一类超线性 Hill 型对称碰撞方程的周期运动

王超

盐城师范学院数学科学学院, 盐城 224001

E-mail: wangchaosudamath@163.com

收稿日期: 2013-05-29; 接受日期: 2013-11-11

国家自然科学基金 (批准号: 11301106 和 11226130) 和江苏省高校自然科学基金 (批准号: 09KJD110005) 资助项目

摘要 本文考虑一类超线性 Hill 型对称碰撞方程的对称碰撞周期解的存在性、重性和分布问题. 通过坐标变换的方法把碰撞相平面转化为全平面进行研究, 在一类关于时间映射的超线性条件下证明有外力方程无穷多个对称碰撞调和和对称碰撞次调和的存在性; 同时研究在没有外力时方程的对称碰撞周期解的稠密性分布. 本文还给出对称碰撞方程对称碰撞周期解存在的充分条件.

关键词 对称碰撞方程 权函数 对称碰撞周期解 时间映射 Poincaré 映射

MSC (2010) 主题分类 34C15, 34C25, 34B30, 54H25

1 引言

本文考虑对称碰撞振子

$$\begin{cases} x'' + q(t)g(x) = p(t), & \text{当 } x(t) > 0, \\ x(t) \geq 0, \\ \text{若 } x(t_0) = 0, \text{ 则 } x'(t_0+) = -x'(t_0-) \end{cases} \quad (1.1)$$

对称碰撞周期解的存在性、重性和稠密性分布问题, 其中 $q(t) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ 为连续的 2π - 周期有界变差偶函数, 且满足:

- (q_0) (1) $\forall t \in [0, \pi], q(t) \geq 0$, 且 $\{t \in [0, \pi] : q(t) > 0\} \neq \emptyset$;
- (2) 集合 $\{t \in [0, \pi] : q(t) \equiv 0\}$ 只有有限个连通分支;
- (3) 若在 $(c, d) \subset [0, \pi]$ 上 $q > 0$ 且 $q(c) = 0$ (或 $q(d) = 0$), 则 q 在 c 的一个右邻域内单调不减 (或相应地, q 在 d 的一个左邻域内单调不减).

$p(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续的 2π - 周期偶函数.

$g(x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 是局部 Lipschitz 连续函数, 满足:

(g_0) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ 和 $(\tau_0^+) \lim_{e \rightarrow +\infty} \tau_g^+(e) = 0$, 其中 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $\tau_g^+(e) = \sqrt{2} \int_0^{G^{-1}(e)} \frac{1}{\sqrt{e-G(s)}} ds$, $G(x) = \int_0^x g(s) ds$ 为位势函数.

注 1.1 $\tau_g^+ : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 通常称为右半轨的时间映射. 条件 (τ_0^+) 意味着随着方程 $x'' + g(x) = 0$ 轨道能量的增加, 方程的解沿着 $x \geq 0$ 半平面上的轨道走, 所需时间趋向于零.

碰撞振子具有广泛的实际应用背景, 对于它已有许多研究成果. 除了许多物理和数值的研究以外, 近年来, 在数学理论方面, 关于碰撞振子的周期解、不变曲线和混沌动力行为等问题的研究也得到了许多结果, 如文献 [1–6]. 但由于碰撞系统的非光滑性所带来的解的复杂性以及研究的数学工具的缺乏, 使得解决碰撞系统的相关问题变得困难.

我们首先给出在 $x = 0$ 处发生完全弹性碰撞的碰撞解的定义.

定义 1.1 连续函数 $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ 称为方程 (1.1) 的碰撞解, 如果存在一个双向无穷序列 $t_i \subset \mathbb{R}$ 使得对所有的 $i \in \mathbb{Z}$, 以下性质成立:

- (1) $x(t_i) = 0$;
- (2) $x'(t_i+) = -x'(t_i-)$;
- (3) $x \in C^2((t_i, t_{i+1}), \mathbb{R}^+)$ 是 (1.1) 通常意义下的解.

注 1.2 容易证明碰撞问题 (1.1) 的初值问题的解是唯一存在的, 因而可如文献 [7, 第 1.3 节] 那样证明其解对初值和参数的连续性. 所以, (1.1) 的连续解关于初值和参数也是连续的.

当 $p(t) \equiv 0$ 时, 方程

$$x'' + q(t)g(x) = 0$$

称为非线性 Hill 方程 [8], 它的一个很重要的特点是仅有 q 的连续性不能保证解的可延拓性. 文献 [9] 指出了在弱正则性条件 (q_0) 下, 解的可延拓性可以得到保证. 有关非线性 Hill 方程相关的最新成果可参见文献 [10–15].

当 $q(t) \equiv 1$ 时, 方程 (1.1) 是有名的 Duffing 方程, 关于 Duffing 方程周期解的研究已经有了许多结果 [16–18]. Nakajima [18] 在超线性条件

$$(g_1): \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$$

下得到了对称 Duffing 方程的无穷多个对称调和解的存在性及对称次调和解的稠密性分布结果. 显然, 条件 (g_1) 可以推出关于时间映射的超线性条件

$$(\tau_0): \lim_{e \rightarrow +\infty} \tau_g(e) = 0,$$

其中 $\tau_g(e) = \sqrt{2} \int_{G^{-1}(e)}^{G^{-1}(e)} \frac{1}{\sqrt{e-G(s)}} ds$.

在以往关于碰撞振子周期解的研究中, 主要结果都是针对线性方程的. 最近, 王志国等人 [19] 在次线性条件下证明了 Duffing 方程无穷多个碰撞次调和解的存在性. 针对一类在原点附近满足超线性条件的碰撞 Hamilton 系统, 丁卫和钱定边 [20] 证明了无穷多个碰撞周期解的存在性. 文献 [19, 20] 都运用了文献 [21] 中定义的坐标变换把碰撞相平面转化为全平面加以讨论, 以此来克服碰撞系统的非光滑性问题. 同时, 通过相平面分析的方法研究系统 Poincaré 映射的扭转性, 再运用 Poincaré-Birkhoff 扭转定理证明了相应的结果.

本文针对带正权的非线性 Hill 型碰撞方程考虑了与文献 [18] 相同的问题, 研究在超线性条件 (τ_0^+) 下方程 (1.1) 无穷多个偶的碰撞调和解的存在性和偶的碰撞次调和解的稠密性分布问题. 类似于文献 [19, 20], 我们首先用文献 [21] 中的坐标变换把碰撞系统转化为定义在全平面上的等价系统, 再运用相平面分析的方法对变换后的系统的解的动力行为进行分析, 通过新系统的 Poincaré 映射的性质来研究对称碰撞周期解的存在性、重性和稠密性分布问题. 本文的研究思路基本与文献 [18] 相同, 但对于无穷多个偶的碰撞次调和解存在性的证明, 文献 [18] 中的方法已不再适用. 对此问题, 我们运用文献 [16] 中的方法加以解决.

本文的主要结果有: 在引理 2.3, 我们给出对称碰撞方程对称周期解存在的充分条件. 利用这个充分条件, 在定理 4.1 和 4.2 中, 我们证明方程 (1.1) 无穷多个偶的调和解与次调和解的存在性. 在定理 5.1 中, 当 $p(t) \equiv 0$ 时, 我们得到方程 (1.1) 对称次调和解的稠密性分布结果. 简单地讲, 如果我们称一个满足 $x'(0) = 0$ 的偶次调和解 $x(t)$ 的初始状态 $(x(0), x'(0))$ 为一个碰撞 ε -点, 定理 5.1 证明, 对于任意两个碰撞 ε -点 p_1 和 p_2 , 连接 p_1 和 p_2 的直线段 $\overline{p_1 p_2}$ 包含无穷多个碰撞 ε -点.

