小推力限制性三体系统下稳定平动点附近的高阶解

雷汉伦*, 徐波

南京大学天文与空间科学学院, 南京 210093

* E-mail: hanlunlei@sina.com

收稿日期: 2014-12-17; 接受日期: 2015-06-14

国家重点基础研究发展计划(批准号: 2013CB834103)、国家高技术研究发展计划(批准号: 2012AA121602)、国家自然科学基金(批准号: 11078001)和中央高校基本科研业务费(批准号: CXZZ13_0042)资助项目

摘要 小推力可使得限制性三体系统下的非平衡点转变为人工平动点, 处于该点的航天器在会合系下与两主天体相对静止. 人工平动点丰富了经典限制性三体系统的平动点轨道资源, 可较大程度地满足深空任务对平动点轨道的需求, 从而使得任务设计更加灵活. 稳定人工平动点附近的轨道有较好的稳定性, 以此为任务轨道只需少许的燃料消耗即可实现轨道保持. 考虑到稳定人工平动点的动力学性质, 将其附近的拟周期轨道展开为长周期振幅、短周期振幅以及垂直周期振幅的级数解形式, 构造了任意高阶的级数解. 构造的级数解可较好地近似人工平动点附近的运动, 并且表征这些轨道的参数有助于平动点任务的轨道设计. 为了研究级数解的适用范围, 最后对其收敛域进行了计算.

关键词

圆型限制性三体问题
人工平动点
周期轨道

1 引言

圆型或椭圆型限制性三体问题研究的是质量可以忽略的小天体或航天器的运动, 该系统存在 5 个特解, 对应于 5 个平动点^[1]. 由于平动点特殊的几何构型以及丰富的动力学特征, 在深空探测中有着重要的应用^[2]. 与主天体共线的三个为共线平动点, 具有不稳定的动力学性质, 附近存在中心流形(Lissajous 和 Halo 轨道)和双曲流形(稳定和不稳定流形)^[1]. 与主天体构成等边三角形的两个为三角平动点, 在系统质量参数满足 $\mu < \mu_c$ (Routh 临界质量, 值为 0.0385.....)时具有稳定的动力学性质, 附近存在长周期、短周期以及垂直周期轨道^[3].

在经典的限制性三体系统下引入太阳帆或者连续小推力可让非平衡点处主天体引力和航天器向心力达到平衡, 从而获得人工平动点^[4]. 人工平动点大大丰富了经典限制性三体系统下的平动点轨道资源, 使得实际任务设计更加灵活. 产生人工平动点的两种推进方式中, 太阳帆推进的优点是无需燃料消耗, 缺点是太阳帆推力不能指向太阳, 使得某些空间位置不能转变为人工平动点; 连续小推力方式的优点是空间任一非平衡点均可以转变为人工平动点, 缺点是有燃料消耗.

太阳帆限制性三体系统下人工平动点的分布与太阳帆的面质比和方位角(俯仰角和偏航角)有关. McInnes 等人^[5]以日-地和地-月系为研究对象, 计算

引用格式: 雷汉伦, 徐波. 小推力限制性三体系统下稳定平动点附近的高阶解. 中国科学: 技术科学, 2015, 45: 1207–1217
Lei H L, Xu B. High-order solutions around the stable libration points in the low-thrust restricted three-body system (in Chinese). Sci Sin Tech, 2015, 45: 1207–1217, doi: 10.1360/N092014-00257

了太阳帆限制性三体问题下人工平动点集合, 然后在文献[6]中探讨了太阳帆技术在实际任务中的应用. 当太阳帆指向为太阳和航天器连线或日-地连线时, 太阳帆限制性三体问题和经典的限制性三体问题类似, Baoyin 和 McInnes^[7]利用 Lindstedt-Poincaré 方法推导了日-地连线上的人工平动点附近的 Halo 轨道的三阶解. Waters 和 McInnes^[8]以日-地系为例, 构造了位于 x - z 平面上人工平动点附近大振幅周期轨道的高阶解, 并获得一类具有特殊应用的周年轨道, 可用于对地球极地进行长时间的成像或观测. Gong 等人^[9]研究了太阳帆 Hill 限制性三体系统下人工平动点附近不变流形在低能转移轨道设计方面的应用. 由于太阳帆参数(面质比、俯仰角和偏航角)可以控制, 通过改变太阳帆参数, 可以实现对平动点航天器的轨道保持^[10,11].

通过安装在航天器上的电推进系统产生的连续小推力与航天器的空间相对位置无关, 而且推力方向没有任何约束, 这种方式可以弥补太阳帆推进方式的缺点. Morimoto 等人^[12]计算了小推力限制性三体系统下空间任一非平衡点转变成人工平动点需要的推力大小和方向; 为了判断人工平动点的线性化动力学性质, 引入了三次方程的判别式和符号规则. Morimoto 等人在文献[13]中研究了小推力限制性三体系统下与主天体共线的人工平动点附近的周期轨道. 和 Richardson^[14]推导经典限制性三体系统下 Halo 轨道的三阶分析解的过程类似, Baig 和 McInnes^[15]推导了小推力限制性三体系统下 Halo 轨道的三阶分析解, 并以此为初值, 采用微分修正法计算了日-地系 L_1 点以内和 L_2 点以外的人工平动点附近的 Halo 轨道. 需要说明的是这些轨道在太阳帆限制性三体问题下不存在. 侯锡云和刘林^[16]将小推力限制性三体系统下 Lissajous 轨道展开为平面内和垂直平面振幅的级数形式, 并用 Lindstedt-Poincaré 方法构造了高阶解. 有趣的是, Ceccaroni 和 Biggs^[17]将小推力引入限制性四体问题, 并以太阳-木星-Trojan 小天体-航天器为研究对象计算了该系统下的人工平动点, 并获得 Trojan 小天体附近稳定人工平动点的空间分布.

人工平动点的动力学性质由三体系统的质量参数和小推力参数共同决定. 相较于不稳定人工平动点而言, 稳定人工平动点附近的轨道有较好的稳定性, 以此类型轨道作为任务轨道只需少许的燃料消耗

即可实现轨道保持. 我们利用文献[12]中判断平动点的动力学性质的方法, 计算了日-地系稳定人工平动点的平面分布. 根据稳定人工平动点的动力学性质, 将其附近的运动展开为长周期、短周期和垂直周期振幅的级数形式, 在计算机辅助下半分析地构造了高阶级数解. 本文构造的级数解可以近似稳定人工平动点附近的长周期、短周期、垂直周期轨道以及一般的拟周期轨道.

需要说明的是, 本文考虑的人工平动点是三维空间的一个点的情况. 当人工平动点位于主天体轨道面或者与主天体共线时, 构造过程类似于经典限制性三体系统下三角平动点附近分析解构造以及共线平动点附近 Lissajous 轨道分析解构造^[18,19], 不再单独讨论.

