黏性依赖于密度的一维可压缩黏性辐射反应气体方程组的 Cauchy 问题

献给齐民友教授 90 华诞

廖勇凯, 徐振东, 赵会江*

武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072

E-mail: yongkai.liao@whu.edu.cn, 2014301000090@whu.edu.cn, hhjjzhao@whu.edu.cn

收稿日期: 2018-03-26; 接受日期: 2018-05-07; 网络出版日期: 2018-11-05; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号:11731008) 资助项目

摘要 本文考虑一维可压缩黏性辐射反应气体方程组, 对一类依赖于密度的、退化的黏性系数, 得到了其 Cauchy 问题大初值非真空整体解的存在性. 问题的关键在于如何得到密度和温度的正的上下界估计.

关键词 整体解 一维可压缩黏性辐射反应气体方程组 依赖于密度的退化的黏性系数 Cauchy 问题 大初值

MSC (2010) 主题分类 76N15, 35B65, 35Q35, 76V05

1 引言

可压缩黏性辐射反应气体方程组由可压缩 Navier-Stokes 方程组耦合一个反应扩散方程所构成. 在一维空间的情形, 其在 Lagrange 坐标下的形式为 (参见文献 [1-4] 及所引文献)

$$\begin{aligned}v_t - u_x &= 0, \\u_t + p(v, \theta)_x &= \left(\frac{\mu u_x}{v}\right)_x, \\ \left(e + \frac{u^2}{2}\right)_t + (up(v, \theta))_x &= \left(\frac{\mu uu_x}{v}\right)_x + \left(\frac{\kappa(v, \theta)\theta_x}{v}\right)_x + \lambda\phi z, \\z_t &= \left(\frac{dz_x}{v^2}\right)_x - \phi z,\end{aligned}\tag{1.1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}$ 是 Lagrange 空间变量, $t \geq 0$ 为时间变量. 未知函数 $v = v(t, x)$ 、 $u = u(t, x)$ 、 $\theta = \theta(t, x)$ 和 $z = z(t, x)$ 分别表示辐射反应气体的比容、速度、温度和反应物的浓度. 正常数 d 和 λ 分别为物质扩

英文引用格式: Liao Y K, Xu Z D, Zhao H J. Cauchy problem of the one-dimensional compressible viscous radiative and reactive gas with degenerate density dependent viscosity (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 175–194, doi: 10.1360/N012018-00073

散系数及反应物和生成物的热差系数. $\mu > 0$ 和 $\kappa > 0$ 分别表示黏性系数和热传导系数, $\phi = \phi(\theta)$ 表示反应速率函数, 它满足一阶 Arrhenius 定律 (参见文献 [1, 4]):

$$\phi(\theta) = K\theta^\beta \exp\left(-\frac{A}{\theta}\right), \quad (1.2)$$

其中正常数 K 和 A 分别是反应速率系数和活化能系数, β 为非负常数.

如同文献 [1–4] 中所讨论的一样, 如果将辐射当作一个连续场, 并考虑波效应和光子效应, 假设高温辐射使液体处于热平衡状态, 此时由 Stefan-Boltzmann 辐射定理知, 压强 p 和内能 e 的状态方程为

$$p(v, \theta) = \frac{R\theta}{v} + \frac{a\theta^4}{3}, \quad e(v, \theta) = C_v\theta + av\theta^4, \quad (1.3)$$

且热传导系数 $\kappa = \kappa(v, \theta)$ 满足

$$\kappa(v, \theta) = \kappa_1 + \kappa_2 v\theta^b, \quad (1.4)$$

其中正常数 R 、 C_v 和 a 分别是理想气体常数、比热和 Stefan-Boltzmann 常数, κ_1 、 κ_2 和 b 均为常数.

关于可压缩黏性辐射反应气体方程组定解问题的整体适定性及其解的大时间渐近行为的研究是近年来的一个热点, 对黏性系数 μ 为正常数的情形, 已经得到了比较好的研究结果:

(1) 对有界区域的情形, 文献 [4–7] 和 [1, 8] 分别研究了方程组 (1.1)–(1.4) 的自由初边值问题

$$\begin{aligned} (v(0, x), u(0, x), \theta(0, x), z(0, x)) &= (v_0(x), u_0(x), \theta_0(x), z_0(x)), \quad x \in (0, 1), \\ (\sigma(t, x), \theta_x(t, x), z_x(t, x))|_{x=0,1} &= (-p_e, 0, 0), \quad \forall t > 0, \\ \sigma &= -p(v, \theta) + \frac{\mu u_x}{v}, \quad p_e > 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

和初边值问题

$$\begin{aligned} (v(0, x), u(0, x), \theta(0, x), z(0, x)) &= (v_0(x), u_0(x), \theta_0(x), z_0(x)), \quad x \in (0, 1), \\ (u(t, x), \theta_x(t, x), z_x(t, x))|_{x=0,1} &= 0, \quad \forall t > 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

目前所得到的最好的结果是当 $b \geq 2$ 和 $0 \leq \beta < b + 9$ 时可以得到上述两类初边值问题整体解的存在性及其大时间渐近行为;

(2) 对方程组 (1.1)–(1.4) 带初始条件

$$\begin{aligned} (v(0, x), u(0, x), \theta(0, x), z(0, x)) &= (v_0(x), u_0(x), \theta_0(x), z_0(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} (v_0(x), u_0(x), \theta_0(x), z_0(x)) &= (1, 0, 1, 0) \end{aligned} \quad (1.7)$$

的 Cauchy 问题, 文献 [9] 在条件 $b > \frac{11}{3}$ 和 $0 \leq \beta < b + 9$ 下得到了整体解的存在性及其大时间渐近行为;

(3) 对于相应的高维问题, 文献 [10] 和 [11] 分别研究了环形区域 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < r_1 < |x| < r_2\}$ 和外区域 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$ 上大初值整体球对称解的存在性及其大时间渐近行为.

即便如此, 由于方程组 (1.1)–(1.4) 所描述的物理现象涉及高温过程, 而物理实验表明 (参见文献 [12]) 在这种情形下黏性系数应该依赖于密度和温度. 因此, 一个很自然且有意义的问题是, 如何对

依赖于密度或温度的黏性系数 μ 建立相应大初值整体适定性理论. 对这个问题, 在黏性系数依赖于温度的情形, 到目前为止唯一的进展是, 对如下一类黏性系数 $\mu(v, \theta)$:

$$\mu(v, \theta) = h(v)\theta^\alpha, \quad h(v) \sim \begin{cases} v^{-\ell_1}, & v \rightarrow 0^+, \quad \ell_1 > 1, \\ v^{\ell_2}, & v \rightarrow \infty, \quad \ell_2 > 1, \end{cases} \quad (1.8)$$

在假设条件

$$|\alpha| \times \|(v_0 - 1, u_0, \theta_0 - 1)\|_{H^3(\mathbb{R})} \lesssim 1 \quad (1.9)$$

下, 文献 [13] 得到了 Cauchy 问题 (1.1)–(1.4)、(1.8) 和 (1.7) 的整体适定性.

由 (1.8) 和 (1.9) 可知, 当 $\alpha = 0$ 时, 文献 [13] 确实可以对一类依赖于密度的黏性系数 $\mu = h(v)$ 得到 Cauchy 问题 (1.1)–(1.4) 和 (1.7) 的一个大初值整体适定性结果, 但是, (1.9) 中对 $h(v)$ 所提的条件要求黏性系数是非退化的. 这样一个自然的问题能否对一类退化的依赖于密度的黏性系数得到相应的整体适定性结果? 本文的目的就是考虑这一问题. 为了使问题的讨论不至于陷入烦琐的细节, 本文假设黏性系数 $\mu = \mu(v)$ 满足

$$\mu(v) = v^{-\alpha}, \quad (1.10)$$

其中 $\alpha > 0$ 为常数.

本文的主要结果如下:

定理 1.1 假设

(1) 参数 b, α 和 β 满足 $(b, \alpha, \beta) \in E_1 \cup E_2$, 其中

$$E_1 = \left\{ (b, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 : 8 - \frac{\alpha(1-2\alpha)}{1+2\alpha-2\alpha^2} < b \leq 8, \frac{1}{5} \leq \alpha < \frac{1}{2}, 0 \leq \beta < b+4 \right\},$$

$$E_2 = \left\{ (b, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 : 8 < b < \frac{4}{\alpha}, \frac{1}{5} \leq \alpha < \frac{1}{2}, 0 \leq \beta < b+9 \right\};$$

(2) 初值 $(v_0(x), u_0(x), \theta_0(x), z_0(x))$ 满足

$$\begin{aligned} & (v_0(x) - 1, u_0(x), \theta_0(x) - 1) \in H^1(\mathbb{R}), \\ & z_0(x) \in H^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}), \\ & u_0''(x) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (\text{仅当 } (b, \alpha, \beta) \in E_2 \text{ 时}), \\ & \inf_{x \in \mathbb{R}} v_0(x) > 0, \quad \inf_{x \in \mathbb{R}} \theta_0(x) > 0, \quad 0 \leq z_0(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

则 Cauchy 问题 (1.1)–(1.4)、(1.10) 和 (1.7) 存在唯一的整体解 $(v(t, x), u(t, x), \theta(t, x), z(t, x))$, 且对任意的 $T > 0$, 该整体解满足

$$\begin{aligned} & (v(t, x) - 1, u(t, x), \theta(t, x) - 1) \in C(0, T; H^1(\mathbb{R})), \\ & z(t, x) \in C(0, T; H^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})), \\ & (u_x(t, x), \theta_x(t, x), z_x(t, x)) \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R})), \\ & u_{xx}(t, x) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (\text{仅当 } (b, \alpha, \beta) \in E_2 \text{ 时}), \\ & \underline{V} \leq v(t, x) \leq \overline{V}, \quad \underline{\Theta} \leq \theta(t, x) \leq \overline{\Theta}, \quad 0 \leq z(t, x) \leq 1, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \end{aligned}$$

其中 $\underline{V}, \overline{V}, \underline{\Theta}$ 和 $\overline{\Theta}$ 均为仅依赖于时间 T 和初值 $(v_0(x), u_0(x), \theta_0(x), z_0(x))$ 的正常数.