在下文中, 我们总假设 $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_0^+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{Z}_0^+ := \{m \in \mathbb{Z} : m > 0\}$.

2 坐标变换

令 $x' = y$, 则方程 (1.1) 等价于碰撞系统

$$\begin{cases} x' = y, y' = -q(t)g(x) + p(t), & \text{当 } x(t) > 0, \\ x(t) \geq 0, \\ \text{若 } x(t_0) = 0, \text{ 则 } x'(t_0+) = -x'(t_0-). \end{cases} \quad (2.1)$$

易见, 碰撞系统 (2.1) 的解定义在碰撞相平面 $\{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\}$ 上.

由于碰撞系统的解在碰撞时刻 t_0 处有 $x(t_0^+) = x(t_0^-) = x(t_0) = 0$ 且 $x'(t_0^+) = -x'(t_0^-)$, 因此, $|x(t_0^+)| + |x'(t_0^+)| = |x(t_0^-)| + |x'(t_0^-)|$. 在下文中, 我们可以运用文献 [21] 中的一个坐标变换把碰撞相平面中的不连续解转化为极坐标下的连续函数, 并定义一个与原系统等价的新系统. 接着利用 Poincaré 映射的性质来讨论新系统的周期解问题.

对任意的 $k \in \mathbb{Z}$, 当 $4k\pi - \frac{3}{2}\pi < \theta < 4k\pi + \frac{\pi}{2}$ 且 $r > 0$ 时, 定义 $\phi_1 : (r, \theta) \rightarrow (x = x_1(r, \theta), y = y_1(r, \theta))$ 如下:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \\ y = 2\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right); \end{cases} \quad (2.2)$$

当 $4k\pi + \frac{\pi}{2} < \theta < 4k\pi + \frac{5}{2}\pi$ 且 $r > 0$ 时, 定义 $\phi_2 : (r, \theta) \rightarrow (x = x_2(r, \theta), y = y_2(r, \theta))$ 如下:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{3}{4}\pi\right), \\ y = 2\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{3}{4}\pi\right). \end{cases} \quad (2.3)$$

易见, 对每一个固定的 $k \in \mathbb{Z}$, 映射 ϕ_1 和 ϕ_2 分别是 $\{(r, \theta) : r > 0, 4k\pi - \frac{3}{2}\pi < \theta < 4k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ 和 $\{(r, \theta) : r > 0, 4k\pi + \frac{\pi}{2} < \theta < 4k\pi + \frac{5}{2}\pi\}$ 到右半平面 $\{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ 上连续的一一映射. 易证, 对任意的点列 $\{(r_n, \theta_n)\}_n$ ($r_n > 0$), 若当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有 $r_n \rightarrow r_0 > 0$ 且 $\theta_n \rightarrow (4k\pi - \frac{3}{2}\pi)^+$ (或 $\theta \rightarrow (4k\pi + \frac{\pi}{2})^+$), 则有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = -2\sqrt{r_0}.$$

同理, 若当 $n \rightarrow +\infty$ 时有 $r_n \rightarrow r_0 > 0$ 且 $\theta_n \rightarrow (4k\pi - \frac{3}{2}\pi)^-$ (或 $\theta \rightarrow (4k\pi + \frac{\pi}{2})^-$), 则有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 2\sqrt{r_0}.$$

这正好可以描述系统 (2.1) 的碰撞解在某碰撞时刻的左右极限. 易证 $dx \wedge dy = r dr \wedge d\theta$.

引理 2.1 设 (2.1) 的解 $(x(t), y(t))$ 在 $t = t_0$ 时发生碰撞, 则碰撞对应到 $\theta(t_0) = 2\tilde{k}\pi - \frac{3}{2}\pi$, 即发生一次碰撞相当于 $\theta(t)$ 取到一次 $2\tilde{k}\pi - \frac{3}{2}\pi$ ($\tilde{k} \in \mathbb{Z}$).

证明 根据碰撞解的定义和变换 (2.2) 和 (2.3), 若 (2.1) 的解 $(x(t), y(t))$ 在 $t = t_0$ 时发生碰撞, 则 $\theta(t_0) = 4k\pi - \frac{3}{2}\pi$, $r(t_0) = \bar{r} > 0$ 或者 $\theta(t_0) = 4k\pi + \frac{\pi}{2}$, $r(t_0) = \bar{r} > 0$, 无论哪种情形, 都有 $2\tilde{k}\pi - \frac{3}{2}\pi$ ($\tilde{k} \in \mathbb{Z}$).

因此, 在坐标变换 (2.2) 和 (2.3) 下, 碰撞系统可写成极坐标下的形式:

当 $4k\pi - \frac{3}{2}\pi < \theta < 4k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\begin{cases} r' = 2r \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \left[1 - \frac{q(t)g(x)}{x}\right] + \sqrt{r}p(t) \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \\ \theta' = -2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{q(t)g(x) - p(t)}{\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right); \end{cases} \quad (2.4)$$

当 $4k\pi + \frac{\pi}{2} < \theta < 4k\pi + \frac{5\pi}{2}$ 时,

$$\begin{cases} r' = 2r \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{5\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{5\pi}{4}\right) \left[1 - \frac{q(t)g(x)}{x}\right] + \sqrt{r}p(t) \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{5\pi}{4}\right), \\ \theta' = -2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{5\pi}{4}\right) - \frac{q(t)g(x) - p(t)}{\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{5\pi}{4}\right); \end{cases} \quad (2.5)$$

当 $\lim_{t \rightarrow t_0} \theta(t) = 2k_0\pi - \frac{3\pi}{2}$, $k_0 \in \mathbb{Z}$ 时,

$$\begin{cases} \theta(t_0) = 2k_0\pi - \frac{3\pi}{2}, \\ r(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} r(t). \end{cases} \quad (2.6)$$

注意到, (2.4) 和 (2.5) 描述了碰撞系统的经典解的性质, 而 (2.6) 则描述了碰撞解在碰撞时刻的性质.

定义 2.1 定义在区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的连续函数 $(r(t), \theta(t))$ 称为系统 (2.4)–(2.6) 的一个连续解, 如果

- (1) $r(t) > 0$, 对任意的 $t \in I$;
- (2) 对任意的 $t \in I$ 且 $4k\pi - \frac{3}{2}\pi < \theta(t) < 4k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, 都有 $(r(t), \theta(t))$ 满足 (2.4);
- (3) 对任意的 $t \in I$ 且 $4k\pi + \frac{\pi}{2} < \theta(t) < 4k\pi + \frac{5\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, 都有 $(r(t), \theta(t))$ 满足 (2.5);
- (4) 对所有的 $t_0 \in I$ 且 $\lim_{t \rightarrow t_0} \theta(t) = 4k\pi - \frac{3}{2}\pi$ 或 $\lim_{t \rightarrow t_0} \theta(t) = 4k\pi + \frac{\pi}{2}$, (2.6) 成立.

注 2.1 假设 $(r(t), \theta(t))$ 为系统 (2.4)–(2.6) 的定义在区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的一个连续解, 则在坐标变换 (2.2) 和 (2.3) 下, $(x(t), y(t))$ 为系统 (2.1) 的定义在区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的一个解. 特别地, 当 $I = \mathbb{R}$ 时, $(x(t), y(t))$ 为碰撞系统 (2.1) 的满足定义 1.1 的一个碰撞解.

假设 t_0 为碰撞时刻, 则当 $t \neq t_0$ 时, (2.4) 和 (2.5) 右端关于 r 和 θ 是连续可微的. 当 $t \rightarrow t_0$ 时, $\theta'_-(t_0) = \theta'_+(t_0) = -2$, 由导数存在性定理知, $\theta'(t_0) = -2$, 因此, 振子不会在零点停留.