2 动力学模型

在研究限制性三体问题时, 通常取主天体质量之和、主天体间的距离为质量与长度量纲, 另外, 选取合适的时间量纲使得主天体的周期为 2π . 在该量纲系统下, 万有引力常数 G 和角速度 n 的值均为 1.0. 通常在质心旋转坐标系下研究航天器的运动, 该坐标系记为 C -XYZ, 其原点位于系统质心, X 轴为原点指向次主天体的方向, Z 轴和主天体角动量方向一致, Y 轴方向由右手系决定. 在该坐标系下, 小推力限制性三体系统下航天器的运动方程为^[3,15]

$$\ddot{\mathbf{R}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}} = \nabla \Omega + \mathbf{a}_0, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{a}_0$ 为推力加速度矢量, Ω 为经典限制性三体系统下的引力势函数:

$$\Omega = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \frac{1-\mu}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu), \quad (2)$$

μ 为次主天体的无量纲质量, 定义为 $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$, 其中 m_1, m_2 分别为两主天体的质量. R_1 和 R_2 分别为航天器与主天体和次主天体之间的距离. 系统(1)的平动点对应于航天器的速度和加速度均为零的解, 其位置和推力加速度的对应关系为

$$\mathbf{a}_0 = -\nabla \Omega. \quad (3)$$

对于空间任一非自然平衡点 $\mathbf{R}_0 = (X_0, Y_0, Z_0)^T$, 施加如(3)式所示的推力加速度, 可使得该点转变为平动点, 为了区别于传统的平动点, 称为人工平动点 (Artificial Equilibrium Point, AEP). 系统(1)为定常微

分系统, 存在与经典圆型限制性三体系统类似的运动积分^[15]:

$$C = 2\Omega + 2\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{R} - V^2. \quad (4)$$

对于给定的推力加速度(对应于某一固定人工平动点), 运动积分定义了航天器运动的可行与禁止区域. 零推力加速度对应于经典的限制性三体系统, 该系统存在 5 个特解, 位于 X 轴的共线平动点附近的线性化方程具有中心 $\times$ 中心 $\times$ 鞍点的动力学性质, 与主天体构成等边三角形的三角平动点在系统参数满足 $\mu < \mu_c$ 时是稳定的^[3]. 关于经典限制性三体系统下共线平动点附近的中心流形以及不变流形的研究已经非常丰富^[20~24], 关于三角平动点, 大多数研究均集中在稳定性方面, 其附近的周期、拟周期轨道最近已有研究^[18,25].

为了研究人工平动点 $\mathbf{R}_0$ 附近的运动, 通常将坐标系的原点移至该平动点, 坐标轴与原坐标系的坐标轴指向一致. 并且, 取人工平动点和与该点最近的主天体之间的距离 χ 为新的长度单位, 记该坐标系为 E -xyz. 坐标系 E -xyz 下航天器的状态量记为 $\mathbf{x}$, 则与质心旋转坐标系下的状态量 $\mathbf{X}$ 的转换关系为

$$\chi \mathbf{x} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0, \quad (5)$$

其中 $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{R}_0; \dot{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{0})$ 为平动点在质心旋转坐标系下的状态量. 记航天器在坐标系 E -xyz 和 C -XYZ 下的位置矢量分别为 $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ 和 $\mathbf{R} = (X, Y, Z)^T$; 记两主天体在坐标系 C -XYZ 下的位置矢量为 (X_1, Y_1, Z_1) 和 (X_2, Y_2, Z_2) . 那么, 航天器与主天体间的距离 R_i ($i=1, 2$) 可表示为

$$R_i^2 = \chi^2 \left[\left(x - \frac{X_i - X_0}{\chi} \right)^2 + \left(y - \frac{Y_i - Y_0}{\chi} \right)^2 + \left(z - \frac{Z_i - Z_0}{\chi} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

若记 $A_i = \frac{X_i - X_0}{\chi}$, $B_i = \frac{Y_i - Y_0}{\chi}$ 以及 $C_i = \frac{Z_i - Z_0}{\chi}$,

那么势函数 Ω 中的 $1/R_i$ 可表示为

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{\chi} \frac{1}{\sqrt{(x - A_i)^2 + (y - B_i)^2 + (z - C_i)^2}}. \quad (7)$$

利用 Legendre 展开, 可将(7)式展开为关于 Legendre 多项式 $P_n(\delta_i)$ 的求和形式:

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{\chi} \frac{1}{D_i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{D_i} \right)^n P_n(\delta_i), \quad i=1, 2, \quad (8)$$

其中 $D_i^2 = A_i^2 + B_i^2 + C_i^2$, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 以及

$$\delta_i = \frac{A_i x + B_i y + C_i z}{D_i \rho}. \quad \text{令 } T_n^{\delta_i} = \left(\frac{\rho}{D_i} \right)^n P_n(\delta_i), \quad (8) \text{ 式可进一步简化为}$$

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{\chi} \frac{1}{D_i} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{\delta_i}, \quad i=1, 2. \quad (9)$$

定义如下关系式:

$$R_n^{\delta_i, x} = \frac{\partial T_n^{\delta_i}}{\partial x}, \quad R_n^{\delta_i, y} = \frac{\partial T_n^{\delta_i}}{\partial y}, \quad R_n^{\delta_i, z} = \frac{\partial T_n^{\delta_i}}{\partial z}. \quad (10)$$

可将坐标系 E -xyz 下小推力航天器的运动方程展开为如下形式:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - \Omega_{xx}^0 x - \Omega_{xy}^0 y - \Omega_{xz}^0 z = \frac{1}{\chi^3} \sum_{n \geq 3} \left(\frac{m_1}{D_1} R_n^{\delta_1, x} + \frac{m_2}{D_2} R_n^{\delta_2, x} \right), \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - \Omega_{yx}^0 x - \Omega_{yy}^0 y - \Omega_{yz}^0 z = \frac{1}{\chi^3} \sum_{n \geq 3} \left(\frac{m_1}{D_1} R_n^{\delta_1, y} + \frac{m_2}{D_2} R_n^{\delta_2, y} \right), \\ \ddot{z} - \Omega_{zx}^0 x - \Omega_{zy}^0 y - \Omega_{zz}^0 z = \frac{1}{\chi^3} \sum_{n \geq 3} \left(\frac{m_1}{D_1} R_n^{\delta_1, z} + \frac{m_2}{D_2} R_n^{\delta_2, z} \right), \end{cases} \quad (11)$$

其中 $m_1 = 1 - \mu$ 和 $m_2 = \mu$ 分别为两主天体的无量纲质量, Ω_{ij}^0 为有效势相对于坐标分量的二次偏导数在人工平动点处的取值. 齐次多项式 $R_n^{\delta_1, x}$, $R_n^{\delta_1, y}$ 和 $R_n^{\delta_1, z}$ 满足如下递推关系:

$$R_n^{\delta_i, x} = \frac{(2n-1)A_i}{nD_i^2} T_{n-1}^{\delta_i} - \frac{2(n-1)}{nD_i^2} x T_{n-2}^{\delta_i} + \frac{2n-1}{nD_i^2} (A_i x + B_i y + C_i z) R_{n-1}^{\delta_i, x} - \frac{n-1}{nD_i^2} \rho^2 R_{n-2}^{\delta_i, x}, \quad (12)$$

$$R_n^{\delta_i, y} = \frac{(2n-1)B_i}{nD_i^2} T_{n-1}^{\delta_i} - \frac{2(n-1)}{nD_i^2} y T_{n-2}^{\delta_i} + \frac{2n-1}{nD_i^2} (A_i x + B_i y + C_i z) R_{n-1}^{\delta_i, y} - \frac{n-1}{nD_i^2} \rho^2 R_{n-2}^{\delta_i, y}, \quad (13)$$

$$R_n^{\delta_i, z} = \frac{(2n-1)C_i}{nD_i^2} T_{n-1}^{\delta_i} - \frac{2(n-1)}{nD_i^2} z T_{n-2}^{\delta_i} + \frac{2n-1}{nD_i^2} (A_i x + B_i y + C_i z) R_{n-1}^{\delta_i, z} - \frac{n-1}{nD_i^2} \rho^2 R_{n-2}^{\delta_i, z}, \quad (14)$$