下面简要介绍证明定理 1.1 的主要想法. 众所周知, 得到 Cauchy 问题 (1.1)–(1.4)、(1.10) 和 (1.7) 整体可解性的关键是得到比容 $v(t, x)$ 和温度 $\theta(t, x)$ 的正的上界和下界估计. 当黏性系数 μ 为正常数时, 即使是对全空间的情形, 受文献 [14, 15] 的启发, 我们也可以得到比容 $v(t, x)$ 的一个局部表达式. 基于这个表达式和基本的能量积分估计式, 我们便可以得出比容 v 的正的上下界估计 (参见文献 [7–9] 及所引文献). 对于我们所研究的问题, 由于黏性系数 μ 不再是常数, 以上推导比容 $v(t, x)$ 的上下界估计的方法不再有效.

我们的想法是通过充分挖掘方程组 (1.1)、(1.3) 和 (1.4) 的内蕴结构来仔细分析比容 $v(t, x)$ 与温度 $\theta(t, x)$ 的上下界之间的关系, 进而来得到我们所需要的比容 $v(t, x)$ 和温度 $\theta(t, x)$ 的正的上下界估计. 基于这一想法, 文献 [16] 研究了当输运系数 $\mu = v^{-\alpha}$, $\kappa = \theta^\ell$ 且压强 p 和内能 e 满足理想多方气体的状态方程, 即取表达式 (1.3) 中的参数 $a = 0$ 时一维可压缩 Navier-Stokes-Poisson 方程组的大初值整体适定性. 在文献 [16] 的分析中, 由于压强 p 和内能 e 满足理想多方气体的状态方程, 因此可以仅用比容 $v(t, x)$ 的下界来控制温度 $\theta(t, x)$ 的下界, 即

$$\frac{1}{\theta(t, x)} \lesssim 1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R})}^{1-\alpha}, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

估计式 (1.11) 在文献 [16] 的分析中起着非常关键的作用. 然而对于我们所拟研究的方程组 (1.1)–(1.4) 和 (1.10), 当 (1.3) 中的参数 $a > 0$ 时, 我们必须同时利用比容 $v(t, x)$ 的上下界才能控制住温度 $\theta(t, x)$ 的下界, 即只能得到如下估计 (见本文的引理 2.5):

$$\frac{1}{\theta(t, x)} \lesssim 1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R})}^{1-\alpha} + \|v\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R})}^\alpha, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

估计式 (1.12) 限制了我们选取参数 α 的自由度. 即便如此, 对自由初边值问题 (1.1)–(1.4)、(1.10) 和 (1.5), 文献 [17] 确实还是可以利用这一想法来得到一个整体适定性结果. 主要的原因在于, 对该自由边值问题, 可以首先利用边界条件的特殊性所导致的一些守恒律来得到比容 $v(t, x)$ 的正的下界估计, 在此基础上便可以结合估计式 (1.12) 通过比容 $v(t, x)$ 的上界来控制温度 $\theta(t, x)$ 的下界 (参见文献 [17] 中的引理 2.6):

$$\frac{1}{\theta(t, x)} \lesssim 1 + \|v\|_{L^\infty([0, T] \times [0, 1])}^\alpha, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1]. \quad (1.13)$$

值得指出的是, 估计式 (1.13) 在通过估计 $\|(\frac{v_x}{v(1+\alpha)})(t)\|_{L^2([0, 1])}$ 进而利用 Kanel' [18] 的技巧来利用温度 $\theta(t, x)$ 的某个幂次方的上界控制比容 $v(t, x)$ 的上下界估计中起着关键的作用. 但是对于我们所拟研究的 Cauchy 问题 (1.1)–(1.4)、(1.10) 和 (1.7) 而言, 我们无法像文献 [17] 那样首先得到比容 $v(t, x)$ 的正的下界估计, 这导致我们也不能像文献 [17] 那样单纯地用比容 $v(t, x)$ 的上界来控制温度 $\theta(t, x)$ 的下界. 为了克服这一困难, 我们的想法是利用方程组 (1.1)–(1.4) 和 (1.10), 特别是由 (1.4) 所给出的热传导系数 $\kappa(v, \theta)$ 的结构得到如下的估计 (见引理 2.7):

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{v_x}{v^{1+\alpha}} \right)^2 (t, x) dx \lesssim 1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R})}^{\alpha+\frac{1}{b}} + \left\| \frac{v\theta^8}{1+v\theta^b} \right\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R})} + \left\| \frac{1}{v} \right\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R})}^{\frac{1-\alpha}{2}}. \quad (1.14)$$

注意到通过适当地选取参数 b 的范围可以使得估计式 (1.14) 右端不依赖于比容 $v(t, x)$ 的上界估计, 这样就给我们留出了一些空间使得我们确实可以找到参数 α 、 β 和 b 以保证可以得到 Cauchy 问题 (1.1)–(1.4)、(1.10) 和 (1.7) 的整体适定性.

本文所用数学符号的相关说明 本文中, 用 $C \geq 1$ 来表示一个正常数, 它可能依赖于初始值 $(v_0(x), u_0(x), \theta_0(x), z_0(x))$ 或时间变量 t . 在不同的估计式中 C 的值有可能不同. ε 表示一个很小的正数. $L^q(\mathbb{R})$ (或 L^q) ($1 \leq q \leq \infty$) 表示在 $\mathbb{R}$ 上通常意义下的 Lebesgue 空间, 其范数记为 $\|\cdot\|_{L^q(\mathbb{R})}$ (或 $\|\cdot\|_{L^q}$). $W^{k,p}(\mathbb{R})$ ($1 \leq p \leq \infty$) 表示通常意义下的 Sobolev 空间, 且 $H^k(\mathbb{R}) := W^{k,2}(\mathbb{R})$. 为简单起见, 记 $\|\cdot\|_\infty := L^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$. 对于函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow x_0$ 表示存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$, 当 $x \in U(x_0)$ 时, $C^{-1}g(x) \leq f(x) \leq Cg(x)$ 成立. $f(x) \lesssim g(x)$ 表示存在某个正数 $C \geq 1$, 使得 $f(x) \leq Cg(x)$.

2 定理 1.1 的证明

对给定的常数 $0 < T \leq \infty$, $0 < M_1 < M_2$, $0 < N_1 < N_2$, 首先定义集合

$$X(0, T; M_1, M_2; N_1, N_2) := \left\{ (v(t, x), u(t, x), \theta(t, x), z(t, x)) \left| \begin{array}{l} (v(t, x) - 1, u(t, x), \theta(t, x) - 1) \in C(0, T; H^1(\mathbb{R})), \\ z(t, x) \in C(0, T; H^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})), \\ (u_x(t, x), \theta_x(t, x), z_x(t, x)) \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R})), \\ u_{xx}(t, x) \in L^2(\mathbb{R}), \quad (\text{仅当 } (b, \alpha, \beta) \in E_2 \text{ 时}), \\ M_1 \leq v(t, x) \leq M_2, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ N_1 \leq \theta(t, x) \leq N_2, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ 0 \leq z(t, x) \leq 1, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \end{array} \right. \right\}.$$

由 Cauchy 问题 (1.1)–(1.4)、(1.10) 和 (1.7) 的局部适定性理论知, 存在一个仅依赖于 $m_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}} v_0(x)$ 、 $n_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}} \theta_0(x)$ 和 $l_0 = \|(v_0 - 1, u_0, \theta_0 - 1, z_0)\|_1$ 的充分小的正常数 $t > 0$, 使得 Cauchy 问题 (1.1)–(1.4)、(1.10) 和 (1.7) 有唯一解

$$(v(t, x), u(t, x), \theta(t, x), z(t, x)) \in X\left(0, t_1; \frac{m_0}{2}, 2 + 2l_0; \frac{n_0}{2}, 2 + 2l_0\right).$$

假设局部解已延拓到 $t = T > t_1$ 及 $(v(t, x), u(t, x), \theta(t, x), z(t, x)) \in X(0, t; M_1, M_2; N_1, N_2)$, 其中 M_1 、 M_2 、 N_1 和 N_2 为常数, 我们来推导出关于解 $(v(t, x), u(t, x), \theta(t, x), z(t, x))$ 的仅依赖于时间变元 t 和初值 $(v_0(x), u_0(x), \theta_0(x), z_0(x))$ 的先验估计.

为了使得表述更加简明, 我们把本节分成如下几个小节, 首先是一些基本的估计.

