$(k+1)$ 秩匀称线性无圈超图的计数公式

单志龙^① 柳柏濂^{①②}

(^①华南师范大学数学系, 广州 510631; ^②广东职业技术师范学院计算机系, 广州 510633)

摘要 得到了 $(k+1)$ 秩匀称线性无圈超图的计数显式, 并应用 Pólya 计数定理, 得到了 $(k+1)$ 秩非标号匀称线性超树 H 和 $(k+1)$ 秩非标号匀称线性无圈超图的生成函数.

关键词 超图 线性超图 超树 二部树 Pólya 定理

超图是图概念的推广, 超树是树概念的推广, 它们用“图的语言”描述了集合系统. 近年的研究表明, 超图和超树的数学模型在计算机科学的关系数据库设计中有重要的应用(见文献[1]).

定义 1 二元组 $H = (X, \mathbf{e})$ 为一个超图, 如果 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ 是有限集, $\mathbf{e} = \{E_i \mid i=1, 2, \dots, q\}$ 是 X 的子集的一个族, 其中 $E_i \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq q$, 且 $\bigcup_{i=1}^q E_i = X$. $|X| = p$ 称为 $H = (X, \mathbf{e})$ 的阶, X 中的元素称为顶点, $\mathbf{e}$ 中的元素称为边. 若 $E_i \in \mathbf{e}$, 且 $|E_i| = 1$, 则 E_i 称为环(loop). 又 $\max_i |E_i|$ 称为 H 的秩.

在超图 $H = (X, \mathbf{e})$ 中, 一个顶点 x 称为孤立的, 如果它仅仅属于一条边. 一条边 E 称为 H 的一个耳朵, 如果存在 E' , 使得 $E \setminus E'$ 中的每个顶点是孤立的. 设 E 是一个耳朵, 称从 H 除去 E 为耳朵移除. 作为特殊情形, 仅有一条边, 可以用“耳朵移除”除去它. 重复耳朵移除直到不能再移除为止, 所得到的超图称为原超图的 Graham 约化. 一个超图称为无圈的, 如果它的 Graham 约化是空的. 在超图 $H = (X, \mathbf{e})$ 中, 若对任意两条不同的边 $E_1, E_2 \in \mathbf{e}$, 在 $\mathbf{e}$ 中均存在一边序列 $f_1, f_2, \dots, f_k$, 使得 $E_1 = f_1, E_2 = f_k$ 且 $|f_i \cap f_{i+1}| \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq k-1$, 则称 H 是连通的, 否则是不连通的.

定义 2 如果超图 $H = (X, \mathbf{e})$ 是连通且不含圈的, 则称 H 为超树. 若任意 $E_i \in \mathbf{e}$, $|E_i| = M$ (常数), 则称 H 是秩为 M 的匀称超树. 如果对于每一对边 $E_1, E_2 \in \mathbf{e}$, 都有 $|E_1 \cap E_2| \leq 1$, 则超图 H 是线性的.

定义 3 在线性超树 $H = (X, \mathbf{e})$ 中, 如果 $|E_i| \geq 2$, 且 E_i 中恰有一点是与其他边的公共点, 则称 E_i 为悬挂边.

定义 4 超图 H 的对应的二部图是 $G(H) = (Y_1, Y_2, E)$ (这里 Y_1, Y_2 是 G 的两部分顶点集, E 是边集), 其中 $Y_1 = X, Y_2 = \mathbf{e}$ (即把 H 中的边 E_i 看成是 G 中 Y_2 的点), 在 G 中, 两点 $x_i \in Y_1, E_j \in Y_2$ 之间连一条边当且仅当 $x_i \in E_j$ (在 H 中).

定义 5 线性超树 H 的对应的二部图称为对应的二部树; 给其对应的二部树某个点着以根称为对应的二部有根树; 给其对应的二部树某个一度点着以根称为对应的二部植树.

定义 6 如果 H 是超树, 且该超树的顶点和边都没有标号, 则称 $H = (X, \mathbf{e})$ 为非标号超树. $(k+1)$ 秩非标号匀称线性超树就是非标号线性超树 H , 且其每条边所含的顶点数都为 $(k+1)$.

定义 7 图 G 的自同构群是保持 G 的顶点之间相邻性的所有置换的集合, 记为 $G(G)$. 如果图 G 的两个顶点属于由 $G(G)$ 确定的同一轨道, 则称这两个顶点为相似的. 如果一棵树的两个顶点是相似的, 则连接该两点的一条边称为对称边.