以及 $T_n^{\delta_i}$ 的递推关系为

$$T_n^{\delta_i} = \frac{2n-1}{nD_i^2} (A_i x + B_i y + C_i z) T_{n-1}^{\delta_i} - \frac{n-1}{nD_i^2} \rho^2 T_{n-2}^{\delta_i}. \quad (15)$$

$R_n^{\delta_i, x}$, $R_n^{\delta_i, y}$ 和 $R_n^{\delta_i, z}$ 的迭代初值为

$$\begin{cases} R_2^{\delta_i, x} = \frac{3A_i}{D_i^4} [A_i x + B_i y + C_i z] - \frac{x}{D_i^2}, \\ R_2^{\delta_i, y} = \frac{3B_i}{D_i^4} [A_i x + B_i y + C_i z] - \frac{y}{D_i^2}, \\ R_2^{\delta_i, z} = \frac{3C_i}{D_i^4} [A_i x + B_i y + C_i z] - \frac{z}{D_i^2}, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} R_3^{\delta_i, x} = \frac{15A_i}{2D_i^6} H_i - \frac{3}{2D_i^4} [A_i \rho^2 + 2A_i x^2 + 2B_i xy + 2C_i xz], \\ R_3^{\delta_i, y} = \frac{15B_i}{2D_i^6} H_i - \frac{3}{2D_i^4} [B_i \rho^2 + 2B_i y^2 + 2A_i xy + 2C_i yz], \\ R_3^{\delta_i, z} = \frac{15C_i}{2D_i^6} H_i - \frac{3}{2D_i^4} [C_i \rho^2 + 2C_i z^2 + 2A_i xz + 2B_i yz], \end{cases}$$

其中 $H_i = (A_i x + B_i y + C_i z)^2$. 多项式 $T_n^{\delta_i}$ 的递推初值为

$$\begin{cases} T_1^{\delta_i} = \frac{A_i x + B_i y + C_i z}{D_i^2}, \\ T_2^{\delta_i} = \frac{3}{2D_i^4} H_i - \frac{\rho^2}{2D_i^2}, \end{cases}$$

至此, 人工平动点附近的运动方程已建立完毕, 接下来主要基于该运动方程构造人工平动点附近运动的高阶解.

3 稳定人工平动点附近的高阶解

忽略运动方程(11)中的高阶项, 可得人工平动点附近的线性化方程:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - \Omega_{xx}^0 x - \Omega_{xy}^0 y - \Omega_{xz}^0 z = 0, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - \Omega_{yx}^0 x - \Omega_{yy}^0 y - \Omega_{yz}^0 z = 0, \\ \ddot{z} - \Omega_{zx}^0 x - \Omega_{zy}^0 y - \Omega_{zz}^0 z = 0, \end{cases} \quad (16)$$

该线性化系统的特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^6 + A\lambda^4 + B\lambda^2 + C, \quad (17)$$

其中 $A = 4 - \Omega_{xx}^0 - \Omega_{yy}^0 - \Omega_{zz}^0 = 2$, B 和 C 分别为

$$\begin{aligned} B &= \Omega_{xx}^0 \Omega_{zz}^0 + \Omega_{yy}^0 \Omega_{zz}^0 + \Omega_{xx}^0 \Omega_{yy}^0 \\ &\quad - (\Omega_{xy}^0)^2 - (\Omega_{xz}^0)^2 - (\Omega_{yz}^0)^2 - 4\Omega_{zz}^0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} C &= (\Omega_{xy}^0)^2 \Omega_{zz}^0 + (\Omega_{xz}^0)^2 \Omega_{yy}^0 + (\Omega_{yz}^0)^2 \Omega_{xx}^0 \\ &\quad - \Omega_{xx}^0 \Omega_{yy}^0 \Omega_{zz}^0 - 2\Omega_{xy}^0 \Omega_{xz}^0 \Omega_{yz}^0. \end{aligned} \quad (19)$$

令 $s = \lambda^2$, 特征方程 $g(s) = s^3 + 2s^2 + Bs + C = 0$

为一个三次方程, 该方程有三个根, 根的分布决定了人工平动点的动力学性质^[3]. 当三个均为负实数时, 平动点是线性稳定的. 当有一个以上的根为正实数时, 为不稳定平动点. 当根出现复数时, 平动点的动力学性质由根的实部来确定.

三次方程 $g(s) = 0$ 存在三个互异实根的充要条件为^[12]

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0, \quad (20)$$

其中

$$\begin{cases} p = B - \frac{4}{3}, \\ q = \frac{16}{27} - \frac{2}{3}B + C. \end{cases} \quad (21)$$

需要说明的是, 文献[12]给出的三次方程存在互异实根的条件正好和(20)式相反, 我们认为是文献[12]的笔误. 当关系式(20)满足时, 方程 $g(s) = 0$ 的根为

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \begin{Bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{3} - 120^\circ\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{3} + 120^\circ\right) \end{Bmatrix} - \frac{2}{3}, \quad (22)$$

其中 $\theta = \arccos\left(-\frac{q\sqrt{-27p}}{2p^2}\right)$. 除了满足关系(20), 若

还同时满足条件 $B > 0$ 和 $C > 0$, 方程存在三个互异负实根^[12], 此时的人工平动点是线性稳定的. 根据该条件可判断空间任一人工平动点是否为稳定的人工平动点. 图1给出了日-地旋转坐标系下, 稳定人工平动点在 X - Y 平面的分布. 需要说明的是, 所有图注中, ‘adim’表示无量纲长度单位, 在日-地系下对应的实际数值为 148597870.691 km.