2.1 一些基本的估计

首先是基本能量估计, 类似于文献 [9], 我们可以得到下面的基本能量估计:

引理 2.1 在定理 1.1 的假设下, 对任意 $0 \leq t \leq T$, 有

$$\int_{\mathbb{R}} z(t, x) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(s, x) z(s, x) ds dx = \int_{\mathbb{R}} z_0(x) dx, \quad (2.1)$$

$$\int_{\mathbb{R}} z^2(t, x) dx + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{v^2} z_x^2 + \phi z^2 \right) (s, x) ds dx = \int_{\mathbb{R}} z_0^2(x) dx, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \left(\tilde{S}(t, x) + \frac{u^2(t, x)}{2} + \lambda z(t, x) \right) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{u_x^2}{v^{1+\alpha}\theta} + \frac{\kappa(v, \theta)\theta_x^2}{v\theta^2} + \frac{\lambda\phi z}{\theta} \right) (s, x) dx ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\tilde{S}_0(x) + \frac{u_0^2(x)}{2} + \lambda z_0(x) \right) dx \equiv C_0(v_0, u_0, \theta_0, z_0), \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中

$$\tilde{S}(v, \theta) = C_v \xi(\theta) + R \xi(v) + \frac{1}{3} a v (\theta - 1)^2 (3\theta^2 + 2\theta + 1), \quad \xi(z) = z - \ln z - 1. \quad (2.4)$$

其次是 $z(t, x)$ 的上下界估计. 采用类似于文献 [19] 的方法, 我们可以得到如下引理:

引理 2.2 在定理 1.1 的假设下, 对任意的 $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, 有

$$0 \leq z(t, x) \leq 1. \quad (2.5)$$

有了引理 2.1 和 2.2, 与文献 [9] 中的引理 2.3 和 2.4 一样, 可得到以下两个基本引理:

引理 2.3 若 a_1 和 a_2 为方程 $x - \ln x - 1 = \frac{C_0(v_0, u_0, \theta_0, z_0)}{\min\{R, C_v\}}$ 的两个正根, 其中 $C_0(v_0, u_0, \theta_0, z_0)$ 为 (2.3) 中给定的常数, 则对每个 $k \in \mathbb{Z}, 0 < t \leq T$, 存在 $a_k(t), b_k(t) \in [-k-1, k+1]$ 使得

$$a_1 \leq \int_{-k-1}^{k+1} v(t, x) dx, \quad \int_{-k-1}^{k+1} \theta(t, x) dx \leq a_2, \quad (2.6)$$

$$a_1 \leq v(t, a_k(t)), \theta(t, b_k(t)) \leq a_2. \quad (2.7)$$

有了引理 2.3, 我们可以根据熵耗散率函数 $V(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{u_x^2}{v^{1+\alpha}\theta} + \frac{\kappa(v, \theta)\theta_x^2}{v\theta^2} \right) (t, x) dx$ 得到温度 $\theta(t, x)$ 的一个粗略估计, 令 $\Omega_k = (-k-1, k+1), k \in \mathbb{Z}$, 则有下面的引理:

引理 2.4 对 $0 \leq m \leq \frac{b+1}{2}, x \in \mathbb{R}$ (不失一般性, 可以令 $x \in \Omega_k, k \in \mathbb{Z}$) 以及任意的 $0 \leq t \leq T$, 有

$$|\theta^m(t, x) - \theta^m(t, b_k(t))| \lesssim V^{\frac{1}{2}}(t). \quad (2.8)$$

这样对任意的 $x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq T$, 有

$$|\theta(t, x)|^{2m} \lesssim 1 + V(t), \quad (2.9)$$

进而对任意的 $0 \leq t \leq T$, 由估计式 (2.3) 可知,

$$\int_0^t \|\theta(s)\|_{L^\infty}^{2m} ds \lesssim 1. \quad (2.10)$$

关于温度 $\theta(t, x)$ 下界的估计, 我们有如下引理:

引理 2.5 在定理 1.1 的假设下, 对任意的 $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, 有

$$\frac{1}{\theta(t, x)} \lesssim 1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{1-\alpha} + \|v\|_{\infty}^{\alpha}. \quad (2.11)$$

证明 令 $h = \frac{1}{\theta(t, x)}$, 由 (1.1)₃ 可得

$$e_{\theta} h_t = \left(\frac{\kappa(v, \theta) h_x}{v} \right)_x + \frac{v^{1+\alpha} p_{\theta}^2}{4} - \left[\frac{2\kappa(v, \theta) h_x^2}{vh} + \frac{h^2}{v^{1+\alpha}} \left(u_x - \frac{v^{1+\alpha} p_{\theta}}{2h} \right)^2 + \lambda h^2 \phi z \right].$$

由 $e_\theta = C_v + 4av\theta^3$, $p_\theta = \frac{R}{v} + \frac{4}{3}a\theta^3$ 易知,

$$\begin{aligned} h_t &\leq \frac{1}{e_\theta} \left(\frac{\kappa(v, \theta) h_x}{v} \right)_x + \frac{v^{1+\alpha} p_\theta^2}{4e_\theta} \\ &\leq \frac{1}{e_\theta} \left(\frac{\kappa(v, \theta) h_x}{v} \right)_x + C \left\| \frac{1}{v} \right\|_\infty^{1-\alpha} + C \|v\|_\infty^\alpha \|\theta(t)\|_{L^\infty}^3. \end{aligned} \quad (2.12)$$

令 $g(t, x) = h(t, x) - C \int_0^t (\| \frac{1}{v} \|_\infty^{1-\alpha} + \|v\|_\infty^\alpha \|\theta(s)\|_{L^\infty}^3) ds$, 则由上式可知,

$$\begin{cases} g_t \leq \frac{1}{e_\theta} \left(\frac{\kappa(v, \theta) h_x}{v} \right)_x, \\ g(0, x) = h(0, x) = \frac{1}{\theta(0, x)}. \end{cases}$$

利用极值原理可以得到

$$g(t, x) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \{h(0, x)\} \leq \frac{1}{\inf_{x \in \mathbb{R}} \{\theta_0(x)\}},$$

进而对 $0 \leq t \leq T$, 我们可由定理 1.1 的假设以及估计式 (2.10) 推知估计式 (2.11) 成立. 证毕. $\square$

2.2 比容 $v(t, x)$ 的上下界估计

本小节的主要目的是估计比容 $v(t, x)$ 的上下界. 首先受 Kanel' 工作 [18] 的启发, 我们有如下引理:

引理 2.6 在定理 1.1 的假设下, 对任意的 $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq T$, 有

$$(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}} v(t, x)^{-\alpha} + v(t, x)^{\frac{1}{2}-\alpha} \lesssim 1 + \left\| \left(\frac{v_x}{v^{1+\alpha}} \right)(t) \right\|, \quad (2.13)$$

其中 $\varepsilon > 0$ 可以取得充分小.

证明 令 $\Phi(v) = \int_1^v \frac{\sqrt{\xi(z)}}{z^{1+\alpha}} dz$, 其中 $\xi(z) = z - \ln z - 1$, 则易见对任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $v > 0$, 有

$$|\Phi(v)| \gtrsim (-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}} v^{-\alpha} + v^{\frac{1}{2}-\alpha} - 1. \quad (2.14)$$

另一方面, 由估计式 (2.3) 易见,

$$\begin{aligned} \Phi(v(t, x)) &= \int_{-\infty}^x (\Phi(v(t, y)))_y dy \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{v_x(t, x) \sqrt{\xi(v(t, x))}}{v(t, x)^{1+\alpha}} \right| dx \\ &\leq \|\sqrt{\xi(v(t))}\| \left\| \left(\frac{v_x}{v^{1+\alpha}} \right)(t) \right\| \lesssim \left\| \left(\frac{v_x}{v^{1+\alpha}} \right)(t) \right\|. \end{aligned} \quad (2.15)$$

联立 (2.14) 和 (2.15), 便可得到 (2.13). 证毕. $\square$

为了估计 $\| \frac{v_x}{v^{1+\alpha}}(t) \|$, 将 (1.1)₂ 两边同乘 $\frac{v_x}{v^{1+\alpha}}$ 可得

$$\frac{1}{2} \left(\frac{v_x^2}{v^{2(1+\alpha)}} \right)_t + \left(\frac{uv_x}{v^{1+\alpha}} \right)_x = \frac{v_x p_x}{v^{1+\alpha}} + \left(\frac{uv_x}{v^{1+\alpha}} \right)_t + \frac{u_x^2}{v^{1+\alpha}}. \quad (2.16)$$

对上式关于 t 和 x 在 $(0, t) \times \mathbb{R}$ 上积分并利用估计式

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{uv_x}{v^{1+\alpha}} dx \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x^2}{v^{2(1+\alpha)}} dx + C(\varepsilon) \int_{\mathbb{R}} u^2 dx,$$

由引理 2.1 和 Cauchy 不等式可得

$$\left\| \left(\frac{v_x}{v^{1+\alpha}} \right) (t) \right\|^2 \lesssim 1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{u_x^2}{v^{1+\alpha}} dx ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x p_x}{v^{1+\alpha}} dx ds. \quad (2.17)$$

下面来估计 (2.17) 右端的最后两项. 为了估计 $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{u_x^2}{v^{1+\alpha}} dx ds$, 在 (1.1)₂ 两边同乘 u 可得

$$\left(\frac{u^2}{2} \right)_t + \frac{u_x^2}{v^{1+\alpha}} = \left(\frac{uu_x}{v^{1+\alpha}} \right)_x + u_x p - (up)_x. \quad (2.18)$$