注 2.2 设 $t_1, t_2, t_3, t_4 \in I$ 是 $(r(t), \theta(t))$ 的依次相邻的 4 个碰撞时刻, 且 $\lim_{t \rightarrow t_1} \theta(t) = 4k\pi - \frac{3}{2}\pi = 4(k-1)\pi + \frac{5\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$), 则当 $t \in (t_1, t_2)$ 时, $4(k-1)\pi + \frac{\pi}{2} < \theta(t) < 4(k-1)\pi + \frac{5\pi}{2}$, 此时, $(r(t), \theta(t))$ 满足 (2.5); 同理, 当 $t \in (t_2, t_3)$ 和 $t \in (t_3, t_4)$ 时, $(r(t), \theta(t))$ 分别满足 (2.4) 和 (2.5). 由此可见, 碰撞系统 (2.1) 的一个碰撞解对应到系统 (2.4)–(2.6) 的一个连续解 $(r(t), \theta(t))$, 而 $(r(t), \theta(t))$ 是由 (2.4) 和 (2.5) 在相应定义区间上的连续解交替相接而成的. 当 $\lim_{t \rightarrow t_1} \theta(t) = 4k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时有相同的结论.

引理 2.2 在坐标变换 (2.2) 和 (2.3) 下, $x(r, \theta)$ 和 $y(r, \theta)$ 关于 θ 是 2π - 周期的, 即

$$x(r, \theta + 2\pi) = x(r, \theta), \quad y(r, \theta + 2\pi) = y(r, \theta).$$

证明 事实上, 不妨设 $4k\pi - \frac{3}{2}\pi < \theta < 4k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$), 则有 $x(r, \theta) = 2\sqrt{r} \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})$. 由于 $4k\pi + \frac{\pi}{2} < \theta + 2\pi < 4k\pi + \frac{5}{2}\pi$, 从而, $x(r, \theta + 2\pi) = 2\sqrt{r} \cos(\frac{\theta+2\pi}{2} - \frac{3}{4}\pi) = 2\sqrt{r} \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) = x(r, \theta)$. 当 $4k\pi + \frac{\pi}{2} < \theta < 4k\pi + \frac{5}{2}\pi$ 时, 则有 $4(k+1)\pi - \frac{3}{2}\pi < \theta + 2\pi < 4(k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$, 易证 $x(r, \theta + 2\pi) = x(r, \theta)$. 同理可证, y 关于 θ 也是 2π 周期的. 证毕. $\square$

注 2.3 引理 2.2 说明, 系统 (2.4)–(2.6) 的以 (r_0, θ_0) 作为初始条件的初值问题的解 $(r(t; r_0, \theta_0), \theta(t; r_0, \theta_0))$ 与以 $(r_0, \theta_0 + 2k\pi)$ 作为初始条件的解 $(r(t; r_0, \theta_0 + 2k\pi), \theta(t; r_0, \theta_0 + 2k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$ 对应到碰撞系统 (2.1) 的同一个解 $(x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0))$, 其中, 当 $4k_1\pi - \frac{3}{2}\pi < \theta_0 \leq 4k_1\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k_1 \in \mathbb{Z}$) 时, (x_0, y_0) 由 (2.2) 取得; 当 $4k\pi + \frac{\pi}{2} < \theta_0 \leq 4k\pi + \frac{5}{2}\pi$ 时, (x_0, y_0) 由 (2.3) 取得.

称一个满足 $x(0) > 0$ 且 $x'(0) = 0$ 的偶的碰撞周期解 $x(t)$ 的初值点 $(x(0), x'(0))$ 为一个碰撞 ε -点. 特别地, 若一个初值点为碰撞 ε -点的偶的周期碰撞解 $x(t)$ 的最小周期为 $2m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}^+$), 称此 ε -点为 m 阶的.

引理 2.3 设 $x(t)$ 是方程 (1.1) 的一个碰撞解, 满足 $x(0) > 0$, 若存在一个正整数 m , 使得 $x'(0) = x'(m\pi) = 0$, 则 $x(t)$ 是 (1.1) 的一个偶的周期碰撞解. 特别地, 碰撞 ε -点 $(x(0), x'(0))$ 是 m 阶的当且仅当 $x'(0) = x'(m\pi) = 0$ 且 $x'(k\pi) \neq 0$, $k = 1, \dots, m-1$.

证明 在证明主要结论之前, 先证明一个命题: 若 $u(t)$ 是方程 (1.1) 的满足 $u'(k\pi) = 0$ 的一个碰撞解, 其中 k 是一个整数, 则 $u(2k\pi - t) = u(t)$. 事实上, 若令 $v(t) = u(2k\pi - t)$, 则在满足 $\forall t \in I, v(t) > 0$ 的区间 I 内, 有 $v''(t) + q(t)g(v(t)) = u''(2k\pi - t) + q(2k\pi - t)g(u(2k\pi - t)) = p(2k\pi - t) = p(t)$. 同时, 对那些使得 $v(t_0) = 0$ 的 t_0 而言 (此时有 $u(2k\pi - t_0) = 0$), 易见

$$v'_+(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} v'(t) = - \lim_{t \rightarrow t_0^+} u'(2k\pi - t) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} u'(2k\pi - t) = - \lim_{t \rightarrow t_0^-} v'(t) = -v'_-(t_0).$$

所以, $v(t)$ 也是方程 (1.1) 的一个碰撞解. 又当 $t = k\pi$ 时, 有 $v(k\pi) = u(k\pi)$, 由 $v(t) = u(2k\pi - t)$ 知, $v'(k\pi) = -u'(k\pi) = 0$, 故由解的存在唯一性定理知, $v(t) = u(t)$, 即 $u(2k\pi - t) = u(t)$.

若 $x'(0) = x'(m\pi) = 0$, 由上述命题取 $k = 0$ 得 $x(-t) = x(t)$. 再取 $k = m$, 令 $t = -t$, 有 $x(2m\pi + t) = x(-t)$, 从而, $x(t) = x(2m\pi + t)$. 得证. $\square$

在下面, 对任一个 $t_0 \in \mathbb{R}$ 和 $q = (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $|a| + |b| > 0$, 设 $x(t, t_0; a, b)$ 是方程 (1.1) 满足初始条件

$$x(t_0) = a, \quad x'(t_0) = b$$

的解. 特别地, 若 $t_0 = 0$, 记 $x(t; a, b) = x(t; 0, a, b)$. 从引理 2.3 可知:

引理 2.4 设 m 是一个正整数, $a \in \mathbb{R}_0^+ = (0, +\infty)$, $x(t, a) = x(t, 0; a, 0)$ 是 (1.1) 的在 $[-4m\pi, 4m\pi]$ 上有定义的解, 满足

$$|(x(t), x'(t))| > 0, \quad \forall t \in [-4m\pi, 4m\pi].$$

若

$$x'(m\pi, a) = 0, \tag{2.7}$$

则 $(a, 0)$ 是一个碰撞 ε -点. 特别地, $(a, 0)$ 是 m 阶的碰撞 ε -点当且仅当 $x'(k\pi) \neq 0$, $k = 1, \dots, m-1$.

证明 由引理 2.3 的证明过程得 $\forall t \in [-4m\pi, 4m\pi]$ 有 $x(-t) = x(t)$. 且当 $t \in [-2m\pi, 2m\pi]$ 时, 容易验证 $x(2m\pi - t) = x(t)$. 从而有 $-x'(2m\pi) = x'(0) = 0$, 从而, $x'(2m\pi) = x'(0)$. 再由 $x(2m\pi) = x(0)$ 及系统的周期性知结论成立. $\square$

由引理 2.2 和 2.4, 我们有下面的引理:

引理 2.5 设 m 是一个正整数, $(r(t; r_0, \theta_0), \theta(t; r_0, \theta_0))$ 是系统 (2.4)–(2.6) 在 $[-4m\pi, 4m\pi]$ 上有定义的连续解, 其中 $\theta_0 = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. 如果

$$\theta(m\pi; r_0, \theta_0) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}, \quad (2.8)$$

则 $(2\sqrt{r_0}, 0)$ 是方程 (2.1) 的一个碰撞 ε - 点. 特别地, $(2\sqrt{r_0}, 0)$ 是 m 阶的碰撞 ε - 点当且仅当 $\theta(k\pi; r_0, \theta_0) \neq -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, $k = 1, \dots, m-1$.

