - 6 = 0$. 若 $f_3^H(v) = 5$, 则由 v 至多与连续的两个 3- 面相邻知, f_1, f_2, f_4, f_5 和 f_7 为 3- 面. 若 $\exists f_i$ ($i = 1, 2, 4, 5, 7$) 为外面, 则由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 10 - \frac{17}{10} \times 4 - \frac{1}{2} - \frac{4}{5} \times 3 = \frac{3}{10}$. 故 f_i ($i = 1, 2, 4, 5, 7$) 为内面. 若 v 至少与两个外 4^+ - 面相关联, 由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 10 - \frac{17}{10} \times 5 - \frac{4}{5} \times 1 = \frac{7}{10}$. 故 v 至多与一个外 4^+ - 面相关联. 由引理 2.2, 以及 G 不含 $(3, 4, 3)$ - 丛和 $(3, 3, 5, 5^-)$ - 丛知, v 至少与两个内 6^+ - 面相关联. 由引理 2.3 知, $w'(v) \geq 10 - \frac{17}{10} \times 5 = \frac{3}{2}$.

当 $k = 7$ 时, $w(v) = 8$ 且 $f_3^H(v) \leq \lfloor \frac{2}{3}k \rfloor = 4$. 如果 $f_3^H(v) \leq 2$, 则由 (2.1a) 得 $w'(v) \geq \frac{6}{5} \times 7 - \frac{9}{10} \times 2 - 6 = \frac{3}{5}$. 设 $f_3^H(v) = 3$. 若 v 至少与一个外面相关联, 由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 8 - \max\{\frac{17}{10} \times 3 + \frac{4}{5} \times 3, \frac{17}{10} \times 2 + \frac{4}{5} \times 4 + \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$. 故 v 不与外面相关联. 当 $d_H(f_1) = d_H(f_2) = 3$ 时, 由引理 2.2, 以及 G 不含 $(3, 3, 4, 5^-)$ - 丛和 $(3, 3, 5, 5^-)$ - 丛知, $\max\{d_H(f_3), d_H(f_4)\} \geq 6$. 故由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 8 - \frac{17}{10} \times 3 - \frac{4}{5} \times 3 = \frac{1}{2}$. 故可设 $d_H(f_1) = d_H(f_3) = d_H(f_5) = 3$. 当 $d_H(v_1) = d_H(v_2) = 4$ 时, 有 $f_3^H(v_1) \leq 3$ 且 $f_3^H(v_2) \leq 3$. 从而, 由引理 2.3 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq \frac{5}{3}$, 且当 $\tau(v \rightarrow f_1) = \frac{5}{3}$ 时, 有 $d_H(v_1) = d_H(v_2) = 4$ 及 $f_3^H(v_1) = f_3^H(v_2) = 3$. 令与 v_2 相关联的另两个 3- 面为 $f_{v_1v_2} = [v_1v_2x]$ 和 $f' = [v_2xy]$, 则由 v 有性质 $\mathcal{P}$ 知, 与 v_1 相关联的另两个 3- 面为 $f_{v_1v_2}$ 和 $f'' = [v_1xy]$, 从而, $x \in V(H) \setminus V_0(H)$. 故当 $i \in \{3, 5\}$ 时, 若 $d_H(v_i) = d_H(v_{i+1}) = 4$, 则 $f_3^H(v_i) + f_3^H(v_{i+1}) \leq 5$. 由引理 2.3 知, $\tau(v \rightarrow f_i) \leq \frac{23}{15}$. 由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 8 - \frac{5}{3} - \frac{23}{15} \times 2 - \frac{4}{5} \times 4 = \frac{1}{15}$. 设 $f_3^H(v) = 4$. 若与 v 关联的 3- 面中至少有一个外面, 则由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 8 - \frac{17}{10} \times 3 - \frac{1}{2} - \frac{4}{5} \times 3 = 0$. 故与 v 关联的 3- 面全为内面. 若 v 至少与两个外 4^+ - 面相关联, 则由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 8 - \frac{17}{10} \times 4 - \frac{4}{5} \times 1 = \frac{2}{5}$. 故 v 至多与一个外 4^+ - 面相关联. 当 f_1, f_2, f_4 和 f_6 为 3- 面时, 由引理 2.2, 以及 G 不含 $(3, 3, 4, 5^-)$ - 丛和 $(3, 3, 5, 5^-)$ - 丛知, f_3 和 f_7 为外 4^+ - 面或内 6^+ - 面. 故由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 8 - \frac{17}{10} \times 4 - \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$. 故可设 f_1, f_2, f_4 和 f_5 为 3- 面, 由引理 2.2, 以及 G 不含 $(3, 3, 4, 5^-)$ - 丛和 $(3, 3, 5, 5^-)$ - 丛知, f_3 为外 4^+ - 面或内 6^+ - 面; f_6 和 f_7 中至少有一个外 4^+ - 面或内 6^+ - 面. 故由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 8 - \frac{17}{10} \times 4 - \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$.