对上式关于 t 和 x 在 $(0, t) \times \mathbb{R}$ 上积分, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2(t, x) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{u_x^2}{v^{1+\alpha}} dx ds &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_0^2(x) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u_x p dx ds \\ &\leq C + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{R\theta u_x}{v} + \frac{a\theta^4 u_x}{3} \right) dx ds. \end{aligned} \quad (2.19)$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{R\theta u_x}{v} dx ds &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{R(\theta-1)u_x}{v} dx ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{Ru_x}{v} dx ds \\ &\leq C \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{u_x^2}{v^{1+\alpha}\theta} dx ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \theta(\theta-1)^2 dx ds \right) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{Ru_x}{v} - Ru_x \right) dx ds \\ &\leq C \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(1 + \int_0^t \left\| \left(\frac{\theta(\theta-1)^2}{\theta - \ln \theta - 1} \right) (s) \right\|_{L^\infty} ds \right) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{Ru_x}{v} - Ru_x \right) dx ds \\ &\leq C \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(1 + \int_0^t \|\theta\|_{L^\infty}^2 dx ds \right) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{Ru_x}{v} - Ru_x \right) dx ds, \end{aligned} \quad (2.20)$$

由引理 2.4 可得

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{R\theta u_x}{v} dx ds \leq C + C \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{\frac{1-\alpha}{2}} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[Ru_x \left(\frac{1}{v} - 1 \right) \right] dx ds. \quad (2.21)$$

而

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[Ru_x \left(\frac{1}{v} - 1 \right) \right] dx ds &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [R(\ln v - v + 1)_t](s, x) dx ds \\ &= R \left[\int_{\mathbb{R}} (v - \ln v - 1)(0, x) dx - \int_{\mathbb{R}} (v - \ln v - 1)(t, x) dx \right] \\ &\lesssim 1, \end{aligned} \quad (2.22)$$

联立 (2.21) 和 (2.22), 有

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{R\theta u_x}{v} dx ds \lesssim 1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{\frac{1-\alpha}{2}}. \quad (2.23)$$

对于 $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{a\theta^4 u_x}{3} dx ds$, 由 Cauchy 不等式和 (2.3) 可知,

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{a\theta^4 u_x}{3} dx ds &= -\frac{4a}{3} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \theta^3 \theta_x u dx ds \\ &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u^2 dx ds + C(\varepsilon) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \theta^6 \theta_x^2 dx ds \\ &\lesssim 1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\kappa(v, \theta) \theta_x^2}{v \theta^2} \cdot \frac{v \theta^8}{\kappa(v, \theta)} dx ds \\ &\lesssim 1 + \left\| \frac{v \theta^8}{1 + v \theta^b} \right\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

联立 (2.19)、(2.23) 和 (2.24), 有

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{u_x^2}{v^{1+\alpha}} dx ds \lesssim 1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{\frac{1-\alpha}{2}} + \left\| \frac{v \theta^8}{1 + v \theta^b} \right\|_{\infty}. \quad (2.25)$$

至于 $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x p_x}{v^{1+\alpha}} dx ds$, 由 (1.1)₃ 可得

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x p_x}{v^{1+\alpha}} dx ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(-\frac{R \theta v_x^2}{v^{3+\alpha}} + \frac{R v_x \theta_x}{v^{2+\alpha}} + \frac{4a}{3} \frac{\theta^3 v_x \theta_x}{v^{1+\alpha}} \right) dx ds,$$

因此,

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x p_x}{v^{1+\alpha}} dx ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta v_x^2}{v^{3+\alpha}} dx ds \lesssim \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x \theta_x}{v^{2+\alpha}} dx ds \right| + \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta^3 v_x \theta_x}{v^{1+\alpha}} dx ds \right|. \quad (2.26)$$

对于 (2.26) 右端两项的估计, 由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta^3 v_x \theta_x}{v^{1+\alpha}} dx ds \right| &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x^2}{v^{2(1+\alpha)}} dx ds + C(\varepsilon) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \theta^6 \theta_x^2 dx ds \\ &\leq \varepsilon \left\| \frac{v_x}{v^{1+\alpha}} \right\|^2 + C(\varepsilon) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\kappa(v, \theta) \theta_x^2}{v \theta^2} \cdot \frac{v \theta^8}{\kappa(v, \theta)} dx ds \\ &\leq \varepsilon \left\| \frac{v_x}{v^{1+\alpha}} \right\|^2 + C(\varepsilon) \left\| \frac{v \theta^8}{1 + v \theta^b} \right\|_{\infty} \end{aligned} \quad (2.27)$$

和

$$\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x \theta_x}{v^{2+\alpha}} dx ds \right| \leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x^2 \theta}{v^{3+\alpha}} dx ds + C(\varepsilon) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta_x^2}{v^{1+\alpha} \theta} dx ds. \quad (2.28)$$

注意到当 $b > 1$ 时, $1 + v \theta^b \geq v^{\frac{1}{b}} \theta$, 可得

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta_x^2}{v^{1+\alpha} \theta} dx ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\kappa(v, \theta) \theta_x^2}{v \theta^2} \cdot \frac{\theta}{v^{\alpha} \kappa(v, \theta)} dx ds \leq C \left\| \frac{v^{-\alpha} \theta}{1 + v \theta^b} \right\|_{\infty} \lesssim \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{\alpha + \frac{1}{b}}. \quad (2.29)$$

将估计式 (2.27)–(2.29) 代入 (2.26), 可得

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x p_x}{v^{1+\alpha}} dx ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta v_x^2}{v^{3+\alpha}} dx ds \leq \varepsilon \left\| \frac{v_x}{v^{1+\alpha}} \right\|^2 + C(\varepsilon) \left\| \frac{v \theta^8}{1 + v \theta^b} \right\|_{\infty} + C \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{\alpha + \frac{1}{b}}. \quad (2.30)$$

将估计式 (2.25) 和 (2.30) 代入 (2.17) 可得下面的引理:

引理 2.7 在定理 1.1 的假设下, 对任意 $0 \leq t \leq T$, 有

$$\left\| \left(\frac{v_x}{v^{1+\alpha}} \right) (t) \right\|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta v_x^2}{v^{3+\alpha}} dx ds \lesssim 1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{\alpha + \frac{1}{b}} + \left\| \frac{v\theta^8}{1+v\theta^b} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{\frac{1-\alpha}{2}}. \quad (2.31)$$

下面在引理 2.1 和 2.7 所得到结果的基础上, 利用 Kanel' ^[18] 的技巧来得到比容 $v(t, x)$ 上下界的一个估计. 为此, 由估计式 (2.13) 和 (2.31), 有

$$(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{v} \right)^{\alpha} + v^{\frac{1}{2}-\alpha} \lesssim 1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2b}} + \left\| \frac{v\theta^8}{1+v\theta^b} \right\|_{\infty}^{\frac{1}{2}} + \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{\frac{1-\alpha}{4}}.$$

由上式易知, 当 α 满足 $\max\{\frac{1}{5}, \frac{1}{b}\} \leq \alpha < \frac{1}{2}$ 时,

$$(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{v} \right)^{\alpha} + v^{\frac{1}{2}-\alpha} \lesssim 1 + \left\| \frac{v\theta^8}{1+v\theta^b} \right\|_{\infty}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.32)$$

如果 $b \leq 8$, 注意到 $\frac{v\theta^8}{1+v\theta^b} \leq \frac{v\theta^8}{v\theta^b} = \theta^{8-b}$, 由 (2.32) 可推知,

$$(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{v} \right)^{\alpha} + v^{\frac{1}{2}-\alpha} \lesssim 1 + \|\theta^{8-b}\|_{\infty}^{\frac{1}{2}}.$$

这样, 当 $\max\{\frac{1}{5}, \frac{1}{b}\} \leq \alpha < \frac{1}{2}, b \leq 8$ 时,

$$v(t, x) \lesssim 1 + \|\theta^{8-b}\|_{\infty}^{\frac{1}{1-2\alpha}}, \quad \frac{1}{v(t, x)} \lesssim 1 + \|\theta^{8-b}\|_{\infty}^{\frac{1}{2\alpha}}.$$

当 $b > 8$ 时, 注意到 $1 + v\theta^b \geq v^{\frac{8}{b}}\theta^8$, $\frac{v\theta^8}{1+v\theta^b} \leq v^{\frac{b-8}{b}}$, 由 (2.32) 可推知,

$$(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{v} \right)^{\alpha} + v^{\frac{1}{2}-\alpha} \lesssim 1 + \|v\|_{\infty}^{\frac{b-8}{2b}}.$$

这样, 当 $b < \frac{4}{\alpha}$ 时, $\frac{1}{2} - \alpha > \frac{b-8}{2b}$, 进而可由上式得到比容 $v(t, x)$ 的正的上下界估计. 再由估计式 (2.11) 即可得到温度 $\theta(t, x)$ 的正的下界估计.

综上所述, 我们有如下引理:

引理 2.8 在定理 1.1 的假设下, 有

(1) 当 $b \leq 8, \max\{\frac{1}{5}, \frac{1}{b}\} \leq \alpha < \frac{1}{2}$ 时, 对任意的 $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, 有

$$v(t, x) \lesssim 1 + \|\theta^{8-b}\|_{\infty}^{\frac{1}{1-2\alpha}}, \quad \frac{1}{v(t, x)} \lesssim 1 + \|\theta^{8-b}\|_{\infty}^{\frac{1}{2\alpha}}; \quad (2.33)$$

(2) 当 $8 < b < \frac{4}{\alpha}, \frac{1}{5} \leq \alpha < \frac{1}{2}$ 时, 存在仅依赖于时间 T 和初始值 $(v_0(x), u_0(x), \theta_0(x), z_0(x))$ 的正数 $\underline{V}', \bar{V}'$ 和 $\underline{\Theta}'$, 使得对任意的 $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, 有

$$\underline{V}' \leq v(t, x) \leq \bar{V}', \quad \theta(t, x) \geq \underline{\Theta}'. \quad (2.34)$$

2.3 温度 $\theta(t, x)$ 的上界估计

本小节将推导温度 $\theta(t, x)$ 的上界估计, 将分 $b \leq 8$ 和 $b > 8$ 两种情形讨论.