假设 $\mathcal{P}$ 为碰撞系统 (2.1) 的时间 π 的 Poincaré 映射, 即

$$\mathcal{P} : (x_0, y_0) \rightarrow (x(\pi; x_0, y_0), y(\pi; x_0, y_0)),$$

其中 $(x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0))$ 是 (2.1) 的定义在 $[0, b)$ ($b > \pi$) 上的连续解, 满足 $(x(0; x_0, y_0), y(0; x_0, y_0)) = (x_0, y_0)$. 在半平面 $\{(x, y), x \geq 0\}$ 上, 这是一个保面积同胚, 此时, $(0, -y)$ 与 $(0, y)$ 看成碰撞相平面上的同一个点. 相应地, 记

$$\tilde{\mathcal{P}} : (r_0, \theta_0) \rightarrow (r(\pi; r_0, \theta_0), \theta(\pi; r_0, \theta_0))$$

为系统 (2.4)–(2.6) 的时间 π 的 Poincaré 映射.

下面, 对 $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ 定义变量变换:

$$u = r \cos \theta, \quad v = r \sin \theta, \quad (2.9)$$

易证, $du \wedge dv = r dr \wedge d\theta$. 由 $\tilde{\mathcal{P}}$ 可导出 uv 平面上的一个保面积同胚, 仍记为 $\mathcal{P}$. 显然, $\tilde{\mathcal{P}}$ 可看成是 $\mathcal{P}$ 的一个提升映射.

3 相平面分析

类似于文献 [9], 可以证明下面的引理:

引理 3.1 设 (g_0) 和 (q_0) 成立, 则对任意给定的区间 $[a, b]$, 都存在一个正数 $R_* = R_*(a, b)$, 使得对任意给定的 $t_0 \in [a, b]$ 以及任意的满足 $r_0 > R_*$ 的 $(r_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, 都有以 (r_0, θ_0) 为初值的系统 (2.4)–(2.6) 的连续解 $(r(t; t_0, r_0, \theta_0), \theta(t; t_0, r_0, \theta_0))$ 在 $[a, b]$ 上可延拓.

注 3.1 在证明碰撞问题解的可延拓性时, $r_0 > R_*$ 保证在区间 $[a, b]$ 上 $r(t) > 0$.

由引理 3.1 和适当的紧性讨论, 我们可得以下的弹性性质.

推论 3.1 设 (g_0) 和 (q_0) 成立, 则对任一个 $T > 0$ 和 $\alpha > R_*(-T, T)$ 都存在一个常数 $\beta(\alpha, T) > 0$, 使得下列结论成立:

(1) 对 $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, 若 $(r(t), \theta(t))$ 为系统 (2.4)–(2.6) 的满足 $R_*(-T, T) < r(t_0) \leq \alpha$ 的解, 则对所有的 $|t - t_0| \leq T$ 有 $r(t) \leq \beta(\alpha, T)$;

(2) 对 $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, 若 $(r(t), \theta(t))$ 为 (2.4)–(2.6) 的满足 $r(t_0) \geq \beta(\alpha, T)$ 的解, 则对所有的 $|t - t_0| \leq T$ 有 $r(t) \geq \alpha$.

由引理 3.1, 对任意的 $m \in \mathbb{Z}_0^+$ 和 $\alpha > R_*(-2m\pi, 2m\pi)$, 若 $a > \max\{R_*(-4m\pi, 4m\pi), \beta(\alpha, 2m\pi)\}$, 则系统 (2.4)–(2.6) 的任意满足 $r(0) = a$ 和 $\theta(0) = -\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ 的连续解 $(r(t, a), \theta(t, a))$ 在 $[-4m\pi, 4m\pi]$ 有定义, 且对所有 $|t| \leq 2m\pi$ 都有 $r(t, a) > \alpha > 0$.

引理 3.2 对任意 $a > \max\{R_*(-4m\pi, 4m\pi), \beta(\alpha, 2m\pi)\}$, 若系统 (2.4)–(2.6) 的解 $(r(t, a), \theta(t, a))$ 满足下面的条件:

$$\theta(m\pi, a) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}, \quad (3.1)$$

则碰撞像平面上的点 $(2\sqrt{a}, 0)$ 是一个 m 阶的碰撞 ε - 点, 即 $x(t; 2\sqrt{a}, 0)$ 是一个偶的 $2m\pi$ - 周期碰撞解.

证明 由坐标变换 (2.2)、(2.3) 和引理 2.5 易证. $\square$

由引理 3.1 知, 当 $r(0) > R_* := R_*(-4\pi, 4\pi)$ 时, 存在一个正数 M_0 , 对 $\forall t \in [a, b] \subset [0, \pi]$, 有 $r(t) > M_0$. 假设 $(r(t), \theta(t))$ 为系统 (2.4)–(2.6) 的一个以 $(r(a), \theta(a)) = (r_0, \theta_0)$ 为初值的连续解, 记 $p = (r_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. 从而可以定义

$$\text{rot}_{[a,b]} p := \int_a^b -\theta' dt = \theta(a) - \theta(b),$$

$\theta(b) - \theta(a)$ 是向量 $(u(t), v(t))$ 随时间 t 在区间 $[a, b]$ 上增加时在平面上所转的角度, 它与 $\theta(t)$ 的选择无关. 注意到在这个公式里, 当 r 充分大时有 $\theta' < 0$, 从而解是顺时针旋转.

下面将估计方程 (2.4)–(2.6) 的一个轨道 $(r(t), \theta(t))$ 绕原点一整圈所需时间. 由于 $\theta(t)$ 在碰撞时刻连续, $\theta'(t)$ 在非碰撞时刻连续且在碰撞时刻极限存在, 所以, 由导数极限定理, $\theta'(t)$ 在碰撞时刻存在. 为此, 下面在涉及 $\theta(t)$ 的估计时就不再区分碰撞时刻和非碰撞时刻.

设 $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, 将 uv 相平面分成三个区域: $\mathbf{I} := \{(r, \theta) : \frac{\pi}{2} - \theta_0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$, $\mathbf{II} := \{(r, \theta) : -\frac{3}{2}\pi + \theta_0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \theta_0\}$ 和 $\mathbf{III} := \{(r, \theta) : \frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2} + \theta_0\}$. 我们将独立计算轨道通过每个区域所需的时间. 在下列引理中, 记

$$\theta_* = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & -\frac{3}{2}\pi < \theta \pmod{4\pi} < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{5}{4}\pi, & \frac{\pi}{2} < \theta \pmod{4\pi} < \frac{5}{2}\pi. \end{cases}$$

引理 3.3 设 $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数满足 (g_0) , $q: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ 为连续函数, $p: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数. 设 $\theta_0 > 0$ 和 $\delta > 0$ 为任意的两个常数且 $\theta_0 < \delta$, 则存在一个正数 $r_0 > R_*$, 当 $r(t_0) \geq r_0$ 时, 系统 (2.4)–(2.6) 的以 $(r(t_0), \theta(t_0))$ 为初值的解 $(r(t), \theta(t))$, 对每一个区间 $[t_1, t_2] \subset [0, \pi]$, $t_0 \in [t_1, t_2]$, 只要 $t \in [t_1, t_2]$ 有 $(r(t), \theta(t)) \in \mathbf{I}$, 则有 $t_2 - t_1 \leq \delta$.