记稳定人工平动点附近的特征根为 $\pm iu_0$, $\pm iv_0$ 和 $\pm iw_0$, 其中 $u_0 = \sqrt{-s_1}$, $v_0 = \sqrt{-s_2}$ 以及 $w_0 = \sqrt{-s_3}$, 从而线性化解为

图 1 (网络版彩图)日-地旋转坐标系下稳定人工平动点分布^[12]

(a) 整个平面; (b) 地球附近

$$\begin{cases} x(t) = \alpha \cos(u_0 t + \theta_{10}) + \beta \cos(v_0 t + \theta_{20}) \\ \quad + \bar{\kappa}_1 \gamma \cos(w_0 t + \theta_{30}) + \bar{\kappa}_2 \gamma \sin(w_0 t + \theta_{30}), \\ y(t) = \bar{\kappa}_3 \alpha \cos(u_0 t + \theta_{10}) + \bar{\kappa}_4 \alpha \sin(u_0 t + \theta_{10}) \\ \quad + \bar{\kappa}_5 \beta \cos(v_0 t + \theta_{20}) + \bar{\kappa}_6 \beta \sin(v_0 t + \theta_{20}) \\ \quad + \bar{\kappa}_7 \gamma \cos(w_0 t + \theta_{30}) + \bar{\kappa}_8 \gamma \sin(w_0 t + \theta_{30}), \\ z(t) = \bar{\kappa}_9 \alpha \cos(u_0 t + \theta_{10}) + \bar{\kappa}_{10} \alpha \sin(u_0 t + \theta_{10}) \\ \quad + \bar{\kappa}_{11} \beta \cos(v_0 t + \theta_{20}) + \bar{\kappa}_{12} \beta \sin(v_0 t + \theta_{20}) \\ \quad + \gamma \cos(w_0 t + \theta_{30}), \end{cases} \quad (23)$$

其中 α , β 和 γ 分别为长周期、短周期和垂直周期振幅, θ_{10} , θ_{20} 和 θ_{30} 为相应的初始相位角. 将(23)带入线性化方程(16)的后两个方程(亦可带入第一、三方程), 可得系数 $\bar{\kappa}_3$, $\bar{\kappa}_9$, $\bar{\kappa}_4$ 和 $\bar{\kappa}_{10}$ 满足方程

$$\begin{bmatrix} \Omega_{ZY}^0 & u_0^2 + \Omega_{ZZ}^0 \\ u_0^2 + \Omega_{ZY}^0 & \Omega_{ZZ}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\kappa}_3 & \bar{\kappa}_4 \\ \bar{\kappa}_9 & \bar{\kappa}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Omega_{ZX}^0 & 0 \\ -\Omega_{ZY}^0 & -2u_0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

系数 $\bar{\kappa}_5$, $\bar{\kappa}_{11}$, $\bar{\kappa}_6$ 和 $\bar{\kappa}_{12}$ 满足方程

$$\begin{bmatrix} \Omega_{ZY}^0 & v_0^2 + \Omega_{ZZ}^0 \\ v_0^2 + \Omega_{ZY}^0 & \Omega_{ZZ}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\kappa}_5 & \bar{\kappa}_6 \\ \bar{\kappa}_{11} & \bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Omega_{ZX}^0 & 0 \\ -\Omega_{ZY}^0 & -2v_0 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

剩余系数可通过求解如下线性方程组获得

$$\begin{cases} \Omega_{ZX}^0 \bar{\kappa}_1 + \Omega_{ZY}^0 \bar{\kappa}_7 = -w_0^2 - \Omega_{ZZ}^0, \\ \Omega_{ZX}^0 \bar{\kappa}_2 + \Omega_{ZY}^0 \bar{\kappa}_8 = 0, \\ \Omega_{ZX}^0 \bar{\kappa}_1 - 2w_0 \bar{\kappa}_2 + (w_0^2 + \Omega_{ZY}^0) \bar{\kappa}_7 = -\Omega_{YZ}^0, \\ 2w_0 \bar{\kappa}_1 + \Omega_{ZX}^0 \bar{\kappa}_2 + (w_0^2 + \Omega_{ZY}^0) \bar{\kappa}_8 = 0. \end{cases} \quad (26)$$

当运动振幅较小时, 一阶解能够很好地近似人工平动点附近的运动. 当振幅较大时, 运动方程中非线性项影响明显, 线性化解不再适用, 此时需要考虑非线性项的高阶解来描述相应的运动.

考虑到运动方程(11)中高阶项的摄动以后, 可将人工平动点附近的运动展开为长周期振幅 α 、短周期振幅 β 以及垂直周期振幅 γ 的级数形式:

$$\begin{cases} x(t) = \sum \left[\begin{matrix} x_{ijk}^{lmn} \cos(l\theta_1 + m\theta_2 + n\theta_3) + \\ \bar{x}_{ijk}^{lmn} \sin(l\theta_1 + m\theta_2 + n\theta_3) \end{matrix} \right] \alpha^i \beta^j \gamma^k, \\ y(t) = \sum \left[\begin{matrix} y_{ijk}^{lmn} \cos(l\theta_1 + m\theta_2 + n\theta_3) + \\ \bar{y}_{ijk}^{lmn} \sin(l\theta_1 + m\theta_2 + n\theta_3) \end{matrix} \right] \alpha^i \beta^j \gamma^k, \\ z(t) = \sum \left[\begin{matrix} z_{ijk}^{lmn} \cos(l\theta_1 + m\theta_2 + n\theta_3) + \\ \bar{z}_{ijk}^{lmn} \sin(l\theta_1 + m\theta_2 + n\theta_3) \end{matrix} \right] \alpha^i \beta^j \gamma^k, \end{cases} \quad (27)$$

其中 $\theta_1 = ut + \theta_{10}$, $\theta_2 = vt + \theta_{20}$ 和 $\theta_3 = wt + \theta_{30}$ 为运动的相位角. 级数解(27)中, 有 $i, j, k \in \mathbb{N}$ 和 $l, m, n \in \mathbb{Z}$, 并且 l, m, n 与 i, j, k 具有相同的奇偶性. x_{ijk}^{lmn} , y_{ijk}^{lmn} 和 z_{ijk}^{lmn} 为坐标级数的余弦系数, 相应地, $\bar{x}_{ijk}^{lmn}$, $\bar{y}_{ijk}^{lmn}$ 和 $\bar{z}_{ijk}^{lmn}$ 为坐标级数的正弦系数, 均为待定系数. 需要说明的是, 级数解(27)的形式和文献[18]讨论的圆型限制性三体系统下三角平动点附近的级数解形式一致. 由于非线性项的影响, 运动频率 u , v 和 w 不再是常数, 而与运动振幅有关. 将运动频率展开为如下形式:

$$\begin{cases} u = \sum_{i+j+k \geq 0} u_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k, \\ v = \sum_{i+j+k \geq 0} v_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k, \\ w = \sum_{i+j+k \geq 0} w_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k. \end{cases} \quad (28)$$

同样有 $i, j, k \in \mathbb{N}$. (28) 式中, 当且仅当 i, j, k 均为偶数时, 频率系数 u_{ijk} , v_{ijk} 和 w_{ijk} 才不为零.