2.3.1 $b \leq 8$ 的情形

当 $b \leq 8$ 时, (1.1)₃ 中两边同时乘以 $2p(\theta - 1)^{2p-1}$, 便有

$$\begin{aligned} & [(\theta - 1)^{2p}]_t + \frac{2p(2p - 1)(\theta - 1)^{2p-2}\kappa\theta_x^2}{v(C_v + 4av\theta^3)} \\ &= \frac{2p(\theta - 1)^{2p-1}u_x^2}{v^{1+\alpha}(C_v + 4av\theta^3)} + \left(\frac{2p(\theta - 1)^{2p-1}\kappa\theta_x}{v(C_v + 4av\theta^3)} \right)_x \\ & - \frac{2p(\theta - 1)^{2p-1}u_x}{C_v + 4av\theta^3} \left(\frac{R\theta}{v} + \frac{4}{3}a\theta^4 \right) + \frac{2p(\theta - 1)^{2p-1}\lambda\phi z}{C_v + 4av\theta^3} \\ & + \frac{8p(\theta - 1)^{2p-1}\kappa\theta_x(a\theta^3v_x + 3av\theta^2\theta_x)}{v(C_v + 4av\theta^3)^2}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

注意到

$$\begin{aligned} & \frac{8p(\theta - 1)^{2p-1}\kappa\theta_x(a\theta^3v_x + 3av\theta^2\theta_x)}{v(C_v + 4av\theta^3)^2} \\ & \leq \frac{1}{2} \frac{2p(2p - 1)(\theta - 1)^{2p-2}\kappa\theta_x^2}{v(C_v + 4av\theta^3)} + \frac{64p^2a^2\kappa(\theta - 1)^{2p}(\theta^3v_x + 3v\theta^2\theta_x)^2}{2p(2p - 1)v(C_v + 4av\theta^3)^3}, \end{aligned}$$

(2.35) 关于空间变量 x 在 $\mathbb{R}$ 上积分, 再使用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} \frac{d\|\theta(t) - 1\|_{L^{2p}}}{dt} & \leq \frac{C}{2(2p - 1)} \left\| \left(\frac{\kappa(\theta - 1)(\theta^3v_x + 3v\theta^2\theta_x)^2}{v(C_v + 4av\theta^3)^3} \right)(t) \right\|_{L^{2p}} + C \left\| \left(\frac{u_x^2}{v^{1+\alpha}(1 + v\theta^3)} \right)(t) \right\|_{L^{2p}} \\ & + C \left\| \left(\frac{\theta^\beta}{1 + v\theta^3} \right)(t) \right\|_{L^{2p}} + C \left\| \left(\frac{|u_x|}{1 + v\theta^3} \left(\frac{\theta}{v} + \theta^4 \right) \right)(t) \right\|_{L^{2p}}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

(2.36) 关于时间变量 t 在区间 $(0, t)$ 上积分, 再取 $p \rightarrow \infty$ 的极限, 有

$$\begin{aligned} \|\theta(t)\|_{L^\infty} & \lesssim 1 + \left(1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_\infty^{1+\alpha} \right) \int_0^t \|u_x(s)\|_{L^\infty}^2 ds + \left\| \frac{1}{v} \right\|_\infty^2 \int_0^t \|\theta(s)\|_{L^\infty}^2 ds \\ & + \int_0^t \left\| \left(\frac{\theta^\beta}{1 + v\theta^3} \right)(s) \right\|_{L^\infty} ds. \end{aligned}$$

当 $0 \leq \beta < b + 4$ 时, 利用引理 2.4, 我们便可得如下引理:

引理 2.9 在定理 1.1 的假设下, 当 $b \leq 8$, $0 \leq \beta < b + 4$ 时, 对任意 $0 \leq t \leq T$, 有

$$\|\theta\|_\infty \lesssim 1 + \left(1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_\infty^{1+\alpha} \right) \int_0^t \|u_x(s)\|_{L^\infty}^2 ds + \left\| \frac{1}{v} \right\|_\infty^2. \quad (2.37)$$

至于 $\int_0^t \|u_x(s)\|_{L^\infty}^2 ds$ 的估计, 注意到 (2.25), 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^t \|u_x(s)\|_{L^\infty}^2 ds & \leq \int_0^t \|u_x(s)\| \|u_{xx}(s)\| ds \\ & \leq \|v\|_\infty^{1+\alpha} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{u_x^2}{v^{1+\alpha}} dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{u_{xx}^2}{v^{1+\alpha}} dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \|v\|_\infty^{1+\alpha} \left(1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}} + \|\theta^{8-b}\|_\infty \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{u_{xx}^2}{v^{1+\alpha}} dx ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

为了得到温度 $\theta(t, x)$ 的上界估计, 我们只需要估计 $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{u_x^2}{v^{1+\alpha}} dx ds$. 为此, 对 (1.1)₂ 两边关于空间变量 x 求偏导, 并在两边同乘 u_x , 有 (为了记号的简洁, 下面还是用 $\mu(v)$ 来代替 $v^{-\alpha}$)

$$\partial_t \left(\frac{u_x^2}{2} \right) + \left(\frac{\mu(v)u_x}{v} \right)_x u_{xx} = p_x u_{xx} + \left\{ \left(\frac{\mu(v)u_x}{v} \right)_x u_x \right\}_x - (p_x u_x)_x.$$

对上式关于时间变量 t 和空间变量 x 在区间 $(0, t) \times \mathbb{R}$ 上积分, 有

$$\begin{aligned} \|u_x(t)\|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds &\lesssim 1 + \underbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{|\mu'(v)v_x u_x u_{xx}|}{v} dx ds}_{I_1} + \underbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)|v_x u_x u_{xx}|}{v^2} dx ds}_{I_2} \\ &\quad + \underbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{|\theta_x u_{xx}|}{v} dx ds}_{I_3} + \underbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta|v_x u_{xx}|}{v^2} dx ds}_{I_4} \\ &\quad + \underbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \theta^3 |\theta_x u_{xx}| dx ds}_{I_5}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

现在来估计 (2.39) 右端的项 I_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$). 事实上, 由 (2.25)、(2.31)、(2.33)、(2.38)、Cauchy 不等式和 $\max\{\frac{1}{5}, \frac{1}{b}\} \leq \alpha < \frac{1}{2}$, 有

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon) \int_0^t \left\| \frac{|\mu'(v)|^2 u_x^2 v}{\mu^3(v)} \right\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu^2(v)v_x^2}{v^2} dx ds \\ &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon) \left\| \frac{|\mu'(v)|^2 v}{\mu^3(v)} \right\|_\infty \left(1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_\infty^{\alpha+\frac{1}{b}} + \left\| \frac{1}{v} \right\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}} + \|\theta^{8-b}\|_\infty \right) \\ &\quad \times \left(1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}} + \|\theta^{8-b}\|_\infty \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{v}{\mu(v)} \right\|_\infty \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon) \left\| \frac{|\mu'(v)|^2 v}{\mu^3(v)} \right\|_\infty^2 \left(1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_\infty^{\alpha+\frac{1}{b}} + \left\| \frac{1}{v} \right\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}} + \|\theta^{8-b}\|_\infty \right)^2 \\ &\quad \times \left(1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}} + \|\theta^{8-b}\|_\infty \right) \left\| \frac{v}{\mu(v)} \right\|_\infty^2 \\ &\leq 2\varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon) (1 + \|\theta^{8-b}\|_\infty^{\frac{1+2\alpha-2\alpha^2}{\alpha(1-2\alpha)}}), \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon) \int_0^t \left\| \left(\frac{u_x^2}{v\mu(v)} \right)(s) \right\|_{L^\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu^2(v)v_x^2}{v^2} dx \right) ds \\ &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon) \left\| \frac{1}{v\mu(v)} \right\|_\infty \left(1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_\infty^{\alpha+\frac{1}{b}} + \left\| \frac{1}{v} \right\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}} + \|\theta^{8-b}\|_\infty \right) \\ &\quad \times \left(1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}} + \|\theta^{8-b}\|_\infty \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon) \left\| \frac{1}{v\mu(v)} \right\|_\infty^2 \left(1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_\infty^{\alpha+\frac{1}{b}} + \left\| \frac{1}{v} \right\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}} + \|\theta^{8-b}\|_\infty \right)^2 \\ &\quad \times \left(1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}} + \|\theta^{8-b}\|_\infty \right) \end{aligned}$$

$$\leq 2\varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon)(1 + \|\theta^{8-b}\|_{\infty}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}+3}). \quad (2.41)$$

对于项 I_3 , 有

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon) \left\| \frac{v^\alpha \theta^2}{1 + v\theta^b} \right\|_{\infty} \\ &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon) \|v^{\alpha-\frac{2}{b}}\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

当 $\max\{\frac{1}{5}, \frac{1}{b}\} \leq \alpha < \frac{2}{b}$ 时, 由 (2.33), 有

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon) \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{\frac{2}{b}-\alpha} \\ &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon) \|\theta^{8-b}\|_{\infty}^{\frac{1}{2\alpha}(\frac{2}{b}-\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

当 $\frac{2}{b} \leq \alpha < \frac{1}{2}$ 时, 由 (2.33), 有

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon) \|v\|_{\infty}^{\alpha-\frac{2}{b}} \\ &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon) \|\theta^{8-b}\|_{\infty}^{\frac{1}{1-2\alpha}(\alpha-\frac{2}{b})}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