证明 取 $\delta > 0$ 充分小, 取 $0 < \theta_0 < \delta$. 在区域 $\mathbf{I}$ 中 $\sin^2(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}) \leq \sin^2(\frac{\theta}{2} + \theta_*) \leq 1$, 若取 θ_0 充分小可使 $\sin^2(\frac{\theta}{2} + \theta_*) > \frac{3}{4}$.

由条件 (g_0) 可知, 存在 $\hat{d} > 0$, 使得 $x \geq \hat{d}$ 时有 $g(x) \geq 0$. 此时有

$$-\frac{q(t)g(x)}{\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\theta}{2} + \theta_*\right) \leq 0.$$

当 $x < \hat{d}$ 时, 由于 $q(t)$ 和 $p(t)$ 有界, 取 $r_0 > R_*$ 适当大, 可使当 $t \in [0, \pi]$ 时有

$$\left| -\frac{q(t)g(x)}{\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\theta}{2} + \theta_*\right) \right| < \frac{1}{8}, \quad \left| \frac{p(t)}{\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\theta}{2} + \theta_*\right) \right| < \frac{1}{8}.$$

由 $\theta' = -2\sin^2(\frac{\theta}{2} + \theta_*) - \frac{q(t)g(x) - p(t)}{\sqrt{r}} \cos(\frac{\theta}{2} + \theta_*)$ 知, $\theta' < -\frac{5}{4}$, 从而,

$$t_2 - t_1 \leq \left| \frac{\theta_0}{\frac{5}{4}} \right| \leq \frac{4}{5}\theta_0 < \delta.$$

得证. □

类似可证 **III** 的情形.

不失一般性, 假设存在一个非平凡子区间 $I = [c, d] \subset [0, \pi]$ 和 $q_0 > 0$ 使得对 $\forall t \in I$, 有 $q(t) \geq 2q_0 > 0$. 这样, 对 $\forall t \in I$ 和 $x \geq \hat{d}$ 有 $q(t)g(x)\text{sgn}(x) \geq 2q_0g(x)$. 同时, 若令 $g_1 = q_0g$, 则由条件 (g_0) 知, $\exists x_* > 0$, 使得对于 $\forall x > x_*$ 有 $q_0g(x) > |p|_\infty$, 且

$$\tau_{g_1}^+(e) \rightarrow 0, \quad e \rightarrow +\infty.$$

引理 3.4 设 $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 为局部 Lipschitz 连续函数满足 $(g_0)(\tau_0^+)$, $q(t): [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ 为连续有界变差函数且满足条件 (q_0) , 则对 $\forall \delta > 0$ 和 $\forall \theta_0 > 0$ 都存在 $r_0 = r_0(\delta, \theta_0) > R_*$, 使对每一个 $[t_1, t_2] \subset I$ 和对 (2.4)–(2.6) 的每一个解 $(r(t), \theta(t))$, 满足对所有 $t \in [t_1, t_2]$, $r(t) > r_0$ 和 $(r(t), \theta(t)) \in \mathbf{II}$, 可得 $t_2 - t_1 \leq \delta$.

证明 固定 $\delta > 0$ 且设 $g_1(x) = q_0g(x)$. 由 (g_1^+) 得

$$\lim_{e \rightarrow +\infty} \tau_{g_1}^+(e) = 0.$$

则存在 $E_\delta > 0$, 使

$$\tau_{g_1}^+(e) \leq \delta, \quad \forall e \geq E_\delta.$$

取 $M = \max\{E_\delta, x_*, \hat{d}\}$, 我们证明, 若取 $r_0 > 0$ 使 $2\sqrt{r_0} \sin \frac{\theta_0}{2} \geq M$ 满足定理要求. 假设 $(r(t), \theta(t))$ 是 (2.4)–(2.6) 的一个解, 满足对所有 $t \in [t_1, t_2] \subset I$, $r(t) \geq r_0$ 和 $(r(t), \theta(t)) \in \mathbf{II}$, 我们将证明 $t_2 - t_1 \leq \delta$.

根据 r_0 的选择和 $q(t)g(x)\text{sgn}(x) \geq q_0g(x) = g_1(x), \forall t \in I, x \geq \hat{d}$, 我们有

$$\begin{aligned} \theta' &= -2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} + \theta_* \right) - \frac{q(t)g(x) - p(t)}{\sqrt{r}} \cos \left(\frac{\theta}{2} + \theta_* \right) \\ &\leq -2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} + \theta_* \right) - \frac{q_0g(2\sqrt{r} \cos(\frac{\theta}{2} + \theta_*))}{2\sqrt{r} \cos(\frac{\theta}{2} + \theta_*)} 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} + \theta_* \right) + \frac{p(t)}{\sqrt{r}} \cos \left(\frac{\theta}{2} + \theta_* \right). \end{aligned}$$

根据 $p(t)$ 的有界知, 只要 $\sqrt{r}$ 足够大, 有 $\theta' < 0$, 对 $\forall t \in [t_1, t_2]$, 从而, $\theta(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 上单调递减. 从而, 如果对所有 $t \in [t_1, t_2]$ 有 $(r(t), \theta(t)) \in \mathbf{II}$ 且 $-\frac{3}{2}\pi < \theta(t) \pmod{2\pi} < -\frac{\pi}{2}$, 则设 $t^* = t_1$, 否则设 $t^* = \sup\{t \in [t_1, t_2] : \theta(t) \pmod{2\pi} < -\frac{\pi}{2}\}$. 这样, 区间 $[t_1, t_2]$ 可以分成两个部分 $[t_1, t^*]$ 和 $[t^*, t_2]$. 如果我们能证明 $t^* - t_1 \leq \frac{\delta}{2}$ 和 $t_2 - t^* \leq \frac{\delta}{2}$, 则此引理得证. 我们考虑第一个区间, 注意到 $G_1(s) = \int_0^s g_1(\xi) d\xi$, 在区间 $[t_1, t^*]$ 上我们计算下面的导数:

$$\frac{d}{dt} \left[G_1(x(t)) + \frac{1}{2} x'^2(t) \right] = [g_1(x) - q(t)g(x) + p(t)] x'(t).$$

易证在区间 $[t_1, t^*]$ 上, $x = 2\sqrt{r} \cos(\frac{\theta}{2} + \theta_*)$ 单调递增, 且

$$2\sqrt{r} \cos \left(\frac{\theta}{2} + \theta_* \right) \geq 2\sqrt{r_0} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \right) = 2\sqrt{r_0} \sin \frac{\theta_0}{2},$$

从而, $x(t) \geq M$. 这样对 $\forall t \in [t_1, t^*]$, 有 $\frac{d}{dt} [G_1(x(t)) + \frac{1}{2} x'^2(t)] \leq 0$.