最近, 王建方和李海珠¹⁾研究了标号匀称超图的计数, 并得到了 n 阶 $(k+1)$ 秩标号匀称线

1) Wang Jianfang, Li Haizhu. Counting acyclic hypergraphs

<https://engine.scichina.com/doi/10.1360/csb2000-45-16-1705>

性无圈超图的递归计数式. 王建方等人^[1]指出“能找出匀称线性无圈超图的计数显式是一件好事, 但似乎是困难的”. 事实上, 早在 1988 年柳柏濂^[2]已得到了匀称线性超树的计数显式. 在这个基础上本文导出了匀称线性无圈超图的计数式, 并且进一步用 Pólya 计数理论, 得到了非标号匀称线性超树和非标号匀称线性无圈超图的生成函数.

1 匀称线性无圈超图的计数

对于线性超树, 文献[2]证明了下面的结论:

引理 1 H 是线性超树当且仅当 $G(H)$ 是树.

引理 2 若 $H = (X, e)$ 是 $(k+1)$ 秩的匀称线性超树, $|X| = p$, $|e| = q$, 则 $q = (p-1)/k$.

引理 3 若 $H = (X, e)$ 是线性超树, 无环且 $|e| \geq 2$, 则 E 至少有两条悬挂边.

在文献[2]中, 柳柏濂推广了基础图论中标号树计数的 Caley 公式, 得出了 p 阶和 q 边的 $(k+1)$ 秩标号匀称线性超树的个数是 $T_{k+1}(p, q)$, 其中

$$T_{k+1}(p, q) = \begin{cases} \frac{p! p^{q-2}}{q! (k!)^q}, & p = qk + 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (1)$$

设 n 阶 $(k+1)$ 秩匀称线性超树的个数是 $t(n, k+1)$, 由引理 2 和 (1) 式, 有

定理 1

$$t(n, k+1) = \begin{cases} n! n^{\frac{n-1}{k}-2} / \left(\frac{n-1}{k} \right)! (k!)^{\frac{n-1}{k}}, & k | (n-1), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (2)$$

又设 n 阶 $(k+1)$ 秩匀称线性无圈超图的个数为 $f(n, k+1)$, 有

定理 2

$$f(n, k+1) = \sum_{(n_1, n_2, \dots, n_r)} \prod_{i=1}^r t(n_i, k+1), \quad (3)$$

这里, 对 $(n_1, n_2, \dots, n_r)$ 求和是指跑遍标号集 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的所有划分 $X_1, X_2, \dots, X_r$, 其中 $|X_i| = n_i$, $n_i \geq 1$, 且 $k | (n_i - 1)$, $i = 1, 2, \dots, r$.

2 非标号匀称线性无圈超图的计数

约定: 本节中提到的超图和它的对应二部图都为非标号的. 为简单起见, 把匀称线性超树简称为匀称超树, 匀称线性无圈超图简称为匀称超图.

要计算线性超树 H 的个数, 显然只需计算 H 的对应二部树 $G(H)$ 的个数. 我们先求出 $(k+1)$ 秩匀称超树 H 的生成函数, 再求出 $(k+1)$ 秩匀称超图的生成函数.

考察 $(k+1)$ 秩匀称超树 H 的对应二部树 $G(H)$, 设 $|e| = q$, $|X| = p$, $G(H)$ 的阶为 $p + q$. 在 $G(H)$ 中, Y_2 的每个点的度都为 $(k+1)$, Y_1 中的每个点都要与 Y_2 中的某个点相邻, 且 Y_1 中可以有也可以没有度为 $(k+1)$ 的点, 但易见, 在 Y_1 中其 $(k+1)$ 度点的个数最多不超过 $\lfloor (q-1)/k \rfloor$ 个, 且在 Y_1 中一个点的度最多为 q . 令 $r = \lfloor (q-1)/k \rfloor$.

用 $\bar{H}_{a,b}$, $H_{a,b}$, $h_{a,b}$ 分别表示 a 阶, Y_2 中点的个数为 b 的匀称超树 H 的对应二部植树、对应二部有根树及对应二部树 $G(H)$ 的个数. 用 $\bar{H}(x, y)$, $H(x, y)$, $h(x, y)$ 分别表示匀称超树 H 的对

应二部植树、对应二部有根树及对应二部树 $G(H)$ 的生成函数, 其中

$$\begin{aligned}\bar{H}(x, y) &= \sum_{a,b} \bar{H}_{a,b} x^a y^b, \\ H(x, y) &= \sum_{a,b} H_{a,b} x^a y^b, \\ h(x, y) &= \sum_{a,b} h_{a,b} x^a y^b.\end{aligned}$$

由 Pólya 计数定理, 构形生成函数(configuration counting series)是通过把构性群的置换指标替换为图形生成函数(figure counting series)而得到的, 即 $C(x) = Z(A, c(X))$ (见文献[3]), 因此要求构形生成函数则需要确定图形生成函数和构性群的置换指标.