对项 I_4 , 由引理 2.4 和 (2.31), 有

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon) \int_0^t \left\| \frac{\theta^2}{\mu^3(v)v} \right\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu^2(v)|v_x|^2}{v^2} dx ds \\ &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon) \|v^{3\alpha-1}\|_{\infty} \left(1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{\alpha+\frac{1}{b}} + \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{1-\alpha} + \|\theta^{8-b}\|_{\infty} \right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

当 $\max\{\frac{1}{5}, \frac{1}{b}\} \leq \alpha < \frac{1}{3}$ 时, 由 (2.33), 有

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon)(1 + \|\theta^{8-b}\|_{\infty}^{\frac{1-3\alpha}{2\alpha}}) \left(1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{\alpha+\frac{1}{b}} + \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{1-\alpha} + \|\theta^{8-b}\|_{\infty} \right) \\ &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon)(1 + \|\theta^{8-b}\|_{\infty}^{\frac{1-3\alpha}{2\alpha}+1}). \end{aligned} \quad (2.46)$$

当 $\frac{1}{3} \leq \alpha < \frac{1}{2}$ 时, 由 (2.33), 有

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon)(1 + \|\theta^{8-b}\|_{\infty}^{\frac{3\alpha-1}{1-2\alpha}}) \left(1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{\alpha+\frac{1}{b}} + \left\| \frac{1}{v} \right\|_{\infty}^{1-\alpha} + \|\theta^{8-b}\|_{\infty} \right) \\ &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon)(1 + \|\theta^{8-b}\|_{\infty}^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}}). \end{aligned} \quad (2.47)$$

类似地, 对项 I_5 , 有

$$\begin{aligned} I_5 &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\kappa|\theta_x|^2}{v\theta^2} \cdot \frac{v^2\theta^8}{\mu(v)\kappa} dx ds \\ &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon) \left\| \frac{v^2\theta^8}{\mu(v)v\theta^b} \right\|_{\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon) \|v\|_{\infty}^{1+\alpha} \|\theta^{8-b}\|_{\infty} \\
 &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds + C(\varepsilon) (1 + \|\theta^{8-b}\|_{\infty}^{\frac{2-\alpha}{1-2\alpha}}).
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

将估计式 (2.40)–(2.48) 代入 (2.39), 有

$$\|u_x(t)\|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v)u_{xx}^2}{v} dx ds \lesssim 1 + \|\theta^{8-b}\|_{\infty}^{\frac{1+2\alpha-2\alpha^2}{\alpha(1-2\alpha)}}. \tag{2.49}$$

再将估计式 (2.49) 代入 (2.38) 可得

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \|u_x(s)\|_{L^{\infty}}^2 ds &\lesssim \|\theta^{8-b}\|_{\infty}^{\frac{1+\alpha}{1-2\alpha}} (1 + \|\theta^{8-b}\|_{\infty}^{\frac{1+2\alpha-2\alpha^2}{\alpha(1-2\alpha)}})^{\frac{1}{2}} (1 + \|\theta^{8-b}\|_{\infty})^{\frac{1}{2}} \\
 &\lesssim 1 + \|\theta^{8-b}\|_{\infty}^{\frac{1+5\alpha-2\alpha^2}{2\alpha(1-2\alpha)}}.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

估计式 (2.50) 代入 (2.37) 并利用估计式 (2.11) 和 (2.33) 可得

$$\|\theta\|_{\infty} \lesssim 1 + \left(1 + \left\|\frac{\mu(v)}{v}\right\|_{\infty}\right) (1 + \|\theta^{8-b}\|_{\infty}^{\frac{1+5\alpha-2\alpha^2}{2\alpha(1-2\alpha)}}) + \left\|\frac{1}{v}\right\|_{\infty}^2 \lesssim 1 + \|\theta^{8-b}\|_{\infty}^{\frac{1+2\alpha-2\alpha^2}{\alpha(1-2\alpha)}}.$$

由上式易见当 $b > 8 - \frac{\alpha(1-2\alpha)}{1+2\alpha-2\alpha^2}$ 时, 我们就可得到温度 $\theta(t, x)$ 的上界估计. 再由 (2.11) 和 (2.33), 便得到了比容 $v(t, x)$ 的上下界估计及温度 $\theta(t, x)$ 的下界估计. 综上所述, 我们便有如下结论:

引理 2.10 在定理 1.1 的假设下, 当 $(b, \alpha, \beta) \in E_1$ 时, 存在仅依赖于时间 t 和初值 $(v_0(x), u_0(x), \theta_0(x), z_0(x))$ 的正数 $\underline{V}^*$ 、 $\overline{V}^*$ 、 $\underline{\Theta}^*$ 和 $\overline{\Theta}^*$, 使得对任意的 $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, 有

$$\underline{V}^* \leq v(t, x) \leq \overline{V}^*, \quad \underline{\Theta}^* \leq \theta(t, x) \leq \overline{\Theta}^*.$$

在引理 2.10 的基础上, 类似于文献 [9], 很容易得到 $\|\theta_x(t)\|$ 的估计.

引理 2.11 在定理 1.1 的假设下, 当 $(b, \alpha, \beta) \in E_1$ 时, 对任意 $0 \leq t \leq T$, 有

$$\|\theta_x(t)\|^2 + \int_0^t \|\theta_{xx}(s)\|^2 ds \leq C. \tag{2.51}$$

2.3.2 $b > 8$ 的情形

当 $8 < b < \frac{4}{\alpha}$, $\frac{1}{5} \leq \alpha < \frac{1}{2}$ 时, 我们已经得到比容 $v(t, x)$ 的上下界及温度 $\theta(t, x)$ 的下界 (见引理 2.8). 受文献 [20] 的启发, 我们可以通过引入以下 4 个辅助函数来推导出温度 $\theta(t, x)$ 的上界:

$$\begin{aligned}
 X(t) &= \int_0^t (1 + \theta^{b+3}(s, x)) \theta_t^2(s, x) dx ds, \\
 Y(t) &= \max_{s \in (0, t)} \int_{\mathbb{R}} (1 + \theta^{2b}(s, x)) \theta_x^2(s, x) dx, \\
 Z(t) &= \max_{s \in (0, t)} \int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2(s, x) dx, \\
 W(t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |u_{xt}|^2 dx ds.
 \end{aligned}$$

与文献 [9] 一样, 易见

$$\|\theta(t)\|_{L^{\infty}} \lesssim 1 + Y(t)^{\frac{1}{2b+6}}, \tag{2.52}$$

$$\max_{s \in (0, t)} \int_{\mathbb{R}} u_x^2(s, x) dx \lesssim C + CZ(t)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.53)$$

$$\|u_x(t)\|_{L^\infty} \lesssim 1 + Z(t)^{\frac{3}{8}}. \quad (2.54)$$

接下来的引理告诉我们, 函数 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 可以被函数 $Z(t)$ 和 $W(t)$ 所控制住.

引理 2.12 在定理 1.1 的假设下, 当 $(b, \alpha, \beta) \in E_2$ 时, 对任意 $0 \leq t \leq T$, 有

$$X(t) + Y(t) \leq \varepsilon W(t) + C(\varepsilon)(1 + Z(t)^{\max\{\frac{1}{2}, \frac{3(b+3)}{8(b+2)}, \frac{b+3}{b+5}\}}). \quad (2.55)$$

证明 类似于文献 [9, 17, 20], 设

$$K(v, \theta) = \int_0^\theta \frac{\kappa(v, \xi)}{v} d\xi = \frac{\kappa_1 \theta}{v} + \frac{\kappa_2 \theta^{b+1}}{b+1}, \quad (2.56)$$

经过简单计算可得

$$\begin{aligned} K_t(v, \theta) &= K_v(v, \theta)u_x + \frac{\kappa(v, \theta)\theta_t}{v}, \\ K_{xt}(v, \theta) &= \left[\frac{\kappa(v, \theta)\theta_x}{v} \right]_t + K_v(v, \theta)u_{xx} + K_{vv}(v, \theta)v_x u_x + \left(\frac{\kappa(v, \theta)}{v} \right)_v v_x \theta_t, \\ |K_v(v, \theta)| + |K_{vv}(v, \theta)| &\leq C\theta. \end{aligned} \quad (2.57)$$

对 (1.1)₃ 两边同时乘以 K_t , 并关于时间变量 t 和空间变量 x 在区间 $(0, t) \times \mathbb{R}$ 上积分, 有

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left\{ \left(e_\theta \theta_t + \theta p_\theta u_x - \frac{\mu u_x^2}{v} \right) K_t \right\} dx ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{K_{tx} \kappa \theta_x}{v} dx ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{K_t \lambda \phi z}{v} dx ds. \quad (2.58)$$

联立 (2.56)–(2.58), 有

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{e_\theta \kappa \theta_t^2}{v} dx ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\kappa \theta_x}{v} \left(\frac{\kappa \theta_x}{v} \right)_t dx ds \\ & \leq C + \underbrace{\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e_\theta \theta_t K_v u_x dx ds \right|}_{I_6} + \underbrace{\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \theta p_\theta K_v u_x^2 dx ds \right|}_{I_7} + \underbrace{\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \theta p_\theta u_x \frac{\kappa \theta_t}{v} dx ds \right|}_{I_8} \\ & \quad + \underbrace{\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu v K_t u_x^2}{v} dx ds \right|}_{I_9} + \underbrace{\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\kappa \theta_x}{v} (K_{vv} v_x u_x + K_v u_{xx}) \right\} dx ds \right|}_{I_{10}} \\ & \quad + \underbrace{\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\kappa \theta_x}{v} \left(\frac{\kappa \theta_x}{v} \right)_v v_x \theta dx ds \right|}_{I_{11}} + \underbrace{\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \lambda \phi z K_v u_x dx ds \right|}_{I_{12}} \\ & \quad + \underbrace{\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda \phi z \kappa \theta_t}{v} dx ds \right|}_{I_{13}}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