运动方程(11)中坐标的一阶和二阶导数项可由下式求得(以 x 分量为例):

$$\dot{x} = u \frac{\partial x}{\partial \theta_1} + v \frac{\partial x}{\partial \theta_2} + w \frac{\partial x}{\partial \theta_3}, \quad (29)$$

$$\ddot{x} = u^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_1^2} + v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_2^2} + w^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_3^2} + 2uv \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} + 2uw \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_1 \partial \theta_3} + 2vw \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_2 \partial \theta_3}. \quad (30)$$

级数解构造过程中, 定义 (N_1, N_2, N_3) 为分析解的阶数, 其中 N_1 为长周期振幅对应的阶数, N_2 为短周期振幅对应的阶数, N_3 为垂直周期振幅对应的阶数. 总的阶数为 $N = N_1 + N_2 + N_3$. 级数解(27)和(28)带入运动方程(11), 将已知项系数记为 X_{ijk}^{lmn} , $\bar{X}_{ijk}^{lmn}$, Y_{ijk}^{lmn} , $\bar{Y}_{ijk}^{lmn}$, Z_{ijk}^{lmn} 和 $\bar{Z}_{ijk}^{lmn}$. Lindstedt-Poincaré 方法要求方程两边相同三角函数项的系数相等, 可建立如下线性方程组:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 \\ 0 & A_1 & -A_3 & A_2 & 0 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & 0 & B_4 & 0 \\ -B_2 & B_1 & 0 & B_3 & 0 & B_4 \\ C_1 & 0 & C_2 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & C_2 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ijk}^{lmn} \\ \bar{x}_{ijk}^{lmn} \\ y_{ijk}^{lmn} \\ \bar{y}_{ijk}^{lmn} \\ z_{ijk}^{lmn} \\ \bar{z}_{ijk}^{lmn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_{\bar{x}} \\ \delta_y \\ \delta_{\bar{y}} \\ \delta_z \\ \delta_{\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ijk}^{lmn} \\ \bar{X}_{ijk}^{lmn} \\ Y_{ijk}^{lmn} \\ \bar{Y}_{ijk}^{lmn} \\ Z_{ijk}^{lmn} \\ \bar{Z}_{ijk}^{lmn} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

令 $\varpi = lu_0 + mv_0 + nw_0$, 则上式系数矩阵的元素为

$$\begin{aligned} A_1 &= -\varpi^2 - \Omega_{XX}^0, A_2 = -\Omega_{XY}^0, A_3 = -2\varpi, A_4 = -\Omega_{XZ}^0, \\ B_1 &= -\Omega_{YX}^0, B_2 = 2\varpi, B_3 = -\varpi^2 - \Omega_{YY}^0, B_4 = -\Omega_{YZ}^0, \\ C_1 &= -\Omega_{ZX}^0, C_2 = -\Omega_{ZY}^0, C_3 = -\varpi^2 - \Omega_{ZZ}^0. \end{aligned}$$

另外

$$\begin{cases} \delta_x = -2(u_0 + \bar{\kappa}_4)u_{i-1,jk}\delta_{l1}\delta_{m0}\delta_{n0} - 2(v_0 + \bar{\kappa}_6)v_{ij-1k}\delta_{l0}\delta_{m1}\delta_{n0} \\ \quad - 2(\bar{\kappa}_1w_0 + \bar{\kappa}_8)w_{ijk-1}\delta_{l0}\delta_{m0}\delta_{n1}, \\ \delta_{\bar{x}} = 2\bar{\kappa}_3u_{i-1,jk}\delta_{l1}\delta_{m0}\delta_{n0} + 2\bar{\kappa}_5v_{ij-1k}\delta_{l0}\delta_{m1}\delta_{n0} \\ \quad + 2(\bar{\kappa}_7 - \bar{\kappa}_2w_0)w_{ijk-1}\delta_{l0}\delta_{m0}\delta_{n1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_y = -2\bar{\kappa}_3u_0u_{i-1,jk}\delta_{l1}\delta_{m0}\delta_{n0} - 2\bar{\kappa}_5v_0v_{ij-1k}\delta_{l0}\delta_{m1}\delta_{n0} \\ \quad - 2(\bar{\kappa}_7w_0 - \bar{\kappa}_2)w_{ijk-1}\delta_{l0}\delta_{m0}\delta_{n1}, \\ \delta_{\bar{y}} = 2(\bar{\kappa}_4u_0 + 1)u_{i-1,jk}\delta_{l1}\delta_{m0}\delta_{n0} - 2(\bar{\kappa}_6v_0 + 1)v_{ij-1k}\delta_{l0}\delta_{m1}\delta_{n0} \\ \quad - 2(\bar{\kappa}_8w_0 + \bar{\kappa}_1)w_{ijk-1}\delta_{l0}\delta_{m0}\delta_{n1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_z = -2\bar{\kappa}_9u_0u_{i-1,jk}\delta_{l1}\delta_{m0}\delta_{n0} - 2\bar{\kappa}_{11}v_0v_{ij-1k}\delta_{l0}\delta_{m1}\delta_{n0} \\ \quad - 2w_0w_{ijk-1}\delta_{l0}\delta_{m0}\delta_{n1}, \\ \delta_{\bar{z}} = -2\bar{\kappa}_{10}u_0u_{i-1,jk}\delta_{l1}\delta_{m0}\delta_{n0} - 2\bar{\kappa}_{11}v_0v_{ij-1k}\delta_{l0}\delta_{m1}\delta_{n0}. \end{cases}$$

线性系统(31)中, 仅有 6 个方程, 可有 9 个待求变量, 于是不能直接求解. 并且在一些特殊情况下, 系数矩阵亏秩, 同样不能直接求解. 接下来分情况讨论如何求解线性方程组(31).

1) 当 $l=1, m=n=0$

此时待求系数包括 x_{ijk}^{lmn} , $\bar{x}_{ijk}^{lmn}$, y_{ijk}^{lmn} , $\bar{y}_{ijk}^{lmn}$, z_{ijk}^{lmn} , $\bar{z}_{ijk}^{lmn}$ 以及 $u_{i-1,jk}$. 由于此时方程组(31)的系数矩阵亏秩, 即方程不再独立, 我们取其中 5 个方程求解. 令 $x_{ijk}^{lmn} = \bar{y}_{ijk}^{lmn} = 0$, 剩余的待求系数满足如下方程:

$$\begin{bmatrix} 0 & A_2 & A_4 & 0 & -2(u_0 + \bar{\kappa}_4) \\ A_1 & -A_3 & 0 & A_4 & 2\bar{\kappa}_3 \\ B_2 & B_3 & B_4 & 0 & -2\bar{\kappa}_3u_0 \\ 0 & C_2 & C_3 & 0 & -2\bar{\kappa}_9u_0 \\ C_1 & 0 & 0 & C_3 & -2\bar{\kappa}_{10}u_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{ijk}^{lmn} \\ y_{ijk}^{lmn} \\ z_{ijk}^{lmn} \\ \bar{z}_{ijk}^{lmn} \\ u_{i-1,jk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ijk}^{lmn} \\ \bar{X}_{ijk}^{lmn} \\ Y_{ijk}^{lmn} \\ Z_{ijk}^{lmn} \\ \bar{Z}_{ijk}^{lmn} \end{bmatrix}. \quad (32)$$