定理 3 对于 $(k+1)$ 秩匀称超树 H 的对应二部植树、对应二部有根树及对应二部树 $G(H)$, 其生成函数 $\bar{H}(x, y)$, $H(x, y)$, $h(x, y)$ 满足

$$\bar{H}(x, y) = x^2 y Z \left(S_k, \sum_{n=0}^{q-1} x Z(S_n, \bar{H}(x, y)/x) \right), \quad (4)$$

$$H(x, y) = x \sum_{n=1}^q Z(S_n, \bar{H}(x, y)/x) + xy Z \left(S_{k+1}, \sum_{n=0}^{q-1} x Z(S_n, \bar{H}(x, y)/x) \right), \quad (5)$$

$$h(x, y) = H(x, y) - \frac{\bar{H}(x, y)}{x} \times \sum_{n=0}^{q-1} x Z(S_n, \bar{H}(x, y)/x). \quad (6)$$

引理 4 $(k+1)$ 秩匀称超树 H 的对应二部树 $G(H)$ 没有对称边, 即 $s=0$ (s 表示树中对称边的条数).

证 对于匀称超树 H 的对应二部树 $G(H)$, 如果该树只有在 Y_2 中有 $(k+1)$ 度点, 而 Y_1 中没有, 则它的每一条边的两个端点度是不同的, 一个为 $(k+1)$ 度点, 另一个为非 $(k+1)$ 度点, 显然 $G(H)$ 中没有对称边, $s=0$.

如果该树在 Y_1, Y_2 中都有 $(k+1)$ 度点, 假设有一条边 (u, v) 为对称边, 则 u, v 都为 $(k+1)$ 度点. 不妨设 u 为 Y_2 中的点, v 为 Y_1 中的 $(k+1)$ 度点. v 所连接的两个点必为 Y_2 中的 $(k+1)$ 度点, 设该两点分别为 u_1, u_2 . 由对称性易知, u 所连接的两个点也必为 $(k+1)$ 度点, 且为 Y_1 中的点, 设该两点分别为 v_1, v_2 . 那么, v_1, v_2 所连接的点又必为 Y_2 中的 $(k+1)$ 度点, 于是 u_1, u_2 所连接的点必为 $(k+1)$ 度点, 继续该过程便可得知, 如果该树中含有对称边, 设 Y_2 中含有 q 个 $(k+1)$ 度点, 则 Y_1 中必也含有 q 个 $(k+1)$ 度点, 这与 Y_1 中的 $(k+1)$ 度点的个数不超过 $r = \lfloor (q-1)/k \rfloor$ 相矛盾, 从而, $s=0$. 证毕.

利用定理 3 中的公式, 可以求得 $h(x, y)$, 在 $h(x, y)$ 的展开式中, 对于每一项, x 的次数表示 $(k+1)$ 秩匀称超树 H 的对应二部树 $G(H)$ 的阶数, y 的次数表示 $(k+1)$ 秩匀称超树 H 的边数. 故在 $h(x, y)$ 的展开式中, x 的次数为 $p+q$, y 的次数为 q 的项, 就是 p 阶 q 边的 $(k+1)$ 秩非标号匀称超树的个数.

定理 3 的证 为了便于证明此定理, 给 $G(H)$ 中 Y_1, Y_2 的点着以不同颜色, 不妨设为黑白两色. 把 Y_1 中的点称为白点, 把 Y_2 中的点称为黑点.

首先求植树的生成函数. 为方便叙述把与植树的根相邻的点称为次根点.