首先, 易知,

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{e_\theta(v, \theta) \kappa(v, \theta) \theta_t^2}{v} dx ds \geq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1 + \theta^3)(1 + \theta^b) \theta_t^2 dx ds \geq CX(t), \quad (2.60)$$

以及

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\kappa(v, \theta) \theta_x}{v} \left(\frac{\kappa(v, \theta) \theta_x}{v} \right)_t dx ds &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\kappa(v, \theta) \theta_x}{v} \right)^2 (t, x) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\kappa(v, \theta) \theta_x}{v} \right)^2 (0, x) dx \\ &\geq CY(t) - C. \end{aligned} \quad (2.61)$$

下面将逐项估计项 I_6 – I_{13} . 对于项 I_6 , 有

$$\begin{aligned} I_6 &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1 + \theta)^{b+3} \theta_t^2 dx ds + C(\varepsilon) \left(1 + \left\| \frac{1}{\theta(t)} \right\|_{L^\infty}^{b-6} \right) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{u_x^2}{\theta} dx ds \\ &\leq \varepsilon X(t) + C(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.62)$$

至于 I_7 – I_{10} 、 I_{12} 和 I_{13} 的估计式, 由于引理 2.8 已经得到了比容 $v(t, x)$ 的正的上下界估计和温度 $\theta(t, x)$ 的下界估计, 与文献 [9] 类似, 可以得到如下估计:

$$I_7 \leq \varepsilon Y(t) + C(\varepsilon), \quad (2.63)$$

$$I_8 \leq \varepsilon (X(t) + Y(t)) + C(\varepsilon), \quad (2.64)$$

$$I_9 \leq \varepsilon (W(t) + Y(t)) + C(\varepsilon) Z(t)^{\frac{b+3}{b+5}}, \quad (2.65)$$

$$I_{10} \leq \varepsilon (X(t) + Y(t) + Z(t)) + C(\varepsilon) (1 + Z(t)^{\frac{3(b+3)}{8(b+2)}}), \quad (2.66)$$

$$I_{12} \leq \varepsilon Y(t) + C(\varepsilon), \quad (2.67)$$

$$I_{13} \leq \varepsilon (X(t) + Y(t)) + C(\varepsilon). \quad (2.68)$$

需要指出的是, 我们在项 I_{13} 的估计中使用了假设 $0 \leq \beta < b + 9$.

下面估计项 I_{11} . 注意到

$$\begin{aligned} I_{11} &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1 + \theta^{b+3}) \theta_t^2 dx ds + C(\varepsilon) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x^2 \theta_x^2}{\theta^{3-b}} dx ds \\ &\leq \varepsilon X(t) + C(\varepsilon) + C(\varepsilon) \int_0^t \left\| \left(\frac{\kappa \theta_x}{v} \right)(s) \right\|_{L^\infty}^2 \|v_x(s)\| ds, \end{aligned} \quad (2.69)$$

而

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \left(\frac{\kappa \theta_x}{v} \right)^2 (t, x) \right\} \leq C \int_{\mathbb{R}} \left| \left(\frac{\kappa \theta_x}{v} \right)(t) \right| \left| \left(\frac{\kappa \theta_x}{v} \right)_x(t) \right| dx, \quad (2.70)$$

由 (2.31) 和 (2.34) 可知,

$$\|v_x(t)\|^2 \leq C \left(1 + \left\| \frac{1}{v} \right\|_{L^\infty}^{1-\alpha} + \left\| \frac{1}{v} \right\|_{L^\infty}^{\alpha+\frac{1}{b}} + \|v\|_{L^\infty}^{\frac{b-8}{b}} \right) \leq C. \quad (2.71)$$

结合 (2.70) 和 (2.71) 知,

$$\begin{aligned} \int_0^t \left\| \left(\frac{\kappa \theta_x}{v} \right)(s) \right\|_{L^\infty}^2 \|v_x(s)\| ds &\leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\kappa \theta_x}{v} \right| \left| \left(\frac{\kappa \theta_x}{v} \right)_x \right| dx ds \\ &\leq C \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\kappa \theta_x^2}{v \theta^2} dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1 + \theta^{b+2}) \left| \left(\frac{\kappa \theta_x}{v} \right)_x \right|^2 dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\leq C \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1 + \theta^{b+2}) \left(e_{\theta}^2 \theta_t^2 + \theta^2 p_{\theta}^2 u_x^2 + \lambda^2 \phi^2 z^2 + \frac{\mu^2 u_x^4}{v^2} \right) dx ds \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.72)$$

利用 (2.2)、(2.3)、(2.34) 和 (2.52), (2.72) 右端各项的估计如下:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1 + \theta^{b+2}) e_{\theta}^2 \theta_t^2 dx ds \leq C \|\theta(t)\|_{L^{\infty}}^5 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1 + \theta^{b+3}) \theta_t^2 dx ds \leq C X(t) (1 + Y(t)^{\frac{5}{2b+6}}), \quad (2.73)$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1 + \theta^{b+2}) \theta^2 p_{\theta}^2 u_x^2 dx ds \leq C (1 + \|\theta(t)\|_{L^{\infty}}^{b+11}) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{u_x^2}{\theta} dx ds \leq C (1 + Y(t)^{\frac{b+11}{2b+6}}), \quad (2.74)$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1 + \theta^{b+2}) \lambda^2 \phi^2 z^2 dx ds \leq C (1 + \|\theta(t)\|_{L^{\infty}}^{\beta+b+2}) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi z^2 dx ds \leq C (1 + Y(t)^{\frac{\beta+b+2}{2b+6}}), \quad (2.75)$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1 + \theta^{b+2}) \frac{\mu^2 u_x^4}{v^2} dx ds \leq C (1 + \|\theta(t)\|_{L^{\infty}}^{b+3}) \|u_x\|_{\infty}^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{u_x^2}{\theta} dx ds \leq C (1 + Y(t)^{\frac{1}{2}}) (1 + Z(t)^{\frac{3}{4}}). \quad (2.76)$$

联立 (2.72)–(2.76), 有

$$\begin{aligned} \int_0^t \left\| \left(\frac{\kappa \theta_x}{v} \right) (s) \right\|_{L^{\infty}}^2 \|v_x(s)\| ds &\leq C (1 + X(t) + X(t)Y(t)^{\frac{5}{2b+6}} + Y(t)^{\frac{b+11}{2b+6}} + Z(t)^{\frac{3}{4}} + Y(t)^{\frac{1}{2}} Z^{\frac{3}{4}} \\ &\quad + Y(t)^{\frac{\beta+b+2}{2b+6}})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \varepsilon (X(t) + Y(t)) + C(\varepsilon) (1 + Z(t)^{\frac{1}{2}}), \end{aligned} \quad (2.77)$$

这里使用了假设 $0 \leq \beta < 3b + 10$.

联立 (2.69) 和 (2.77), 有

$$I_{11} \leq \varepsilon (X(t) + Y(t)) + C(\varepsilon) (1 + Z(t)^{\frac{1}{2}}). \quad (2.78)$$

将估计式 (2.62)–(2.68) 和 (2.78) 代入 (2.59), 便可得 (2.55). 证毕. $\square$

下面的引理告诉我们, 函数 $Z(t)$ 和 $W(t)$ 可以被函数 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 所控制.

引理 2.13 在定理 1.1 的假设下, 当 $(b, \alpha, \beta) \in E_2$ 时, 对任意 $0 \leq t \leq T$, 有

$$Z(t) + W(t) \lesssim 1 + X(t) + Y(t) + Z(t)^{\max\{\frac{3}{4}, \frac{3b+9}{4b+10}\}}. \quad (2.79)$$

证明 将 (1.1)₂ 两边对时间变量 t 求偏导之后再同乘 u_t , 可得

$$\left(\frac{u_t^2}{2} \right)_t + (p_t u_t)_x - p_t u_{xt} = \left[\left(\frac{\mu(v) u_x}{v} \right)_t u_t \right]_x - \left(\frac{\mu(v) u_x}{v} \right)_t u_{xt}.$$

对上式关于时间变量 t 和空间变量 x 在区间 $(0, t) \times \mathbb{R}$ 上积分, 有

$$\begin{aligned} \frac{\|u_t(t)\|^2}{2} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(v) u_{xt}^2}{v} dx ds \\ = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left\{ u_{xt} p_t(v, \theta) + \frac{(1 + \alpha) \mu(v) u_x^2 u_{xt}}{v^2} \right\} dx ds + \int_{\mathbb{R}} \frac{u_0^2(x)}{2} dx. \end{aligned} \quad (2.80)$$

类似于文献 [9], 由 Cauchy 不等式并注意到

$$p_t = \left(\frac{\theta}{v} + \frac{4}{3} a \theta^3 \right) \theta_t - \frac{R \theta v_t}{v^2} = \left(\frac{\theta}{v} + \frac{4}{3} a \theta^3 \right) \theta_t - \frac{R \theta u_x}{v^2},$$

再利用 (2.3)、(2.52) 和 (2.54), 有

$$\|u_t(t)\|^2 + \int_0^t \|u_{xt}(s)\|^2 ds \leq \varepsilon(Y(t) + Z(t)) + C(1 + X(t) + Y(t) + Z(t)^{\frac{3b+9}{4b+10}}). \quad (2.81)$$