当 $k = 6$ 时, 有 $w(v) = 6$ 且 $f_3^H(v) \leq \lfloor \frac{2}{3}k \rfloor = 4$. 如果 $f_3^H(v) \leq 1$, 则由 (2.1a) 可得 $w'(v) \geq \frac{6}{5} \times 6 - \frac{9}{10} \times 1 - 6 = \frac{3}{10}$. 下设 $2 \leq f_3^H(v) \leq 4$.

(i) 假设 $f_3^H(v) = 2$. 若 v 至少与一个外面相关联, 由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 6 - \max\{\frac{17}{10} \times 2 + \frac{4}{5} \times 3, \frac{17}{10} \times 1 + \frac{4}{5} \times 4 + \frac{1}{2}\} = \frac{1}{5}$. 故 v 不与外面相关联. 若 $f_6^H(v) \geq 1$, 则由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 6 - \frac{17}{10} \times 2 - \frac{4}{5} \times 3 = \frac{1}{5}$. 下设 $f_6^H(v) = 0$. 当 $d_H(f_1) = d_H(f_2) = 3$ 时. 由引理 2.2, 以及 G 不含 $(3, 3, 4, 5^-)$ - 丛和 $(3, 3, 5, 5^-)$ - 丛知, $\max\{d_H(f_3), d_H(f_4)\} \geq 6$, 与 $f_6^H(v) = 0$ 矛盾. 设 $d_H(f_1) = d_H(f_3) = 3$. 由引理 2.2, 以及 G 不含 $(3, 4, 3)$ - 丛和 $(4, 3, 5)$ - 丛知, $d_H(f_i) = 5$, $i = 2, 4, 6$. 由引理 2.2(2) 知, f_1 与 f_2, f_2 与 f_3 正常相邻. 由引理 2.4 和 2.7 得 $w'(v) \geq 6 - \frac{7}{5} \times 2 - \frac{4}{5} \times 4 = 0$. 设 $d_H(f_1) = d_H(f_4) = 3$, 由引理 2.2, 以及 G 不含 $(3, 4, 4, 5^-)$ - 丛知, $d_H(f_2) = 5$ 或 $d_H(f_3) = 5$. 不妨设 $d_H(f_2) = 5$. 又由引理 2.2, 以及 G 不含 $(4, 3, 5)$ - 丛知, $d_H(f_6) = 5$. 由 H 的平面性可知, f_1 与 f_6, f_1 与 f_2 正常相邻. 故由引理 2.3、2.4 和 2.7 知, $w'(v) \geq 6 - \frac{9}{5} - \frac{17}{10} - \frac{4}{5} \times 3 = \frac{1}{10}$.

(ii) 假设 $f_3^H(v) = 3$. 若 $\exists i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 使得 $v_i \in V(H) \setminus V_0(H)$, 由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 6 - \max\{\frac{1}{2} + \frac{17}{10} \times 2 + \frac{4}{5} \times 2, \frac{1}{2} \times 2 + \frac{17}{10} + \frac{4}{5} \times 3, \frac{17}{10} \times 3 + \frac{4}{5}\} = \frac{1}{10}$. 故对任意 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 有 $v_i \in V_0(H)$. 当 $d_H(f_1) = d_H(f_2) = d_H(f_4) = 3$ 时, 由引理 2.2, 以及 G 不含 $(3, 3, 4, 5^-)$ - 丛和 $(3, 3, 5, 5^-)$ - 丛知, f_3 为外 4^+ - 面或内 6^+ - 面; f_5 和 f_6 中至少有一个外 4^+ - 面或内 6^+ - 面. 故由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 6 - \frac{17}{10} \times 3 - \frac{4}{5} = \frac{1}{10}$. 设 $d_H(f_1) = d_H(f_3) = d_H(f_5) = 3$. 若 f_2, f_4 和 f_6 中至