2) 当 $l=0, m=1, n=0$

待求系数包括 x_{ijk}^{lmn} , $\bar{x}_{ijk}^{lmn}$, y_{ijk}^{lmn} , $\bar{y}_{ijk}^{lmn}$, z_{ijk}^{lmn} , $\bar{z}_{ijk}^{lmn}$ 以及 v_{ij-1k} . 同上, 方程组(31)中仅有 5 个方程是独立的, 从而我们同样取 $x_{ijk}^{lmn} = \bar{y}_{ijk}^{lmn} = 0$, 剩余待求系数由如下方程组求得

$$\begin{bmatrix} 0 & A_2 & A_4 & 0 & -2(v_0 + \bar{\kappa}_6) \\ A_1 & -A_3 & 0 & A_4 & 2\bar{\kappa}_5 \\ B_2 & B_3 & B_4 & 0 & -2\bar{\kappa}_5v_0 \\ 0 & C_2 & C_3 & 0 & -2\bar{\kappa}_{11}v_0 \\ C_1 & 0 & 0 & C_3 & -2\bar{\kappa}_{12}v_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{ijk}^{lmn} \\ y_{ijk}^{lmn} \\ z_{ijk}^{lmn} \\ \bar{z}_{ijk}^{lmn} \\ v_{ij-1k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ijk}^{lmn} \\ \bar{X}_{ijk}^{lmn} \\ Y_{ijk}^{lmn} \\ Z_{ijk}^{lmn} \\ \bar{Z}_{ijk}^{lmn} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

3) 当 $l=m=0, n=1$

此时未知系数为 x_{ijk}^{lmn} , $\bar{x}_{ijk}^{lmn}$, y_{ijk}^{lmn} , $\bar{y}_{ijk}^{lmn}$, z_{ijk}^{lmn} , $\bar{z}_{ijk}^{lmn}$ 以及 w_{ijk-1} . 类似地, 考虑到(31)中系数矩阵亏秩, 令 $\bar{x}_{ijk}^{lmn} = \bar{z}_{ijk}^{lmn} = 0$, 取(31)中前 5 个线性方程求解其余的待定系数:

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & -2(\bar{\kappa}_1 w_0 + \bar{\kappa}_8) \\ 0 & -A_3 & A_2 & 0 & 2(\bar{\kappa}_7 - \bar{\kappa}_2 w_0) \\ B_1 & B_3 & 0 & B_4 & -2(\bar{\kappa}_7 w_0 - \bar{\kappa}_2) \\ -B_2 & 0 & B_3 & 0 & -2(\bar{\kappa}_8 w_0 + \bar{\kappa}_1) \\ C_1 & C_2 & 0 & C_3 & -2w_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ijk}^{lmn} \\ y_{ijk}^{lmn} \\ \bar{y}_{ijk}^{lmn} \\ z_{ijk}^{lmn} \\ w_{ijk-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ijk}^{lmn} \\ \bar{X}_{ijk}^{lmn} \\ Y_{ijk}^{lmn} \\ \bar{Y}_{ijk}^{lmn} \\ Z_{ijk}^{lmn} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

4) 当 $l=0, m=-1, n=0$ 或 $l=0, m=0, n=-1$

方程(31)的系数矩阵仍然是亏秩的, 数值计算结果显示有 $X_{ijk}^{lmn} = \bar{X}_{ijk}^{lmn} = Y_{ijk}^{lmn} = \bar{Y}_{ijk}^{lmn} = Z_{ijk}^{lmn} = \bar{Z}_{ijk}^{lmn} = 0$, 从而可令 $x_{ijk}^{lmn} = \bar{x}_{ijk}^{lmn} = y_{ijk}^{lmn} = \bar{y}_{ijk}^{lmn} = z_{ijk}^{lmn} = \bar{z}_{ijk}^{lmn} = 0$.

5) 当 $l=0, m=0, n=0$

此时, 待求系数 $\bar{x}_{ijk}^{lmn}$, $\bar{y}_{ijk}^{lmn}$ 和 $\bar{z}_{ijk}^{lmn}$ 为 $\sin(0)$ 的系数, 从而可令 $\bar{x}_{ijk}^{lmn} = \bar{y}_{ijk}^{lmn} = \bar{z}_{ijk}^{lmn} = 0$, 其余待定系数满足

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_4 \\ B_1 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ijk}^{lmn} \\ y_{ijk}^{lmn} \\ z_{ijk}^{lmn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ijk}^{lmn} \\ Y_{ijk}^{lmn} \\ Z_{ijk}^{lmn} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

6) 其他

此时频率系数全为零, 坐标系数满足如下方程:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 \\ 0 & A_1 & -A_3 & A_2 & 0 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & 0 & B_4 & 0 \\ -B_2 & B_1 & 0 & B_3 & 0 & B_4 \\ C_1 & 0 & C_2 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & C_2 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ijk}^{lmn} \\ \bar{x}_{ijk}^{lmn} \\ y_{ijk}^{lmn} \\ \bar{y}_{ijk}^{lmn} \\ z_{ijk}^{lmn} \\ \bar{z}_{ijk}^{lmn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ijk}^{lmn} \\ \bar{X}_{ijk}^{lmn} \\ Y_{ijk}^{lmn} \\ \bar{Y}_{ijk}^{lmn} \\ Z_{ijk}^{lmn} \\ \bar{Z}_{ijk}^{lmn} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

综上, 可以求解任意高阶解对应的坐标和频率系数, 将这些系数代入(27)和(28)式, 可获得平动点附近相应振幅对应轨道的状态量和运动频率。

4 结果

本文以日-地系为例, 构造稳定人工平动点附近的拟周期轨道的高阶解. 日-地系统的质量参数为 $\mu = 3.003480575402412 \times 10^{-6}$, 人工平动点取为圆型限制性三体系统下 L_4 点临近的一个点, 坐标为 $\left(\frac{1}{2} - \mu + 0.01, \frac{\sqrt{3}}{2} + 0.01, 0.05\right)$. 根据(3)式, 需要施加的推力加速度为

$$a = \begin{Bmatrix} -2.2132995199 \times 10^{-2} \\ -3.8017853166 \times 10^{-2} \\ 4.7830094139 \times 10^{-2} \end{Bmatrix},$$

对应的人工平动点是线性稳定的, 附近的线性化方程对应的特征根为

$$\lambda_{1,2,\dots,6} = \begin{Bmatrix} \pm i0.379952673682 \\ \pm i0.877208010571 \\ \pm i1.042181400693 \end{Bmatrix}.$$

说明稳定人工平动点附近存在三种典型的运动类型: 长周期轨道、短周期轨道以及垂直周期轨道. 需要说明的是, 在日-地旋转坐标系下, 无量纲加速度 1.0 对应的是 $5.9301 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$.

根据第3部分介绍, 我们完成了稳定人工平动点附近拟周期轨道高阶分析解构造的 FORTRAN 程序. 表 1 给出日-地质心旋转坐标系下稳定人工平动点 $(1/2 - \mu + 0.01, \sqrt{3}/2 + 0.01, 0.05)$ 附近 (3,3,3) 阶级数解对应的频率系数, 以供感兴趣的读者验证本文结果. 为了计算人工平动点附近的长周期轨道, 此时短周期振幅和垂直周期振幅都为零, 于是构造的分析解阶数为 (25,1,1), 利用该分析解, 计算了振幅为 $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6$ 对应的长周期轨道, 见图 2(a). 同时, 针对 (25,1,1) 阶分析解, 计算了分析解与数值解在一周期处的位置偏离和长周期振幅 α 的关系, 见图 2(b). 可见, 在振幅满足 $\alpha < \alpha_c = 0.6216$ 时, 分析解和数值解之间的位置偏离小于 1.0×10^{-5} . 对于短周期轨道, 由于其长周期振幅和垂直周期振幅为零, 于是取分析解的阶数为 (1,25,1), 图 3 给出了三条短周期轨道以及分析解与数值解位置偏离和短周期振幅 β 的关系. 可见, 对于 (1,25,1) 阶分析解而言, 当振幅满足 $\beta < \beta_c = 0.6636$ 时, 分析解与数值解的位置偏离小于 1.0×10^{-5} . 图 4 给出的是垂直周期轨道对应的情况, 分析解的阶数取为 (1,1,25). 从图 4(b) 可见, 就精度 1.0×10^{-5} 而言, 垂直周期振幅对应的临界振幅为 $\gamma_c = 0.3520$. α_c , β_c 和 γ_c 的数值大致给出了相应阶数的分析解对应的适用范围, 为我们实际应用级数解提供了一个参考. 最后, 对于一般情况, 即长周期振幅、短周期振幅和垂直周期振幅均不为零的情况, 图 5 给出了人工平动点附近振幅为 $\alpha = \beta = \gamma = 0.1$ 的拟周期轨道, 分析解的阶数为 (6,6,7).