另一方面, 由 (1.1)₂ 可知,

$$u_{xx} = \frac{v}{\mu(v)} \left[u_t + p_x + \frac{(1+\alpha)\mu(v)u_x v_x}{v^2} \right], \quad (2.82)$$

并注意到

$$p_x = \left(\frac{R\theta}{v} + \frac{a\theta^4}{3} \right)_x = \frac{R\theta_x}{v} - \frac{R\theta v_x}{v^2} + \frac{4}{3}a\theta^3\theta_x, \quad (2.83)$$

由 (2.81)–(2.83) 可得

$$\begin{aligned} \|u_{xx}(t)\|^2 + \int_0^t \|u_{xt}(s)\|^2 ds &\leq C \left(1 + \int_{\mathbb{R}} (u_t^2 + p_x^2 + u_x^2 v_x^2) dx + \int_0^t \|u_{xt}(s)\|^2 ds \right) \\ &\leq C \left(\|u_t(t)\|^2 + \int_0^t \|u_{xt}(s)\|^2 ds + \left\| \frac{1}{\theta} \right\|_{\infty}^{2b-6} \int_{\mathbb{R}} (1 + \theta^{2b}) \theta_x^2 dx \right) \\ &\quad + C \int_{\mathbb{R}} (\theta^2 + u_x^2) v_x^2 dx \\ &\leq \varepsilon(Y(t) + Z(t)) + C(1 + X(t) + Y(t) + Z(t)^{\frac{3b+9}{4b+10}}) \\ &\quad + C(\|\theta(t)\|_{L^\infty}^2 \|v_x(t)\|^2 + \|u_x(t)\|_{\infty}^2 \|v_x(t)\|^2) \\ &\leq \varepsilon(Y(t) + Z(t)) + C(1 + X(t) + Y(t) + Z(t)^{\max\{\frac{3}{4}, \frac{3b+9}{4b+10}\}}), \end{aligned}$$

即

$$Z(t) + W(t) \leq \varepsilon(Y(t) + Z(t)) + C(1 + X(t) + Y(t) + Z(t)^{\max\{\frac{3}{4}, \frac{3b+9}{4b+10}\}}).$$

对上式取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 便可得 (2.79). 证毕. $\square$

由估计式 (2.55) 和 (2.79) 可得

$$Z(t) + W(t) \lesssim 1 + Z(t)^{\max\{\frac{3}{4}, \frac{3b+9}{4b+10}, \frac{3(b+3)}{8(b+2)}, \frac{b+3}{b+5}\}}.$$

注意到 $b \geq 8$ 时,

$$\max \left\{ \frac{3}{4}, \frac{3b+9}{4b+10}, \frac{3(b+3)}{8(b+2)}, \frac{b+3}{b+5} \right\} = \frac{b+3}{b+5} < 1.$$

对上式使用 Young 不等式, 有

$$Z(t) + W(t) \leq C.$$

由 (2.55) 知, $Y(t) \leq C$, 再由 (2.52) 知, $\theta(t, x) \leq C$. 综上, 我们便证明了如下引理:

引理 2.14 在定理 1.1 的假设下, 当 $(b, \alpha, \beta) \in E_2$ 时, 存在一个仅依赖于时间 t 和初值 $(v_0(x), u_0(x), \theta_0(x), z_0(x))$ 的正数 $\bar{\Theta}_1$, 使得对任意的 $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, 有

$$\theta(t, x) \leq \bar{\Theta}_1.$$

由引理 2.8 和 2.14, 与引理 2.11 类似, 我们可以得到当 $(b, \alpha, \beta) \in E_2$ 时 $\|\theta_x(t)\|^2$ 的估计.

引理 2.15 在定理 1.1 的假设下, 当 $(b, \alpha, \beta) \in E_2$ 时, 对任意 $0 \leq t \leq T$, 有

$$\|\theta_x(t)\|^2 + \int_0^t \|\theta_{xx}(s)\|^2 ds \leq C. \quad (2.84)$$

最后, 当 $(b, \alpha, \beta) \in E_1 \cup E_2$ 时, 类似于文献 [9], 我们可以得到如下的关于 $\|z_x(t)\|^2$ 的估计:

引理 2.16 在定理 1.1 的假设下, 当 $(b, \alpha, \beta) \in E_1 \cup E_2$ 时, 对任意的 $0 \leq t \leq T$, 有

$$\|z_x(t)\|^2 + \int_0^t \|z_{xx}(s)\|^2 ds \leq C. \quad (2.85)$$

2.4 定理 1.1 的证明

由引理 2.8、2.10 和 2.14 知, 当 $(b, \alpha, \beta) \in E_1 \cup E_2$ 时, 比容 $v(t, x)$ 和温度 $\theta(t, x)$ 均有正的上界和下界. 结合引理 2.1–2.16 所得到的估计以及标准的连续性技巧, 我们可以把 Cauchy 问题 (1.1)–(1.4)、(1.10) 和 (1.7) 的局部解延拓为整体解, 这样便证明了定理 1.1.

参考文献

- 1 Ducomet B. A model of thermal dissipation for a one-dimensional viscous reactive and radiative gas. *Math Methods Appl Sci*, 1999, 22: 1323–1349
- 2 Ducomet B, Feireisl E. On the dynamics of gaseous stars. *Arch Ration Mech Anal*, 2004, 174: 221–266
- 3 Mihalas D, Mihalas B W. *Foundations of Radiation Hydrodynamics*. New York: Oxford University Press, 1984
- 4 Umehara M, Tani A. Global solution to the one-dimensional equations for a self-gravitating viscous radiative and reactive gas. *J Differential Equations*, 2007, 234: 439–463
- 5 Umehara M, Tani A. Global solvability of the free-boundary problem for one-dimensional motion of a self-gravitating viscous radiative and reactive gas. *Proc Japan Acad Ser A Math Sci*, 2008, 84: 123–128
- 6 Qin Y M, Hu G L, Wang T G, et al. Remarks on global smooth solutions to a 1D self-gravitating viscous radiative and reactive gas. *J Math Anal Appl*, 2013, 408: 19–26
- 7 Jiang J, Zheng S M. Global solvability and asymptotic behavior of a free boundary problem for the one-dimensional viscous radiative and reactive gas. *J Math Phys*, 2012, 53: 123704
- 8 Jiang J, Zheng S M. Global well-posedness and exponential stability of solutions for the viscous radiative and reactive gas. *Z Angew Math Phys*, 2014, 65: 645–686
- 9 Liao Y K, Zhao H J. Global existence and large-time behavior of solutions to the Cauchy problem of one-dimensional viscous radiative and reactive gas. *J Differential Equations*, 2018, 265: 2076–2120
- 10 Qin Y M, Zhang J L, Su X, et al. Global existence and exponential stability of spherically symmetric solutions to a compressible combustion radiative and reactive gas. *J Math Fluid Mech*, 2016, 18: 415–461
- 11 Liao Y K, Wang T, Zhao H J. Global spherically symmetric flows for a viscous radiative and reactive gas in an exterior domain with large initial data. *ArXiv:1801.07169*, 2018
- 12 Zel'dovich Y B, Raizer Y P. *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*, Vol. II. New York: Academic Press, 1967
- 13 He L, Liao Y, Wang T, et al. One-dimensional viscous radiative gas with temperature dependent viscosity. *Acta Math Sci Ser B Engl Ed*, 2018, 38: 1515–1548
- 14 Kazhikhov A V, Shelukhin V V. Unique global solution with respect to time of initial-boundary value problems for one-dimensional equations of a viscous gas. *J Appl Math Mech*, 1977, 41: 273–282
- 15 Jiang S. Large-time behavior of solutions to the equations of a one-dimensional viscous polytropic ideal gas in unbounded domains. *Comm Math Phys*, 1999, 200: 181–193
- 16 Tan Z, Yang T, Zhao H, et al. Global solutions to the one-dimensional compressible Navier-Stokes-Poisson equations with large data. *SIAM J Math Anal*, 2013, 45: 547–571

- 17 Liao Y K, Zhao H J. Global solutions to one-dimensional equations for a self-gravitating viscous radiative and reactive gas with density-dependent viscosity. *Commun Math Sci*, 2017, 15: 1423–1456
- 18 Kanel' Y. On a model system of equations of one-dimensional gas motion (in Russian). *Differ Uravn*, 1968, 4: 721–734
- 19 Chen G Q. Global solutions to the compressible Navier-Stokes equations for a reacting mixture. *SIAM J Math Anal*, 1992, 23: 609–634
- 20 Kawohl B. Global existence of large solutions to initial boundary value problems for a viscous, heat-conducting, one-dimensional real gas. *J Differential Equations*, 1985, 58: 76–103

Cauchy problem of the one-dimensional compressible viscous radiative and reactive gas with degenerate density dependent viscosity

Yongkai Liao, Zhendong Xu & Huijiang Zhao

Abstract This paper is concerned with the Cauchy problem of the one-dimensional compressible viscous radiative and reactive gas. For a class of density dependent, degenerate viscosity, a global solvability result with large non-vacuum data is obtained. The key ingredient in our analysis is to deduce the positive lower and upper bounds on both absolute temperature and the specific volume.

Keywords global solutions, one-dimensional compressible viscous radiative and reactive gas, density dependent degenerate viscosity coefficient, Cauchy problem, large initial data

MSC(2010) 76N15, 35B65, 35Q35, 76V05

doi: 10.1360/N012018-00073