注意到, 每一个对应二部植树的根点必为白点. n 个子植树可以对应到一棵新的树, 建立下列对应: n 个植树的根点粘在一起作为这棵新树的根点, 那么, 这棵新的树中根点的度为 n , 因此其图形生成函数为 $\bar{H}(x, y)/x$, 由 Pólya 计数定理, 其构形生成函数为 $Z(S_n, \bar{H}(x, y)/x)$. 但是, 新的根点没有被考虑在内, 故其构形生成函数还要乘上 x , 然后对所有的 $n \geq 0$ 求和得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} xZ(S_n, \bar{H}(x, y)/x). \quad (7)$$

把(7)式记为 $\bar{H}'(x, y)$. 不难看出, k 棵这样的新树可以对应到一棵植树, 这棵植树中的次根点的度为 $(k+1)$, 且必为黑点; 根点的度为 1, 必为白点. 故其图形生成函数为 $\bar{H}'(x, y)$, 构形生成函数为 $Z(S_k, \bar{H}'(x, y))$, 但新的根点和新引进的次根点(黑点)没有被考虑在内, 所以, 其构形生成函数还要乘上 x^2y . 又知一个对应二部植树其白点的个数不超过 q , 故(7)式中, 求和只能从 $n=0$ 到 $q-1$, 于是(4)式得证.

再考虑根树的生成函数.

以对应二部树的一个点为根点只可能有两种情形, 一个是以 $G(H)$ 中的白点为根, 另一个是以 $G(H)$ 中的黑点为根. 若为第 1 种情形, 不难得知其图形生成函数为 $\bar{H}(x, y)/x$, 类似于上面的讨论, 对所有的 $n(1 \leq n \leq q)$ 求和, 则其可表示为

$$x \sum_{n=1}^q Z(S_n, \bar{H}(x, y)/x). \quad (8)$$

若为第 2 种情形, 与求植树的生成函数方法基本一样, 但因最后的根点为黑点, 所以所求得的构形生成级数还要乘上 xy , 即为

$$xyZ\left(S_{k+1}, \sum_{n=0}^{q-1} xZ(S_n, \bar{H}(x, y)/x)\right). \quad (9)$$

把(8)和(9)式相加, 便可得到(5)式.

最后求对应二部树的生成函数.

由 Otter 定理^[3], 需要求出对对应二部树的非对称边着以根的个数. 令 $L(x, y)$ 为对对应二部树的非对称边着以根的生成函数, 又由引理 4 知, 对应二部树中没有对称边, 于是可知, 一棵植树和一棵根点为白点的树都可在非对称根边处对应到这样的树, 其中, 根边连接这棵植树的次根点与另一棵树的根点, 且删除植树中的根点, 所得的 $L(x, y)$ 为

$$L(x, y) = \frac{\bar{H}(x, y)}{x} \times x \sum_{n=0}^{q-1} Z(S_n, \bar{H}(x, y)/x). \quad (10)$$

于是由 $h(x, y) = H(x, y) - L(x, y)$, (6)式便可得出. 证毕.

现在求 $(k+1)$ 秩匀称超图的生成函数.

用 $f_i(x, y)$ 表示恰好有 i 个对应二部树的匀称超图的对应二部森林个数的生成函数. 用 $f(x, y)$ 表示一般的匀称超图的对应二部森林个数的生成函数, 于是不难得到下式:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^q f_i(x, y). \quad (11)$$

而由 Pólya 定理可知,

$$f_i(x, y) = Z(S_i, h(x, y)). \quad (12)$$

于是由(11)和(12)式, 有:

定理 4

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^q Z(S_i, h(x, y)). \quad (13)$$

例 当 $k = 2$ 时, 得到的是 3 秩无圈线性超图. 利用定理 3 和(13)式可以得出

$$\overline{H}(x, y) = x^4 y + x^7 y^2 + 3x^{10} y^3 + 8x^{13} y^4 + \cdots,$$

$$H(x, y) = 2x^4 y + 3x^7 y^2 + 8x^{10} y^3 + 24x^{13} y^4 + \cdots,$$

$$h(x, y) = x^4 y + x^7 y^2 + 2x^{10} y^3 + 4x^{13} y^4 + \cdots,$$

$$f(x, y) = x^4 y + 2x^7 y^2 + 4x^{10} y^3 + 9x^{13} y^4 + \cdots.$$

对于有 7 个顶点和 3 条边的 3 秩无圈线性超图, 其在 $f(x, y)$ 中所对应的项就是 $4x^{10}y^3$. 不难验算, 不同构的 3 秩无圈线性超图的个数为 4 个.

致谢 国家自然科学基金(批准号: 19771040)和广东省自然科学基金资助项目.

参 考 文 献

- 1 王建方, 李 东. 超图的路和圈. 中国科学, A 辑, 1998, 28(9): 769~778
- 2 柳柏濂. 超树的计数. 高校应用数学学报, 1988, 9: 359~363
- 3 Harary F, Palmer E M. Graphical Enumeration. New York: Academic Press, 1973

(2000-03-17 收稿)