表 1 日-地系下稳定人工平动点 $(1/2 - \mu + 0.01, \sqrt{3}/2 + 0.01, 0.05)$ 附近(3,3,3)阶解对应的频率系数

i	j	k	u_{ijk}	v_{ijk}	w_{ijk}
0	0	0	$3.7995267368 \times 10^{-1}$	$8.7720801057 \times 10^{-1}$	1.0421814007
0	0	2	$-1.1321115093 \times 10^{-1}$	$5.1812370862 \times 10^{-2}$	$-1.9416146562 \times 10^{-3}$
0	2	0	$5.5885990107 \times 10^{-2}$	$1.1200829940 \times 10^{-2}$	$8.7401309710 \times 10^{-3}$
0	2	2	$-3.8373512430 \times 10^{-1}$	$-3.8625337719 \times 10^{-3}$	$6.9597713656 \times 10^{-3}$
2	0	0	$-1.4622612150 \times 10^{-2}$	$-2.0840905784 \times 10^{-2}$	$7.1217597928 \times 10^{-3}$
2	0	2	$-3.1320989398 \times 10^{-1}$	$1.8128316539 \times 10^{-1}$	$1.1702883790 \times 10^{-2}$
2	2	0	$-3.2048719145 \times 10^{-1}$	$5.3808149093 \times 10^{-2}$	$2.1675734617 \times 10^{-2}$
2	2	2	$8.9681151308 \times 10^{-1}$	$-4.8888573490 \times 10^{-2}$	$3.2082562126 \times 10^{-2}$

图 2 稳定人工平动点附近的长周期轨道及位置偏离

(a) 三条长周期轨道; (b) 分析解和数值解在一周期处的位置偏离与长周期振幅的关系

图 3 稳定人工平动点附近的短周期轨道以及位置偏离

(a) 三条短周期轨道; (b) 数值解和分析解在一个周期处的位置偏离与短周期振幅的关系

接下来结合数值积分的方法来研究分析解的收敛域. 分析解中有三个振幅参数, 分别为长周期、短周期以及垂直周期振幅. 计算中, 取各振幅参数对应的最大值为 $\alpha_{\max} = 0.4$, $\beta_{\max} = 0.4$ 和 $\gamma_{\max} = 0.3$. 为了方便图形显示, 在设定其中某一个参数为零的前提下, 计算另外两个参数组合对应的收敛域. 以参数组合 (α, β) 为例, 令 $\gamma = 0$, 考察在区间 $[0, \alpha_{\max}] \times [0, \beta_{\max}]$

中均匀分布 100×100 个点, 各点记为 (α_i, β_j) , $i = 1, 2, \dots, 100$; $j = 1, 2, \dots, 100$. 振幅 (α_i, β_j) 对应的初始状态可以通过级数解获得. 以级数解为初值, 积分运动方程, 直到 2π 无量纲时间, 此时的数值解记为 $\mathbf{X}_{\text{NUM}}$. 同时, 2π 无量纲时间处的分析解可直接由级数解提供, 记为 $\mathbf{X}_{\text{ANA}}$. 以数值解作为参考标准, 那么, 分析解的精度可用 2π 无量纲时间处 $\mathbf{X}_{\text{ANA}}$ 与 $\mathbf{X}_{\text{NUM}}$ 的

图 4 稳定人工平动点附近的垂直周期轨道和位置偏离

(a) 三条垂直周期轨道; (b) 数值解以及分析解在一个周期处的位置偏离与垂直周期振幅的关系

位置偏差来表示. 方便显示, 我们将位置偏离取 10 为底的对数, 以此作为精度指标. 参数组合 (α, γ) 和 (β, γ) 的收敛域可类似地计算. 对于参数组合 (α, β) , 分析解的阶数取为 (11, 11, 1), 对于参数组合 (α, γ) 而言, 分析解的阶数取为 (11, 1, 11), 对于 (β, γ) 而言, 分析解的阶数为 (1, 11, 11). 图 6 给出了组合 (α, β) , (α, γ) 和 (β, γ) 对应的收敛情况, 通过该图, 可以直观看出分析解在某一精度要求下的适用范围.

由于本文构造的分析解阶数有限, 只有在某一个振幅范围内, 分析解才可以较为精确地近似人工平动点附近的拟周期轨道. 当振幅较大时, 分析解与数值解之间存在不可忽略的偏差, 此时, 分析解仅能为之提供一个初值, 需要进一步对该初值进行数值修正, 方可获得精确的拟周期轨道.

最后, 对结果部分作几点说明. 1) 图 2~6 中, 振幅 α , β 和 γ 的无量纲单位 (1.0 adim) 对应的实际单位为人工平动点与太阳的距离, 实际值为 151826761.416 km (对应于坐标系 $E-xyz$ 下的无量纲长度单位); 坐标 x , y 和 z 的无量纲单位 (1.0 adim) 对应的实际单位为

日-地平均距离, 即 149597870.691 km (对应于坐标系 $C-XYZ$ 下的无量纲长度单位). 2) 数值解是对运动方程数值积分得到的解, 其初值由级数解提供, 积分工具为变步长 Runge Kutta 积分器 RKF78, 截断误差设置为 1.0×10^{-14} . 3) 本文给出的高阶解构造方法适用于三维坐标均不为零的稳定平动点, 对于某些特殊情况, 即位于主天体轨道平面或者与主天体共线时, 解的构造过程类似于经典圆型限制性三体系统下三角平动点附近的高阶解构造以及共线平动点 Lissajous 轨道高阶解构造^[18,19]. 4) 小推力破坏了限制性三体系统的对称性, 虽然稳定平动点附近的级数解形式和经典限制性三体系统下三角平动点附近的级数解一致, 可是解的构造过程并不相同.