少有两个外 4^+ - 面或内 6^+ - 面, 则由引理 2.3-2.5 知, $w'(v) \geq 6 - \frac{17}{10} \times 3 - \frac{4}{5} = \frac{1}{10}$. 下设 f_2 、 f_4 和 f_6 中恰有一个外 4^+ - 面, 不妨设为 f_2 , 则 f_4 和 f_6 为内 5^- - 面. 由引理 2.2, 以及 G 不含 $(3, 4, 3)$ - 丛知, $d_H(f_4) = d_H(f_6) = 5$. 再由引理 2.2(2) 知, f_3 与 f_4 、 f_5 与 f_6 正常相邻. 由引理 2.4、2.5 和 2.7 知, $w'(v) \geq 6 - \frac{7}{5} \times 3 - \frac{4}{5} \times 2 = \frac{1}{5}$. 故设 f_2 、 f_4 和 f_6 皆为内面. 若 $f_6^H(v) = 1$, 不妨设 $d_H(f_2) \geq 6$. 由引理 2.2, 以及 G 不含 $(3, 4, 3)$ - 丛知, $d_H(f_4) = d_H(f_6) = 5$. 再由引理 2.2(2) 知, f_3 与 f_4 、 f_5 与 f_6 正常相邻. 由引理 2.4、2.5 和 2.7 知, $w'(v) \geq 6 - \frac{7}{5} \times 3 - \frac{4}{5} \times 2 = \frac{1}{5}$. 下设 $f_6^H(v) = 0$. 由引理 2.2, 以及 G 不含 $(3, 4, 3)$ - 丛知, $d_H(f_i) = 5$, $i = 2, 4, 6$. 再由引理 2.2(2) 知, f_i 与 f_{i+1} 正常相邻, $i = 1, 2, \dots, 5$. 由 (P6) 可得 $\exists i \in \{1, 2, \dots, 6\}$, 使 $d_H(v_i) \geq 5$, 或者 f_2 、 f_4 和 f_6 中有两个面至少关联两个 5^+ - 点. 设 $\exists i \in \{1, 2, \dots, 6\}$, 使得 $d_H(v_i) \geq 5$. 不妨设 $d_H(v_1) \geq 5$. 由 (R1) 知, $\tau(v \rightarrow f_1) \leq \frac{3-\frac{3}{2}}{2} = \frac{7}{6}$. 再由引理 2.5 和 2.7 知, $w'(v) \geq 6 - \frac{7}{5} \times 2 - \frac{7}{6} - \frac{2}{5} - \frac{4}{5} \times 2 = \frac{1}{30}$. 故设 f_2 、 f_4 和 f_6 中有两个面至少关联两个 5^+ - 点, 由引理 2.5 和 2.7 知, $w'(v) \geq 6 - \frac{7}{5} \times 3 - \frac{2}{5} \times 2 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