若记 $M_0 = 2\sqrt{r(t^*)} \cos(\frac{\theta(t^*)}{2} + \theta_*) \geq 2\sqrt{r_0} \cos(\frac{\theta(t^*)}{2} + \theta_*) \geq 2\sqrt{r_0} \sin \frac{\theta_0}{2} \geq M$, 则有

$$G_1(x(t)) + \frac{1}{2} x'^2(t) \geq G_1(x(t^*)) + \frac{1}{2} x'^2(t^*), \quad \forall t \in [t_1, t^*],$$

从而,

$$G_1\left(2\sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}+\theta_*\right)\right)+\frac{1}{2}r\sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\theta_*\right)\geq G_1(M_0)+\frac{1}{2}r(t^*)\sin^2\left(\frac{\theta(t^*)}{2}+\theta_*\right)\geq G_1(M_0), \quad \forall t\in[t_1, t^*].$$

当 $r_0 \rightarrow +\infty$ 时, $M_0 \rightarrow +\infty$. 从而有

$$t^*-t_1\leq\int_{2\sqrt{r(t_1)\cos(\frac{\theta(t_1)}{2}+\theta_*)}}^{M_0}\frac{ds}{\sqrt{2[G_1(M_0)-G_1(s)]}}\leq\frac{1}{2}\tau_{g_1}^+(G(M_0))\leq\frac{\delta}{2}.$$

类似地, 在第二个区间 $[t^*, t_2]$ 上, $x=2\sqrt{r}\cos(\frac{\theta}{2}+\theta_*)$ 单调递减, 且

$$2\sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}+\theta_*\right)\geq 2\sqrt{r_0}\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_0}{2}\right)=2\sqrt{r_0}\sin\frac{\theta_0}{2}\geq M,$$

从而可证, 对 $\forall t\in[t^*, t_2]$, 有 $\frac{d}{dt}[G_1(x(t))+\frac{1}{2}x'^2(t)]\geq 0$. 因此,

$$G_1(x(t))+\frac{1}{2}x'^2(t)\geq G_1(x(t^*))+\frac{1}{2}x'^2(t^*), \quad \forall t\in[t^*, t_2],$$

从而,

$$G_1\left(2\sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}+\theta_*\right)\right)+\frac{1}{2}r\sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\theta_*\right)\geq G_1(M_0), \quad \forall t\in[t^*, t_2].$$

从而, 对充分大的 r_0 , 有

$$t_2-t^*\leq\int_{2\sqrt{r(t_2)\cos(\frac{\theta(t_2)}{2}+\theta_*)}}^{M_0}\frac{ds}{\sqrt{2[G_1(M_0)-G_1(s)]}}\leq\frac{1}{2}\tau_{g_1}^+(G(M_0))\leq\frac{\delta}{2}.$$

这样, 引理得证. $\square$

接下来要证明, 在超线性条件 (τ_0^+) 下, $r(t)$ 越充分大时, 解绕原点的圈数也越充分多. 这只要证明 $\theta(0)-\theta(\pi)$ 充分大即可, 其中 $(r(t), \theta(t))$ 为 (2.4)–(2.6) 的解. 然而由于 $q(t)g(x)\geq 2q_0g(x)$ 只在区间 **I** 内成立, 所以, 这只能证明 $\theta(c)-\theta(d)$ 充分大. 所以, 必须控制解在区间 $[a, c]$ 和 $[d, b]$ 内的顺时针旋转的圈数. 下面, 任取一个区间 $[a', b']\subset[0, \pi]$, 则由向量场 (2.4)–(2.6) 的性质, 易证下面的引理:

引理 3.5 设 g, q 和 p 满足上述引理中的条件且设 $(r(t), \theta(t))$ 为 (2.4)–(2.6) 的一个解, 则

$$\theta(a')-\theta(b')>-2\pi.$$

性质 3.1 假设引理 3.5 中的条件成立, 则对任意的正数 $H>0$, 都存在一个正数 $R=R(H)>R_*$ 使得如果 $(r(t), \theta(t))$ 为 (2.4)–(2.6) 的定义在 $[0, \pi]$ 上的一个解且满足 $r(0)\geq R$, 则有 $\theta(0)-\theta(\pi)\geq 2\pi H$.

证明 我们将 $\theta(0)-\theta(\pi)$ 分成 3 个部分:

$$\theta(0)-\theta(\pi)=(\theta(0)-\theta(c))+(\theta(c)-\theta(d))+(\theta(d)-\theta(\pi)),$$

由引理 3.5 知,

$$(\theta(0)-\theta(c))+(\theta(d)-\theta(\pi))>-4\pi. \quad (3.2)$$

为了估计 $\theta(c)-\theta(d)$, 我们考虑 c 后轨线与 v^- 正半轴第一次相交的时刻 t^* , 则我们将计算时间 $[t^*, d]$ 内轨道的圈数, 这只要看轨道与 v^- 正半轴相交的次数即可. 而且, 引理 3.3 和 3.4 将有助于计算轨道转一圈所需的时间. 事实上, 假设我们固定一个 $\delta>0$ 和 $\theta_0>0$, 由引理 3.4, 存在一个

$R_0 = R_0(\delta, \theta_0)$, 使系统 (2.4)–(2.6) 的每一个解, 只要 $(r(t), \theta(t)) \in \mathbf{II}$ 且 $r(t) \geq R_0$, 则解穿过 $\mathbf{II}$ 的时间少于 δ ; 另一方面, 只要 $0 < \theta_0 < \delta$, 则解穿过 $\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{III}$ 的时间分别少于 δ . 由弹性性质, 取 $N > 0$ 使得只要 $r(t_0) \geq \max\{N, R_*\} = R(H)$, 就有对 $\forall t \in [0, \pi]$, 有 $r(t) \geq R_0$. 从而转一圈所需时间少于 3δ . 此外, 轨道从出发到到达 v - 正半轴之间的一段时间 $t^* - c$ 少于 3δ , 因为轨道至多穿过区域 $\mathbf{I}, \mathbf{II}$ 和 $\mathbf{III}$ 各一次. 从而, 考虑到 (2.1), 如果轨道顺时针方向旋转了至少 $H + 2$ 圈, 则一定有

$$\theta(0) - \theta(\pi) \geq 2\pi H.$$

所以, 当 $3\delta + 3\delta(H + 2) \leq d - c$, 即 $\delta \leq \frac{d-c}{3H+9}$ 时, 解可以在 $[c, d]$ 内旋转至少 $H + 2$ 圈. 得证. $\square$

4 无穷个偶周期碰撞解的存在性

定理 4.1 假设 (g_0) 、 (τ_0^+) 和 (q_0) 成立, 则方程 (1.1) 有无穷个偶的 2π - 周期碰撞解 $\{x(t, a_k)\}_{k=0}^\infty$ 满足

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = +\infty.$$

证明 我们将证明分成以下两步:

第 1 步 由引理 3.2, 我们的目标是找到一列数 $\{a_k\}$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \infty$, 且存在 (2.4)–(2.6) 的一列解 $(\theta(t, a_k), r(t, a_k))$ 满足

$$\theta(0, a_k) = -\frac{\pi}{2}, \quad r(0, a_k) = a_k, \quad \theta(\pi, a_k) = -\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

因为对于充分大的 $\beta > 0$, 数集 $\{\theta(\pi, a); a > \beta\}$ 是连续统, 所以, 相应地, 我们只需证明

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \theta(\pi, a) = -\infty. \quad (4.1)$$

第 2 步 我们定义

$$\text{rot}_{[0, \pi]}(a) := \int_0^\pi -\theta' dt = \theta(0, a) - \theta(\pi, a),$$

表示 uv 坐标平面上从点 $(a, 0)$ 出发的解在区间 $[0, \pi]$ 内绕原点旋转的度数, 记 $r(t, a) = r(t; 0, (a, -\frac{\pi}{2}))$, $\theta(t, a) = \theta(t; 0, (a, -\frac{\pi}{2}))$, 易见

$$\text{rot}_{[0, \pi]}(a) = \int_0^\pi -\theta'(t) dt.$$

当 $a \rightarrow +\infty$ 时, 有 $r(t, a) \rightarrow +\infty, t \in [0, \pi]$, 由解的弹性性质和性质 3.1 可得 $\text{rot}_{[0, \pi]}(a) \rightarrow +\infty$. 再由 $\theta(0, a) = -\frac{\pi}{2}$ 知, (4.1) 成立. 得证. $\square$

定理 4.2 假设 (g_0) 、 (τ_0^+) 和 (q_0) 成立, 则对任意的 $m \in \mathbb{Z}_0^+$, 方程 (1.1) 有无穷个偶的 $2m\pi$ - 周期碰撞解 $\{x(t, a_k)\}_{k=0}^\infty$ 满足

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = +\infty.$$

证明 类似于上面关于 2π - 偶周期解的证明, 可以找到两个数列 $\{c_k\}_1^\infty$ 和 $\{d_k\}_1^\infty$ 满足 $c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < \cdots < c_n < d_n < \cdots$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} c_k = +\infty$ 以及

$$\begin{aligned} \theta(m\pi, c_k) &= -\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, & \theta(m\pi, c_k) - \theta(0, c_k) &> -q_k\pi, \\ \theta(m\pi, d_k) &= -\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, & \theta(m\pi, d_k) - \theta(0, d_k) &< -q_k\pi, \end{aligned}$$

其中 $q_1 < q_2 < \cdots < q_k < \cdots$ 都是素数.