5 结论

在圆型限制性三体系统下, 空间任意一点在小推力作用下可转变成人工平动点, 该点的位置由小推力参数唯一确定. 研究中, 根据人工平动点附近线

图 5 (6,6,7) 阶级数解计算的稳定人工平动点附近的一条拟周期轨道

图6 (网络版彩图)稳定人工平动点附近高阶近似解对应的收敛域

(a) 振幅 (α, β) , 对应分析解阶数为(11, 11, 1); (b) 振幅 (α, γ) , 对应分析解阶数为(11, 1, 11); (c) 振幅 (β, γ) , 对应分析解阶数为(1, 11, 11)

性化方程的特征根, 判断人工平动点的动力学性质. 本文主要针对稳定的人工平动点, 探讨其附近的周期、拟周期轨道. 首先推导以人工平动点为原点的运动方程. 接着, 考虑到稳定人工平动点的动力学性质, 将其附近的拟周期轨道展开为长周期振幅、短周期振幅和垂直周期振幅的级数解形式. 然后, 以一阶解为迭代初值, 采用 Lindstedt-Poincaré 方法构造任意高阶的级数解. 利用本文构造的分析解, 稳定人工平动点附近的三种特殊周期轨道以及一般的运动均可以被参数化. 例如, 当 $\alpha \neq 0$ 而 $\beta = \gamma = 0$ 时, 级数解对应的

是长周期轨道; 当 $\beta \neq 0$ 而 $\alpha = \gamma = 0$ 时, 级数解对应的是短周期轨道; 当 $\gamma \neq 0$ 而 $\alpha = \beta = 0$ 时, 级数解对应的是垂直周期轨道; 其余情况则对应拟周期轨道. 参数化的周期和拟周期轨道为实际任务中的轨道设计以及转移轨道设计提供了极大的方便, 特别是在轨道优化设计中, 可以将描述人工平动点轨道的参数作为优化变量进行优化. 由于本文构造的分析解仅是平动点轨道的近似解以及级数解的阶数有限, 分析解仅在某一振幅范围内适用. 对此, 我们计算了参数组合 (α, β) , (α, γ) 和 (β, γ) 对应的收敛情况, 为实际应用提供参考.

参考文献

- 1 侯锡云, 刘林. 共线平动点的动力学特征及其在深空探测中的应用. 宇航学报, 2008, 29: 736–747
- 2 徐明. 平动点轨道的动力学与控制研究综述. 宇航学报, 2009, 30: 1299–1313
- 3 Szebeley V. Theory of Orbits. New York: Academic Press, 1967
- 4 Aliasi G, Mengali G, Quarta A A. Artificial equilibrium points for a generalized sail in the circular restricted three-body problem. Celest Mech Dyn Astron, 2011, 110: 343–368
- 5 McInnes C R, McDonal A J C, Simmons J F L, et al. Solar sail parking in the restricted three-body systems. J Guid Control Dyn, 1994, 17: 399–406
- 6 McInnes C R. Solar sail mission applications for non-Keplerian orbits. Acta Astronaut, 1999, 45: 567–575
- 7 Baoyin H X, McInnes C R. Solar sail halo orbits at the Sun-Earth artificial L1 point. Celest Mech Dyn Astron, 2006, 94: 155–171
- 8 Waters T J, McInnes C R. Periodic orbits above the ecliptic in the solar-sail restricted three-body problem. J Guid Control Dyn, 2007, 30: 687–693

- 9 Gong S, Baoyin H, Li J. Solar sail three-body transfer trajectory design. *J Guid Control Dyn*, 2010, 33: 873–886
- 10 Bookless J, McInnes C R. Control of Lagrange point orbits using solar sail propulsion. *Acta Astronaut*, 2008, 62: 159–176
- 11 Waters T J, McInnes C R. Invariant manifolds and orbit control in the solar sail 3-body problem. *J Guid Control Dyn*, 2008, 31: 554–562
- 12 Morimoto M Y, Yamakawa H, Uesugi K. Artificial equilibrium points in the low-thrust restricted three-body problem. *J Guid Control Dyn*, 2007, 30: 1563–1567
- 13 Morimoto M, Yamakawa H, Uesugi K. Periodic orbits with low-thrust propulsion in the restricted three-body problem. *J Guid Control Dyn*, 2006, 29: 1131–1139
- 14 Richardson D L. Analytical construction of periodic orbits about the collinear points. *Celest Mech*, 1980, 22: 241–253
- 15 Baig S, McInnes C R. Artificial halo orbits for low-thrust propulsion spacecraft. *Celest Mech Dyn Astron*, 2009, 104: 321–335
- 16 侯锡云, 刘林. 连续小推力作用下的共线平动点. *力学学报*, 2013, 45: 265–273
- 17 Ceccaroni M, Biggs J. Low-thrust propulsion in a coplanar circular restricted four body problem. *Celest Mech Dyn Astron*, 2012, 112: 191–219
- 18 Lei H L, Xu B. High-order analytical solutions around triangular libration points in circular restricted three-body problem. *Mon Not R Astron Soc*, 2013, 434: 1376–1386
- 19 Jorba A, Masdemont J. Dynamics in the center manifold of the collinear points of the restricted three body problem. *Phys D*, 1999, 132: 189–213
- 20 张汉清, 李言俊, 张科. 一种计算圆型限制性三体问题周期轨道的新方法. *中国科学: 技术科学*, 2011, 41: 1078–1083
- 21 孟云鹤, 张跃东, 戴金海. 基于 Floquet 模态的平动点航天器编队构型设计与控制一体化方法. *中国科学: 技术科学*, 2011, 41: 638–647
- 22 Masdemont J J. High-order expansions of invariant manifolds of libration point orbits with applications to mission design. *Dyn Syst*, 2005, 20: 59–113
- 23 Hou X Y, Liu L. On motions around the collinear libration points in the elliptic restricted three-body problem. *Mon Not R Astron Soc*, 2011, 415: 3552–3560
- 24 Lei H L, Xu B, Hou X Y, et al. High-order solutions of invariant manifolds associated with libration point orbits in the elliptic restricted three-body system. *Celest Mech Dyn Astron*, 2013, 117: 349–384
- 25 Lei H L, Xu B. High-order solutions around triangular libration points in the elliptic restricted three-body problem and applications to low energy transfers. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2014, 19: 3374–3398

High-order solutions around the stable libration points in the low-thrust restricted three-body system

LEI HanLun & XU Bo

School of Astronomy and Space Science, Nanjing University, Nanjing 210093, China

Non-equilibrium point in the circular restricted three-body system can be changed into an artificial equilibrium point by means of low-thrust acceleration, and an spacecraft located at the artificial equilibrium point remains static relative to the primaries in the synodic coordinate system. In the classical restricted three-body system, the libration point orbit resource is limited, and the existence of artificial equilibrium point could overcome the shortage. The richness of artificial equilibrium points leads to the flexibility of mission design in deep space exploration. Due to the stability of stable artificial equilibrium points, for a spacecraft moving around them, less propellant is required for station keeping. In this paper, we expand the general motion around stable artificial equilibrium points as formal series of long-period, short-period and vertical periodic amplitudes. Then Lindstedt-Poincaré method is adopted to construct the series solutions up to an arbitrary order. By taking advantage of the series expansions constructed, the motions around artificial equilibrium points can be parameterized, and these parameters are beneficial to the optimization process of libration point mission design. At last, in order to provide the available range of series expansions constructed, the practical convergence is considered.

circular restricted three-body problem, artificial equilibrium point, periodic orbit

doi: 10.1360/N092014-00257