(iii) 假设 $f_3^H(v) = 4$, 即 $d_H(f_1) = d_H(f_2) = d_H(f_4) = d_H(f_5) = 3$. 易见 v 与 3- 圈和 4- 圈相关联. 由 v 有性质 $\mathcal{P}$ 知, $d_H(f_3) \neq 4$. 若 $d_H(f_3) = 5$, 则由 v 有性质 $\mathcal{P}$ 知, f_3 与 f_2 、 f_3 与 f_4 都非正常相邻. 从而, $f_3 = [vv_3v_2v_5v_4]$. 故 $d_H(v_3) = d_H(v_4) = 2$, 即 $v_3, v_4 \in V(H) \setminus V_0(H)$, 与 H 的定义矛盾. 故 $d_H(f_3) \geq 6$. 同理可证 $d_H(f_5) \geq 6$. 若 $d_H(v_2) \geq 5$, 则由引理 2.3 知, $w'(v) \geq 6 - \frac{17}{10} \times 2 - \frac{5}{4} \times 2 = \frac{1}{10}$. 故 $d_H(v_2) = 4$. 由对称性, 有 $d_H(v_5) = 4$. 记 $\beta_{12} = \tau(v \rightarrow f_1) + \tau(v \rightarrow f_2) - \sum_{i=1}^3 \tau(v_i \rightarrow v) - \tau(f_{v_1v_2} \rightarrow v) - \tau(f_{v_2v_3} \rightarrow v)$. 下证 $\beta_{12} \leq 3$. 若 $\exists i \in \{1, 2, 3\}$, 使 $v_i \in V(H) \setminus V_0(H)$, 则 $\beta_{12} \leq \tau(v \rightarrow f_1) + \tau(v \rightarrow f_2) \leq \frac{1}{2} + \frac{17}{10} = \frac{11}{5}$. 故 $v_i \in V_0(H)$ ($\forall i = 1, 2, 3$). 若 v_1 和 v_3 中至少有一个 5^+ - 点, 则由引理 2.3 知, $\beta_{12} \leq \tau(v \rightarrow f_1) + \tau(v \rightarrow f_2) \leq \frac{5}{4} + \frac{17}{10} = \frac{59}{20}$. 故可设 $d_H(v_1) = d_H(v_3) = 4$. 此时, v 是特殊点且 v 是 v_1 、 v_2 和 v_3 的汇点. 当 $f_3^H(v_2) = 2$ 时, 有 $f_3^H(v_1) \leq 2$ 且 $f_3^H(v_3) \leq 2$. 由引理 2.3 知, $\beta_{12} \leq \tau(v \rightarrow f_1) + \tau(v \rightarrow f_2) \leq \frac{7}{5} \times 2 = \frac{14}{5}$. 设 $f_3^H(v_2) = 3$. 不妨设 $d_H(f_{v_1v_2}) = 3$, 即 $f_{v_1v_2} = [v_1v_2u]$. 从而, $f_3^H(v_3) \leq 2$ 且 $f_3^H(v_1) \leq 3$. 当 $f_3^H(v_1) = 3$ 时, 由 v 有性质 $\mathcal{P}$ 知, 与 v_1 相关联的第三个 3- 面为 $[v_1uv_3]$. 根据 $d_H(v_1) = d_H(v_3) = 4$ 可知, v 是 H 的割点, 与 H 是 2- 连通图矛盾. 从而, $f_3^H(v_1) \leq 2$. 由引理 2.3 知, $\tau(v \rightarrow f_i) \leq \frac{23}{15}$, $i = 1, 2$. 另一个方面, 由 v 有性质 $\mathcal{P}$ 知, $d_H(f_{v_2v_3}) \geq 7$. 由 (R2) 知, $\tau(f_{v_2v_3} \rightarrow v) \geq \frac{1}{7}$. 故 $\beta_{12} \leq \tau(v \rightarrow f_1) + \tau(v \rightarrow f_2) - \tau(f_{v_2v_3} \rightarrow v) \leq \frac{23}{15} \times 2 - \frac{1}{7} = \frac{307}{105}$. 设 $f_3^H(v_2) = 4$. 记 $f_{v_1v_2} = [v_1v_2u]$ 且 $f_{v_2v_3} = [v_2v_3u]$. 由 v_1 及 v_3 有性质 $\mathcal{P}$ 知, f_{v_1u} 及 f_{v_3u} 或为外面, 或为内 6^+ - 面. 由 v 不是 H 的割点知, $v_1v_3 \notin E(H)$, 即 $v_1v_3 \notin E(G)$. 由 (P3) 知, $d_G(u) \geq 5$, 即 $f_{v_1v_2}$ 和 $f_{v_2v_3}$ 不是轻 3- 面. 由 (R1) 知, $\beta(v_1) \geq 2 - \frac{4}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$ 且 $\beta(v_3) \geq 2 - \frac{4}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$. 从而, 由引理 2.3 知, $\beta_{12} \leq \tau(v \rightarrow f_1) + \tau(v \rightarrow f_2) - \tau(v_1 \rightarrow v) - \tau(v_3 \rightarrow v) \leq \frac{17}{10} \times 2 - \frac{\beta(v_1)}{2} - \frac{\beta(v_3)}{2} = \frac{17}{10} \times 2 - \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = 3$. 综上, 可得 $\beta_{12} \leq 3$. 由对称性, 有 $\beta_{45} = \tau(v \rightarrow f_4) + \tau(v \rightarrow f_5) - \sum_{i=4}^6 \tau(v_i \rightarrow v) - \tau(f_{v_4v_5} \rightarrow v) - \tau(f_{v_5v_6} \rightarrow v) \leq 3$. 因此, $w'(v) \geq 6 - \beta_{12} - \beta_{45} = 0$. $\square$