由连续性知, 存在数列 $\{a_k\}_1^\infty$, $c_k < a_k < d_k$ ($k = 1, 2, \dots$), 使得

$$\theta(m\pi, a_k) - \theta(0, a_k) = -q_k\pi,$$

从而,

$$\theta(m\pi, a_k) = -\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

由引理 3.2 知, $x(t, 2\sqrt{a_k})$ 是方程 (1.1) 的 $2m\pi$ - 偶周期碰撞解. 由对称性易证, $\theta(2m\pi, a_k) - \theta(0, a_k) = -2q_k\pi$, 即 $x(t, 2\sqrt{a_k})$ 在一个周期内恰好发生 q_k 次碰撞. 类似于文献 [16] 中的讨论, 可以证明 $2m\pi$ 是 $x(t, 2\sqrt{a_k})$ 最小周期, 即 $(2\sqrt{a_k}, 0)$ 是 m 阶 ε 点. 得证. $\square$

5 偶周期碰撞解的稠密性分布

本节将考虑 $p(t) \equiv 0$ 时碰撞方程

$$\begin{cases} x'' + q(t)g(x) = 0, & \text{当 } x(t) > 0, \\ x(t) \geq 0, \\ \text{若 } x(t_0) = 0, \text{ 则 } x'(t_0+) = -x'(t_0-) \end{cases} \quad (5.1)$$

对称碰撞周期解的分布情况, 其中 q 满足 (q_0) , $g(x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 是局部 Lipschitz 连续函数, 满足

$(\tilde{g}_0) : g(x) > 0, x \neq 0, g(0) = 0;$

$(\tau_0^+) : \lim_{e \rightarrow +\infty} \tau_g^+(e) = 0.$

相应地, 与 (5.1) 等价的碰撞系统及其在坐标变换 (2.2) 和 (2.3) 下的极坐标形式分别为

$$\begin{cases} x' = y, & y' = -q(t)g(x), & \text{当 } x(t) > 0, \\ x(t) \geq 0, \\ \text{若 } x(t_0) = 0, \text{ 则 } x'(t_0+) = -x'(t_0-), \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} r' = 2r \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \left[1 - \frac{q(t)g(x)}{x}\right], \\ \theta' = -2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{q(t)g(x)}{\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \end{cases} \quad 4k\pi - \frac{3}{2}\pi < \theta < 4k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} r' = 2r \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{5\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{5\pi}{4}\right) \left[1 - \frac{q(t)g(x)}{x}\right], \\ \theta' = -2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{5\pi}{4}\right) - \frac{q(t)g(x)}{\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{5\pi}{4}\right), \end{cases} \quad 4k\pi + \frac{\pi}{2} < \theta < 4k\pi + \frac{5\pi}{2}, \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} \theta(t_0) = 2k_0\pi - \frac{3\pi}{2}, \\ r(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} r(t), \end{cases} \quad \text{当 } \lim_{t \rightarrow t_0} \theta(t) = 2k_0\pi - \frac{3\pi}{2}, \quad k_0 \in \mathbb{Z}. \quad (5.5)$$

易见, 由 $(\tilde{g}_0)$ 和解的存在唯一性, 对于任意的 r_0 和任意的 $T > 0$, 系统 (5.3)–(5.5) 的以 (r_0, θ_0) 为初值的连续解 $(r(t; t_0, r_0, \theta_0), \theta(t; t_0, r_0, \theta_0))$ 在 $[-T, T]$ 上有定义. 同时, 由定理 4.1 知, 方程 (5.1) 有无穷个偶的 2π - 周期碰撞解 $\{x(t, a_k)\}_{k=0}^\infty$ 满足

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = +\infty.$$

任取两个碰撞 ε - 点 p_1 和 p_2 , 其中 $p_1 = (a_1, 0)$, $p_2 = (a_2, 0)$ ($0 < a_1 < a_2$). 在 x 正半轴上连接 p_1 和 p_2 的直线段记为 $\overline{p_1 p_2}$, 即

$$\overline{p_1 p_2} = \{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq a \leq a_2\}.$$

下面是我们的主要结果:

定理 5.1 假设 $g \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R})$ 满足 $(\tilde{g}_0)$ 和 (τ_0) , $q \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R})$ 满足 (q_0) , 则直线段 $\overline{p_1 p_2}$ 至少包含一个 (5.1) 的不同于 p_1 和 p_2 的碰撞 ε - 点, 从而包含 (5.1) 的无穷多个碰撞 ε - 点.

注 5.1 我们注意到 xy 碰撞相平面的碰撞 ε - 点 $(a, 0)$ 对应到 uv 相平面的点 $(0, -\frac{a^2}{4})$, 并且 x 正半轴上的直线段 $\overline{p_1 p_2}$ 对应到 v 负半轴上的直线段 $\overline{P_1 P_2}$. 因此, 在定理 5.1 的证明中, 采用与文献 [18, 定理 3] 完全相同的证明步骤即可得到所需结论.

容易证明: 若 $\theta(t_1; t_0, r_0, \theta_0) = -\frac{3}{2}\pi \pmod{2\pi}$, 则 $r'_-(t_1) = r'_+(t_1)$, $\theta_-(t_1) = \theta_+(t_1)$, 因此, 由导数存在性定理, $(r(t; t_0, r_0, \theta_0), \theta(t; t_0, r_0, \theta_0))$ 在 t_1 处导数存在. 在下面, 我们记 P 代表 Poincaré 映射, 使得

$$Pq = (u(2m\pi, 0; a, b), u'(2m\pi, 0; a, b)), \quad q = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

其中 m 是一个整数. 由于 $g(u)$ 的连续可微性, P 在 q 点是连续可微的, 且是 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 到 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上的一一映射. 由第 2 节讨论知, P 是 (u, v) - 平面上的保面积同胚映射. 显然, 若 C 是一个简单闭曲线, 则 $C' = TC$ 也是一个简单闭曲线.

由条件 (q_0) 可假设存在闭区间 $I \subset [0, 2\pi]$ 满足: 存在一个正数 $q_0 > 0$ 使得对于任意的 $t \in I$ 都有 $q(t) \geq q_0 > 0$.

假设 $(r(t; t_0, r_0, \theta_0), \theta(t; t_0, r_0, \theta_0))$ 为系统 (5.3)–(5.5) 在 $t = 0$ 时刻从 (r_0, θ_0) 出发的解, $(u(t, 0; a, b), u'(t, 0; a, b))$ 为变换 (2.9) 下与之对应的连续函数.