致谢 对审稿人提出的宝贵意见和建议深表谢意.

参考文献

- 1 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory. New York: Springer, 2008
- 2 Vizing V G. Vertex colorings with given colors (in Russian). Metody Diskret Anal, 1976, 29: 3–10
- 3 Erdős P, Rubin A L, Taylor H. Choosability in graphs. Congr Number, 1979, 26: 125–157
- 4 Thomassen C. Every planar graph is 5-choosable. J Combin Theory Ser B, 1994, 62: 180–181
- 5 Voigt M. List colourings of planar graphs. Discrete Math, 1993, 120: 215–219
- 6 Mirzakhani M. A small non-4-choosable planar graph. Bull Inst Combin Appl, 1996, 17: 15–18
- 7 Gutner S. The complexity of planar graph choosability. Discrete Math, 1996, 159: 119–130

- 8 Lam P C B, Xu B G, Liu J Z. The 4-choosability of plane graphs without 4-cycles. *J Combin Theory Ser B*, 1999, 76: 117–126
- 9 Wang W, Lih K W. Choosability and edge choosability of planar graphs without five cycles. *Appl Math Lett*, 2002, 15: 561–565
- 10 Wang W, Lih K W. The 4-choosability of planar graphs without 6-cycles. *Australas J Combin*, 2001, 24: 157–164
- 11 Farzad B. Planar graphs without 7-cycles are 4-choosable. *SIAM J Discrete Math*, 2009, 23: 1179–1199
- 12 Wang W F, Lih K W. Choosability and edge choosability of planar graphs without intersecting triangles. *SIAM J Discrete Math*, 2002, 15: 538–545
- 13 Borodin O V, Ivanova A O. Planar graphs without triangular 4-cycles are 4-choosable. *Siberian Electronic Math Reports*, 2008, 5: 75–79
- 14 Xu R, Wu J L. A sufficient condition for a planar graph to be 4-choosable. *Discrete Appl Math*, 2017, 224: 120–122
- 15 Hu D Q, Wu J L. Planar graphs without intersecting 5-cycles are 4-choosable. *Discrete Math*, 2017, 340: 1788–1792
- 16 Cheng P, Chen M, Wang Y. Planar graphs without 4-cycles adjacent to triangles are 4-choosable. *Discrete Math*, 2016, 339: 3052–3057
- 17 Chang G J, Hou J, Roussel N. Local condition for planar graphs of maximum degree 7 to be 8-totally colorable. *Discrete Appl Math*, 2011, 159: 760–768

A local condition for planar graphs to be 4-choosable

Danjun Huang, Jing Lyu & Weifan Wang

Abstract For a given list assignment L , a graph G is list L -colorable if there exists a proper coloring c of the vertices such that $c(v) \in L(v)$ for all $v \in V(G)$. If G is list L -colorable for every list assignment L with $|L(v)| \geq k$ for all $v \in V(G)$, then G is k -choosable. In this paper, we give a local condition for planar graphs to be 4-choosable, i.e., we show that if G is a planar graph having no vertex incident to 3-, 4-, 5-, 6-cycles simultaneously, then G is 4-choosable.

Keywords planar graph, choosability, cycle

MSC(2010) 05C15

doi: 10.1360/N012018-00188