定理 5.1 的证明 第 1 步 设 p_1 和 p_2 分别是 n_1 和 n_2 阶的 ε - 点, 且设 $m = n_1 n_2$, 则

$$PP_1 = P_1, \quad PP_2 = P_2.$$

设 l_0 是连接 $(0, -\frac{a_1^2}{4})$ 和 $(0, -\frac{a_2^2}{4})$ 的开的直线段, 即

$$l_0 = \overline{P_1 P_2} - \{P_1, P_2\}.$$

我们的目的是要证明 L 至少包含一个点 $(0, -\frac{a^2}{4})$ 使得 $(r(0; t_0, -\frac{a^2}{4}, -\frac{\pi}{2}), \theta(0; t_0, -\frac{a^2}{4}, -\frac{\pi}{2}))$ 对应到方程 (5.1) 的一个碰撞 ε - 点 $(0, a)$. 定义

$$l_k = Pl_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

因为 $PP_1 = P_1$, $PP_2 = P_2$, 易见 l_k 是连接 P_1 与 P_2 的连续曲线.

设 L 为 v - 轴, H 为左半平面, H^* 为右半平面, 即

$$L := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u = 0\}, \quad H := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u < 0\}, \quad H^* := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}.$$

下面用反证法. 假设 l_0 不包含 ε 点, 即对所有 $k \geq 1$ 有 $l^k \cap L = \emptyset$.

类似文献 [18], 可以证明 $L^k \subset H$ 或 $L^k \subset H^*$ ($k \geq 1$). 不失一般性, 不妨设 $L^k \subset H$, 另外注意到 T 是保向和保面积的.

第 2 步 任取 $q = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, 记 $(r(t, q), \theta(t, q)) := (r(t; 0, r_0, \theta_0), \theta(t; 0, r_0, \theta_0))$, 其中 $a = r_0 \cos \theta_0$, $b = r_0 \sin \theta_0$. 易见 $\theta(t; q)$ 是 $0 \leq t \leq \pi$ 上的连续函数 (对 $|q| > 0$). 设 O_1 是以原点为圆心 $r_1 (> 0)$ 为半径的包含 P_1 和 P_2 作为内点的圆周, 且设 $\max_{|q|=r_1} |\theta(\pi; q)| = M_1$.

由性质 3.1, 我们可取一个正数 $r_2 > r_1$, 使

$$\min_{|q|=r_2} |\theta(\pi; q)| \geq M_1 + \pi.$$

设 O_2 是以原点为圆心 r_2 为半径的圆, 类似于文献 [18] 中的讨论, 可证存在 $k > 0$, 使 $l_k \cap O_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. 设 $q_1 \in l_k \cap O_1$, $q_2 \in l_k \cap O_2$, 相应地, 有 $|\theta(\pi, q_1)| \leq M_1$ 和 $|\theta(\pi, q_2)| \geq M_1 + 2\pi$.

因为 $\theta(\pi, q)$ 对 $|q| > 0$ 是连续的函数, 所以, 存在 $q_3 \in l_k$, 使得 $\theta(\pi, q_3) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, 其中 $r_1 \leq |q_3| \leq r_2$, 设 $q_3 = (a', b') \in \mathbb{R}^2$, 则由 (2.9), 得

$$u(\pi, 0; a', b') = 0.$$

因为存在一点 $q_0 \in l_0$, 令 $q_0 = (0, -\frac{a_0^2}{4})$, 使得

$$q_3 = P^k q_0 = \left(u\left(2km\pi; 0, -\frac{a^2}{4}, 0\right), u'\left(2km\pi; 0, -\frac{a^2}{4}, 0\right) \right),$$

可得

$$\theta(2km\pi + \pi, q_0) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

所以, 由引理 3.2, $(a_0, 0)$ 是方程 (5.1) 的一个 ε - 点. 证毕. $\square$

致谢 衷心感谢审稿人的仔细审阅和宝贵意见.

参考文献

- 1 Lazer A, McKenna P. Periodic bounding for a forced linear spring with obstacle. *Differential Integral Equations*, 1992, 5: 165–172
- 2 Qian D. Large amplitude periodic bouncing for impact oscillators with damping. *Proc Amer Math Soc*, 2005, 133: 1797–1804
- 3 Bonheure D, Fabry C. Periodic motions in impact oscillators with perfectly elastic bouncing. *Nonlinearity*, 2002, 15: 1281–1298
- 4 Qian D, Torres P. Bouncing solutions of an equation with attractive singularity. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 2004, 134: 201–213
- 5 钱定边, 孙西澄. 渐近线性碰撞振子的不变环面. *中国科学 A 辑*, 2006, 36: 418–437
- 6 Herrera A, Torres P. Periodic solutions and chaotic dynamics in forced impact oscillators. *SIAM J Appl Dyn Syst*, 2013, 12: 383–414
- 7 Hale J. *Ordinary differential equation*. New York: Robert E Krieger Publishing Company Huntingto, 1980
- 8 Papini D, Zanolin F. Differential equations with indefinite weight: Boundary value problems and qualitative properties of the solutions. *Rend Sem Mat Univ Pol Torino*, 2002, 60: 265–295
- 9 Papini D. Boundary value problems for second order differential equations with superlinear terms: A topological approach. PhD Thesis. Trieste: Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, 2000
- 10 Papini D, Zanolin F. A topological approach to superlinear indefinite boundary-value problem. *Topol Methods Nonlinear Anal*, 2000, 15: 203–233
- 11 Papini D, Zanolin F. Periodic points and chaotic-like dynamics of planar maps associated to nonlinear Hill's equations with indefinite weight. *Georgian Math J*, 2002, 9: 339–366
- 12 Papini D, Zanolin F. On the periodic boundary value problem and chaotic-like dynamics for nonlinear Hill's equations. *Adv Nonlinear Stud*, 2004, 4: 71–91
- 13 Papini D, Zanolin F. Fixed points, periodic points, and coin-tossing sequences for mappings defined on two-dimensional cells. *Fixed Point Theory Appl*, 2004, 2004: 113–134
- 14 Papini D, Zanolin F. Some results on periodic points and chaotic dynamics arising from the study of the nonlinear Hill equations. *Rend Sem Mat Univ Pol Torino*, 2007, 65: 115–157

- 15 孙西滢, 钱定边. 扭转性质和无先验界的二阶微分方程. 数学学报, 2009, 52: 1199–1206
- 16 Ding T, Zanolin F. Periodic solutions of Duffings' equation with superquadratic potential. J Differential Equations, 1992, 97: 328–378
- 17 Ding T, Iannacci R, Zanolin F. Existence and multiplicity results for periodic solutions of semilinear Duffing equations. J Differential Equations, 1993, 105: 364–409
- 18 Nakajima F. Even and periodic solution of the equation $\ddot{u} + g(u) = e(t)$. J Differential Equations, 1990, 83: 277–299
- 19 王志国, 阮春兰, 钱定边. 次线性碰撞振子次调和弹性解的存在性和多解性问题. 南京大学学报数学半年刊, 2010, 27: 17–30
- 20 丁卫, 钱定边. 碰撞 Hamiltonian 系统的无穷小周期解. 中国科学: 数学, 2010, 40: 563–574
- 21 孙西滢. 弹性碰撞振子的动态行为. 硕士学位论文. 苏州: 苏州大学, 2003

The periodic motions of a class of symmetric superlinear Hill's impact equations

WANG Chao

Abstract We are concerned with the existence, multiplicity and distribution of the even and periodic solutions of a class of symmetric superlinear Hill's equations with impact. We transform the impact phase-plane into a whole phase-plane by a coordinate transformation and, we prove the existence of infinite numbers of symmetric harmonic and subharmonic solutions of forced impactors as well as the densely distribution of symmetric subharmonic solutions of the unforced equations under some superlinear assumption about time-mapping. We also develop a lemma on sufficient condition for symmetric periodic solutions to symmetric second order equations.

Keywords symmetric impact equations, weight functions, symmetric periodic bouncing solutions, time-map, Poincaré map

MSC(2010) 34C15, 34C25, 34B30, 54H25

doi: 10.1360/N012013-00093